Développements limités

Un **développement asymptotique** de la fonction f définie sur l'intervalle I au voisinage du point a de $\bar{I}$ est une écriture du type $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_n + f_{n+1}$ avec pour tout entier k compris entre 1 et n, la condition f_{k+1} est négligeable devant f_k au voisinage de a.

Une fonction f définie sur I (éventuellement $I \setminus \{a\}$) admet un **développement limité** au voisinage de a à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ quand il existe un polynôme P_n de degré au plus n tel que
si a est réel, $f(x) = P_n(x-a) + o((x-a)^n)$ au voisinage de a
si a est infini (i.e. vaut $+\infty$ ou $-\infty$), $f(x) = P_n(1/x) + o((1/x)^n)$ au voisinage de a
La forme normalisée du développement limité de f en a est obtenue quand on écrit $P_n = X^p Q$ avec $Q(0) \neq 0$ (i.e. le coefficient constant est non nul)

Un développement limité, comme tout développement asymptotique, peut permettre de lever des formes indéterminées, d'obtenir des équivalents, d'étudier le comportement d'une fonction au voisinage d'un point (signe, position d'une courbe par rapport à ses tangentes ou ses asymptotes) ou d'une suite.
On peut faire des sommes, des produits et des composition de développements limités mais il faut toujours rester extrêment attentif aux voisinages considérés.

Formule de Taylor-Young : si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a;b]$ alors $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_a((x-a)^n)$.

Cette formule montre que pour tout entier naturel n, on a les développements limités suivants, qui sont à CONNAITRE PAR COEUR, au **voisinage de** 0:

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)\,x^2}{2} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\,x^n}{n!} + o(x^n) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

$$\mathrm{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \qquad \mathrm{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\, x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^7) \qquad \mathrm{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^7)$$

(pour ces deux derniers, seul le développement à l'ordre 3 est exigible sans calcul).