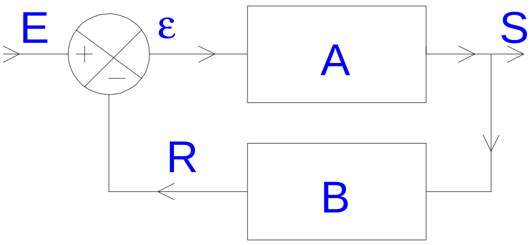
ASSERVISSEMENTS LINEAIRES

1. DEFINITIONS

Pour remédier aux défauts d'un amplificateur ou maintenir constante la vitesse d'un moteur lorsque sa charge varie, on est amené à effectuer une contre-réaction qui a pour but de rendre l'amplification indépendante des composants actifs et la vitesse indépendante de la charge.
On obtient le schéma fonctionnel d'un système bouclé :



1.1 Transmittances

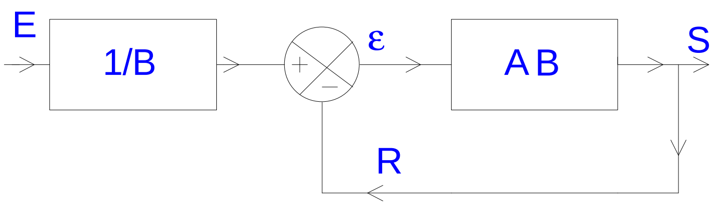
- de la chaîne directe : A(p) p : opérateur de Laplace
- de la chaîne de retour : B(p)
- de boucle ou en boucle ouverte (FTBO) :
  R(p)/E(p) = A(p).B(p) = T(p) (on ouvre la boucle en sortie de B)
- en boucle fermée (FTBF) :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1+A(p).B(p)} = \frac{A(p)}{1+T(p)} = T'(p)$$

- Erreur relative : ε(p) / E(p) = 1/ [1 + T(p)]

1.2 Système à retour unitaire

Un système est à retour unitaire lorsque la fonction de transfert de la chaîne de retour est égale à l'unité.
On peut transformer le schéma bloc précédent en un système à retour unitaire en ajoutant en amont du soustracteur un bloc de fonction de transfert 1/B et en prenant comme fonction de transfert de la chaîne directe AB.



1.3 Précision d'un système

Un **système est précis** si la sortie est une image fidèle de la consigne de la forme : S = KE
Ceci sera vérifié **si le coefficient A est grand** (tel que AB >> 1), on aura alors :

T'(p) = 1/B donc K = 1/B

La sortie ne dépend pas de la chaîne directe et de ses défauts.

1.4 Stabilité d'un système

Lorsque la charge varie le système ne compense pas immédiatement les variations de la sortie et cela se traduit généralement par la présence d'oscillations amorties en S. Leur amplitude sera d'autant plus grande que le coefficient A est élevé.
Il sera donc nécessaire de faire un **compromis entre précision et stabilité** puisque le coefficient d'amplification de la chaîne directe agit en sens inverse sur ces deux grandeurs.

1.5 Correction d'un système

Pour satisfaire aux deux exigences précédentes, on sera amené à introduire des correcteurs de différents types (P, PI, PD, PID).

1.6 Système linéaire

Les équations différentielles liant la sortie à l'entrée sont linéaires à coefficients constants , la fonction de transfert en boucle ouverte peut se mettre sous la forme :

$$T(p) = \frac{T_o}{p^\alpha} \cdot \frac{a_m.p^m + ... + a_1.p + 1}{b_n.p^n + ... + b_1.p + 1}$$

avec $m \leq n$: condition pour que le système soit physiquement réalisable.
α : **classe** ou **type d'asservissement**.

2. PRECISION

Pour chiffrer la précision, on compare la consigne (entrée) à la grandeur de retour (image de la sortie), leur différence :

$\varepsilon(t) = e(t) - r(t)$ représente l'erreur.

2.1 Précision dynamique

Pendant le régime transitoire, la précision évolue.
Considérons un système du second ordre dont le coefficient d'amortissement est inférieur à 1.
La réponse est oscillatoire amortie : les dépassements sont d'autant plus grands et leur décroissance d'autant moins rapide que le coefficient d'amortissement m est faible. On serait donc tenté de choisir un coefficient relativement élevé, par exemple $m \approx 0{,}7$ pour obtenir un temps de réponse à 5% minimal. Mais, lorsque m augmente, la pseudo période des oscillations T augmente également (car la pseudo pulsation a pour expression : $\omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}$), ce qui a pour conséquence d'augmenter la durée des oscillations.

On pourra retenir pour un système d'ordre quelconque les valeurs maximales suivantes :

- **Premier dépassement : 20%**
- **Coefficient de surtension : 2dB**

Ce qui correspond pour un système du **deuxième ordre à m = 0,45.**

2.2 Précision statique

La précision statique est liée au régime permanent, elle est définie par : $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t)$

Elle peut être calculée directement à partir de l'équation différentielle ou en utilisant la transformée de Laplace et le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p) \text{ donc : } \quad \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} \frac{p.E(p)}{1+T(p)}$$

2.3 Erreur de position

Le signal d'entrée est alors un échelon d'amplitude E, donc : **E(p) = E/p**

2.4 Erreur de traînage

Le signal d'entrée est dans ce cas une rampe de pente a (e(t) = at), donc : **$E(p) = a/p^2$**

2.5 Erreur d'accélération

Le signal d'entrée est de la forme $e(t) = at^2$, donc : **$E(p) = 2a/p^3$**

3. STABILITE

Un système physique est stable s'il retourne spontanément vers son état d'équilibre lorsqu'il en est écarté.
Soit un système de fonction de transfert : N(p)/D(p)   où N(p), D(p) sont des polynômes en p.
Ce système diverge si les coefficients des exponentielles de l'équation du temps (associée à la décomposition en éléments simples de la fonction de transfert) sont positifs.
Le **système** sera donc **stable** si tous les **pôles** de la fonction de transfert ont une **partie réelle strictement négative**.

<u>Rappel</u> : zéros de la fonction de transfert : racines de cette fonction
pôles de la fonction de transfert : zéros du dénominateur

<u>Conclusion</u> : Un système de FTBO T(p) sera stable en boucle fermée si les **zéros de l'équation caractéristique** 1 + T(p) ont une **partie réelle strictement négative**.

3.1 Critères de stabilité

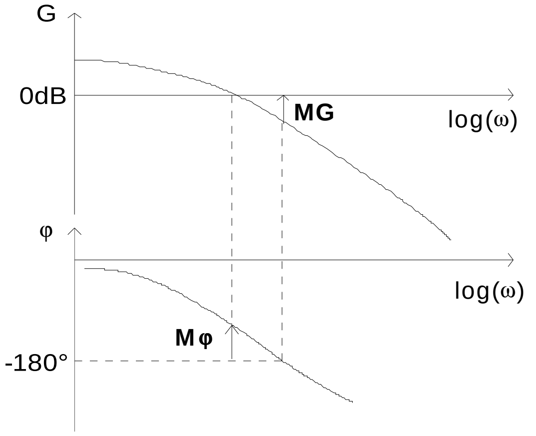
Ils permettent de prévoir la stabilité en boucle fermée :

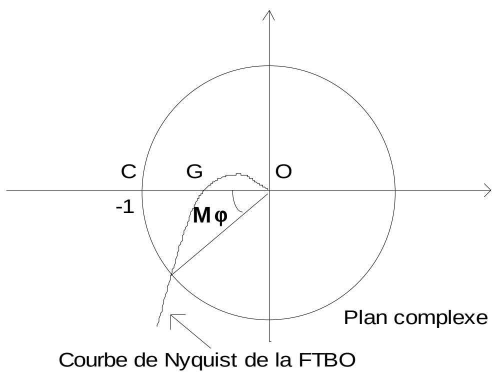
- Lieu des pôles : d'après la conclusion précédente, les pôles de T'(p) (zéros de 1 + T(p)) doivent être dans le demi plan complexe gauche (donc avoir une partie **réelle strictement négative**).
- Critère du revers : un système à **déphasage minimal***, **stable en boucle ouverte**, est stable en boucle fermée si le diagramme de Nyquist de la **transmittance** du système en **boucle ouverte** T(p) laisse le point critique -1 à sa gauche lorsque ω varie de zéro à l'infini.

* Un système est dit à déphasage minimal si sa fonction de transfert ne possède ni zéro, ni pôle à partie réelle positive, ni retard pur.

3.2 Degrés de stabilité

Un système est plus stable lorsque la courbe de Nyquist de la FTBO s'éloigne du point critique -1.





MG = -20.log(GO)

Des marges de phase et de gain positives garantissent la stabilité du système en boucle fermée, on admet couramment : **Mφ = 45°** et **MG = 10 ou 12dB**

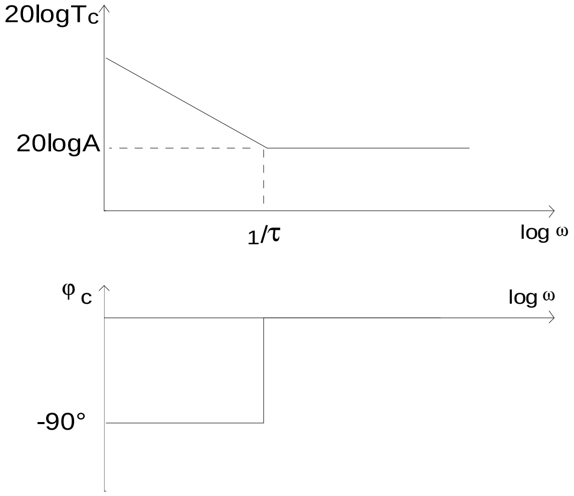
4. LIEN ENTRE PRECISION ET STABILITE

La **stabilité est liée au régime transitoire** (solution générale de l'équation différentielle sans second membre) alors que **la précision statique est associée au régime permanent** (solution particulière de l'équation différentielle).
Or il faut se souvenir que lorsqu'on étudie un système en fonction de la fréquence, les hautes fréquences sont liées à t → 0 (on diminue par exemple le temps de montée d'un signal en augmentant la bande passante du sytème qui le transmet) alors que les basses fréquences sont liées à t → ∞.

- la **précision statique** est **liée à $t \to \infty$ et $\omega \to 0$**
- la **stabilité** est toujours **associée à $t \to 0$ et $\omega \to \infty$**
- on **améliorera la précision statique** d'un système en **corrigeant sa réponse en basse fréquence** (augmentation de son gain) et **sa stabilité**, en la **corrigeant en haute fréquence** (diminution de son gain).

5. CORRECTEURS

5.1 Proportionnel intégral (PI)



Transmittance du correcteur :

$$T_c(p) = A_0\left(1+\frac{1}{\tau p}\right) = A_0\,\frac{\tau p+1}{\tau p}$$

Son **action** est limitée aux **fréquences basses**.

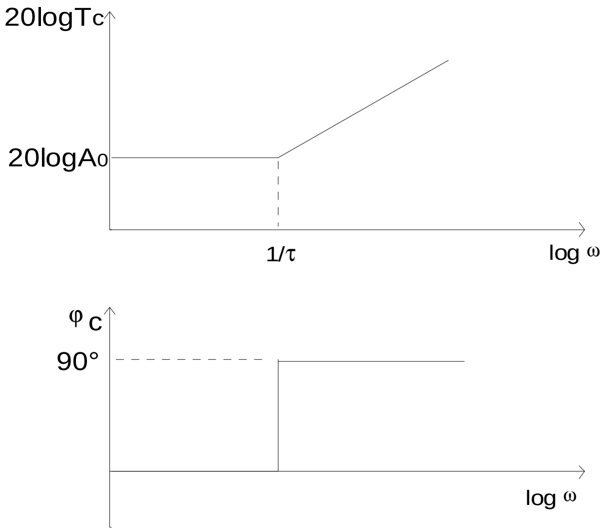
On **règle A_0** pour obtenir une **stabilité** suffisante.

L'action **intégrale améliore la précision** souhaitée puisqu'elle augmente le gain en basse fréquence.

Remarque : Un correcteur PI n'est pas physiquement réalisable à partir de résistances et condensateurs, on réalise alors un correcteur à retard de phase qui joue le même rôle que le correcteur PI. Leur fonction de transfert est du type :

$$T_c(p) = A_0 \cdot \frac{1+\tau p}{1+a\tau p} \quad \text{avec } a > 1$$

5.2 Proportionnel dérivé (PD)



Transmittance du correcteur :
$T_c(p) = A_0.(1+\tau p)$.

On règle A_0 pour obtenir la précision souhaitée.

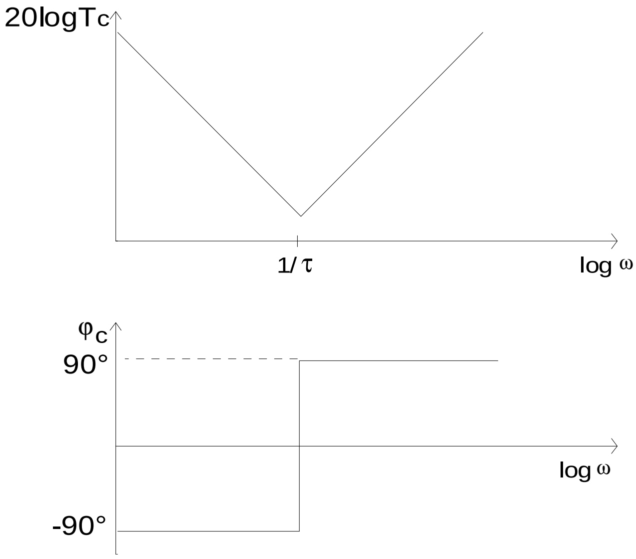
Le **correcteur PD** est surtout utilisé pour **augmenter la bande passante** d'un système ce qui aura pour effet de **diminuer son temps de réponse.**

Cependant, l'augmentation du gain en haute fréquence peut rendre le système instable. L'utilisation de ce type de correcteur est donc plus délicate.

Remarque : Le correcteur ci-dessus n'est pas physiquement réalisable. On réalise un correcteur à avance de phase dont la fonction de transfert a pour expression :

$$T_c(p) = A_0 \cdot \frac{1+\tau p}{1+a\tau p} \quad \text{avec } a < 1$$

5.3 Proportionnel intégral dérivé (PID)



Transmittance du correcteur :

$$T_c(p) = A_0(1+\frac{1}{\tau_1 p}+\tau_2 p) = A_0\left(\frac{\tau_1\tau_2 p^2+\tau_1 p+1}{\tau_1 p}\right)$$

Il combine les actions des deux précédents correcteurs:

- action I : amélioration de la précision
- action D : augmentation de la bande passante.

En posant $\tau = (\tau_1.\tau_2)^{1/2}$, on obtient les courbes asymptotiques ci-contre.

Remarque : Le correcteur PID n'étant pas physiquement réalisable, on construit un correcteur retard avance :

$$T_c(p) = A_0 \cdot \frac{(1+\tau_1 p).(1+\tau_2 p)}{(1+\tau_3 p).(1+\tau_4 p)}$$

$$\text{avec } 1/\tau_3 < 1/\tau_1 \quad \text{et} \quad 1/\tau_2 < 1/\tau_4$$