

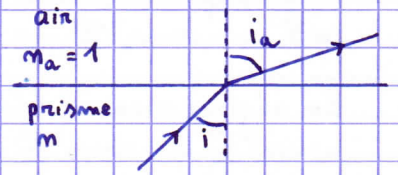
I Onda évanescents

1. Loi de Descartes de la réflexion:  $m \sin i = m_a \sin i_a$

Angle limite  $i = i_e$  quand  $i_a = \frac{\pi}{2} \Rightarrow m \sin i_e = m_a$

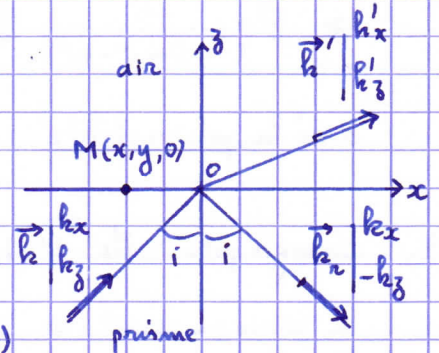
Il y a réflexion totale si:  $i > i_e = \text{Arccos}\left(\frac{1}{m}\right)$

A.N:  $i_e = 30^\circ$



2. On écrit le champ magnétique des trois ondes:

$$\begin{aligned} \vec{B}_i &= \vec{B}_{oi} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ \vec{B}_r &= \vec{B}_{or} e^{i(\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r})} \\ \vec{B}_t &= \vec{B}_{ot} e^{i(\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r})} \end{aligned}$$



On écrit la continuité de  $\vec{B}$  en un point  $M(x, y, 0)$  de l'interface:

$$\vec{B}_{oi} e^{i(\omega t - k_x x)} + \vec{B}_{or} e^{i(\omega t - k_x x)} = \vec{B}_{ot} e^{i(\omega t - k_x x)}$$

Cela doit être vrai pour tout  $x \Rightarrow k_{ox} = k'_{ox}$

3. Relation de dispersion dans l'air:  $k'^2 = k_x'^2 + k_z'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow k_z'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2$

Or:  $k_{ox} = k \sin i$  avec:  $k = \frac{\omega}{c} m$  (relation de dispersion du prisme)

d'où:  $k_z'^2 = k^2 \left( \frac{1}{m^2} - \sin^2 i \right)$

4. Il n'y a pas de propagation selon  $Oz$  dans l'air si:  $k_z'^2 < 0 \Rightarrow \frac{1}{m^2} < \sin^2 i \Rightarrow i > i_e = \text{Arccos}\left(\frac{1}{m}\right)$

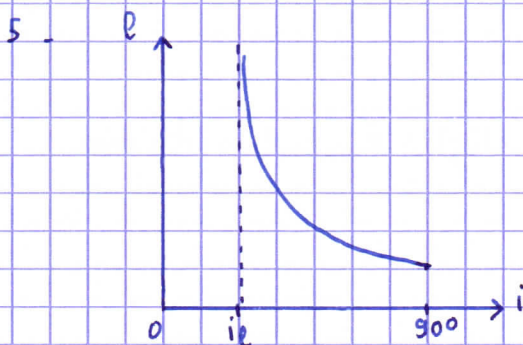
On retrouve la condition de réflexion totale.

On a alors:  $k_z' = -i|k_z'|$  donc:  $\vec{B}' = \vec{B}'_{ot} e^{i(\omega t - k_x x - |k_z'| z)} = \vec{B}'_{ot} e^{i(\omega t - k_x x + i|k_z'| z)}$

soit:  $\vec{B}' = \vec{B}'_{ot} e^{i(\omega t - k_x x)} e^{-|k_z'| z}$

D'où la longueur caractéristique de décroissance:

$$l = \frac{1}{|k_z'|} = \frac{1}{k \sqrt{\frac{1}{m^2} - \sin^2 i}}$$



Pour  $i$  pas trop proche de  $i_e$ , on a:  $l \approx \frac{1}{k}$

Or:  $k = \frac{\omega}{c} m = \frac{2\pi}{\lambda} m$

Donc  $l$  est bien de l'ordre de  $\frac{\lambda}{2\pi}$

## II. Rebond des atomes

6.  $\vec{p} = -e\vec{r}$  : moment dipolaire électrique induit

Loi de la quantité de mouvement à l'électron :

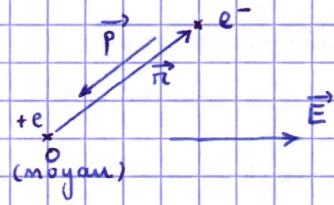
$$m\ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2 \vec{r} - e\vec{E}$$

En régime sinusoïdal forcé et notation complexe :

$$-m\omega^2 \vec{r} = -m\omega_0^2 \vec{r} - e\vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \frac{-e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E} \Rightarrow \vec{p} = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E} = \epsilon_0 \frac{e^2}{m\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E}$$

D'où la polarisabilité :  $\alpha(\omega) = \frac{e^2}{m\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)}$



7. Énergie potentielle :  $U(t) = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -\alpha \epsilon_0 \vec{E}^2 \Rightarrow U = \langle U(t) \rangle = -\alpha \epsilon_0 \langle \vec{E}^2 \rangle$

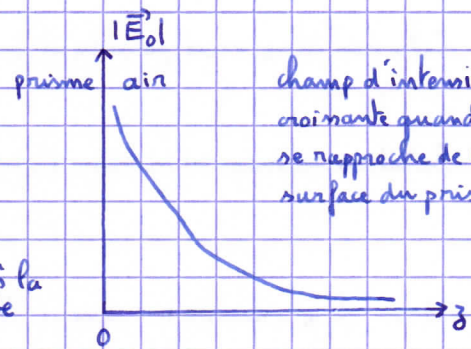
$\vec{E}$  varie en coswt  $\Rightarrow \langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{1}{2} |\vec{E}_0|^2$  donc :  $U = -\frac{1}{2} \alpha \epsilon_0 |\vec{E}_0|^2$

8. Force subie par l'atome :  $\vec{F} = -\text{grad}U = \frac{dU}{dz} \vec{u}_z$

$$= -\frac{d}{dz} \left( -\frac{1}{2} \epsilon_0 \alpha |\vec{E}_0|^2 \right) \vec{u}_z$$

$$= \frac{1}{2} \alpha \epsilon_0 \cdot 2 |\vec{E}_0| \cdot \frac{d|\vec{E}_0|}{dz} \vec{u}_z$$

$< 0$  d'après la courbe



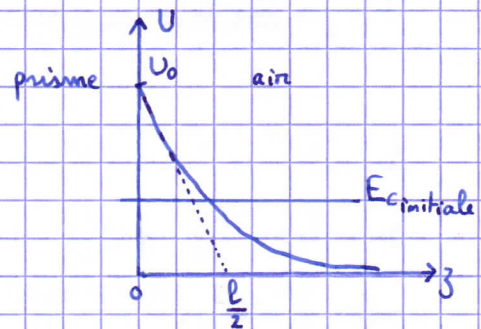
champ d'intensité croissante quand on se rapproche de la surface du prisme

Si  $\omega > \omega_0$ , on a :  $\alpha < 0$ . Donc la force est selon  $+\vec{u}_z$ . Elle est répulsive.

9. D'après la question 4, le champ électrique décroît en  $e^{-z/l}$  quand on s'éloigne de la surface du prisme.

$\Rightarrow U$  décroît en  $e^{-2z/l}$

$\Rightarrow$  La courbe ci. contre montre que l'on a une barrière exponentielle de potentiel quand on se rapproche de la surface du prisme



10. Conservation de l'énergie mécanique de l'atome :  $E_c + U = E_{c \text{ initiale}}$  ( $U=0$  à grande distance)

$$\Rightarrow E_c = E_{c \text{ initiale}} - U > 0$$

$$\Rightarrow U < E_{c \text{ initiale}}$$

$\Rightarrow$  la particule ne peut pas aller dans la région où  $U(z) > E_{c \text{ initiale}}$ , c'est à dire tout près du prisme

$\Rightarrow$  l'atome rebondit sur la barrière.

11.  $E_c = U_0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = U_0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2U_0}{m}}$

On a :  $m = \frac{M}{N_A} = \frac{0,1}{6,02 \cdot 10^{23}} = 1,7 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$  ;  $U_0 \approx 10^{-25} \text{ J}$  d'où :  $v \approx 1 \text{ ms}^{-1}$

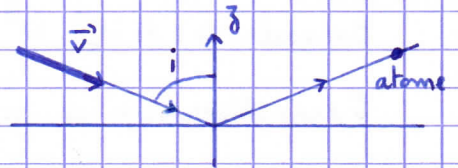
12. La théorie cinétique des gaz donne :  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$

A.N. :  $v \approx \left( \frac{3 \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 10^2}{10^{-25}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{10^{-20}}{10^{-25}} \right)^{\frac{1}{2}} = 10^{2,5} \approx 300 \text{ ms}^{-1}$  cohérent avec le texte

13. On a :  $|v_z| = \|\vec{v}\| \cos i$

On veut  $|v_z| = 1 \text{ ms}^{-1}$  avec  $\|\vec{v}\| \approx 100 \text{ ms}^{-1}$

$\Rightarrow \cos i = 10^{-2} \Rightarrow i = 89,5^\circ$  L'incidence doit être très rasante.



14. Il y a 100 millions d'atomes dans une sphère d'un millimètre de diamètre, donc :

$n^* \approx \frac{100 \cdot 10^6}{(10^{-3})^3}$  soit une densité particulière de :  $n^* \approx 10^{17} \text{ m}^{-3}$

15. Equation d'état du gaz parfait :  $PV = nRT = \frac{N}{N_A} RT = N k_B T$  (N: nombre d'atomes)

$\Rightarrow n^* = \frac{N}{V} = \frac{P}{k_B T}$

donc :  $P = n^* k_B T$

A.N. :  $P \approx 10^{17} \cdot 10^{-23} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \approx 10^{-11} \text{ Pa}$ . Il faut donc un vide très poussé.

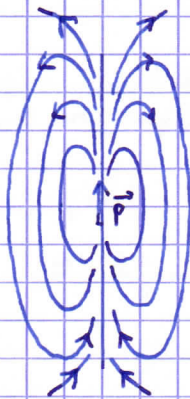
16. Conservation de l'énergie mécanique pour les atomes en chute libre :  $\Delta E_c + \Delta E_p = 0$

soit :  $(\frac{1}{2}mv^2 - 0) + (0 - mgh) = 0 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$

A.N. :  $v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 10^{-2}} \approx 0,5 \text{ ms}^{-1}$

III Interaction d'un atome avec une surface diélectrique

17.

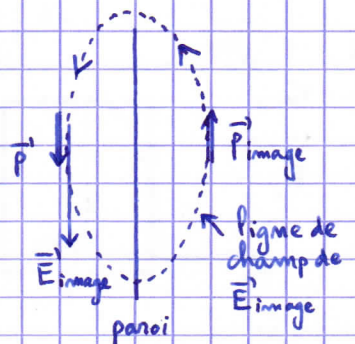


18.  $\vec{p}$  placé dans  $\vec{E}_{\text{image}}$  possède l'énergie potentielle :

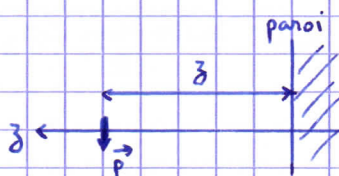
$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{image}}$

- $\vec{p}$  se déplace pour minimiser  $E_p$
- $\Rightarrow$  attraction vers les zones où  $\vec{E}_{\text{image}}$  est intense
- $\Rightarrow$  attraction vers le dipôle image

$E_{\text{image}}$  varie en  $\frac{1}{z^3} \Rightarrow E_p$  en  $\frac{1}{z^3}$



19.



temps caractéristique de variation temporelle du dipôle :  $T = \frac{1}{\nu}$

temps de propagation du champ entre l'atome et la paroi :  $\tau = \frac{z}{c}$

Le dipôle apparaît figé si:  $T \gg \tau \Rightarrow \frac{1}{\nu} \gg \frac{\delta}{c} \Rightarrow \frac{c}{\nu} \gg \delta \Rightarrow \underline{\lambda \gg \delta}$

20.  $d_{\min} = 50 \text{ mm}$ ;  $\lambda_{\text{optique}} = 500 \text{ nm}$ . La condition est juste vérifiée.

21.  $U_{\text{vanderW}} = -\frac{A}{\delta^3} \Rightarrow F_{\text{vanW}} = -\frac{dU_{\text{vanderW}}}{d\delta} = \frac{3A}{\delta^4}$   $F_{\text{vanW}}$  attractive  $\Rightarrow \underline{A > 0}$

Pour  $\delta \rightarrow 0$ : le potentiel de Van der Waals l'emporte  $U_{\text{tot}} \approx -\frac{A}{\delta^3}$

Pour  $\delta \rightarrow +\infty$ : le potentiel dipolaire l'emporte  $U_{\text{tot}} \approx U_0 e^{-\frac{2\delta}{\ell}}$

22.  $[U_0] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}$ ;  $[\ell] = \text{L}$ ;  $[A] = \text{ML}^5\text{T}^{-2}$

On veut:  $S = A U_0^\alpha \ell^\beta = \text{ML}^5\text{T}^{-2} \cdot \text{M}^\alpha \text{L}^{2\alpha} \text{T}^{-2\alpha} \text{L}^\beta$

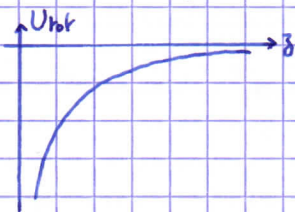
$S$  sans dimension  $\Rightarrow \alpha = -1$   $\beta = -3$  donc:  $S = \frac{A}{U_0 \ell^3}$

23.  $U_{\text{tot}} = U_0 e^{-\frac{2\delta}{\ell}} - \frac{A}{\delta^3} = U_0 \left( e^{-\frac{2\delta}{\ell}} - S \frac{\ell^3}{\delta^3} \right)$

$S \gg 1$ :  $U_{\text{tot}} \approx -U_0 S \frac{\ell^3}{\delta^3}$

$S \ll 1$ :  $U_{\text{tot}} \approx U_0 e^{-\frac{2\delta}{\ell}}$

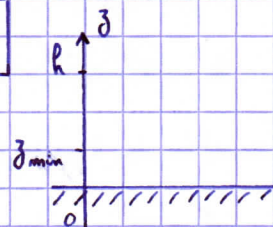
La figure 2 à droite se rapproche du cas  $S \ll 1$ .



24. Conservation de l'énergie mécanique:  $mgh = U_{\text{tot}}(\delta_{\min}) + mg\delta_{\min}$

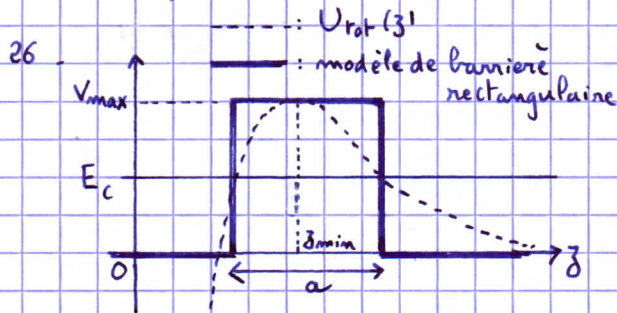
Expression de  $\delta_{\min}$ :  $\left( \frac{d}{d\delta} (U_{\text{tot}} + mg\delta) \right)_{\delta=\delta_{\min}} = 0$

$\Rightarrow -\frac{2}{\ell} U_0 \exp\left(-\frac{2\delta_{\min}}{\ell}\right) + \frac{3A}{\delta_{\min}^4} + mg = 0$



Ces deux équations peuvent permettre de déterminer A.

25. On peut rapprocher ce phénomène de la présence d'une onde évanescente dans l'air (question 4). On se s'attend pas à l'existence de cette onde car il y a une réflexion totale de la lumière sur le dioptre verre/air.



27. Au voisinage de  $V_{\max}$ , on peut prendre un modèle parabolique pour  $U_{\text{tot}}(\delta)$ :

$U_{\text{tot}}(\delta) = V_{\max} - \frac{1}{2} k (\delta - \delta_{\min})^2$

$E_c = V_{\max} - \frac{1}{2} k \left(\frac{a}{2}\right)^2$

donc a varie en  $\sqrt{V_{\max} - E_c}$

Sachant que  $T \approx e^{-\frac{2a\sqrt{2m(V-E_c)}}{\hbar}}$ , on en déduit que T varie en  $e^{-(V_{\max} - E_c)}$

En supposant que l'effet tunnel est observable pour  $T \gg 10^{-3}$ , on a:  $-\frac{2a\sqrt{2m(V_{\max} - E_c)}}{\hbar} \gg -3 \ln 10$

d'où:  $a \leq \frac{3 \ln 10 \cdot \hbar}{2\sqrt{2m(V_{\max} - E_c)}}$

IV Mesure des rugosités de surface

28. Comme à la question 4, l'amplitude du champ électrique de l'onde évanescente est:

$$\underline{E}_i = E_0 e^{-|k_z'|z} e^{i(\omega t - k_x x)} \quad \text{avec: } |k_z'| = \frac{1}{\ell}$$

Pour l'onde évanescente réfléchie:  $\underline{E}_r = \sqrt{R} E_0 e^{-|k_z'|z} e^{i(\omega t + k_x x)}$

29. D'après la question 7,  $U$  est proportionnel à  $|\underline{E}|^2$ .

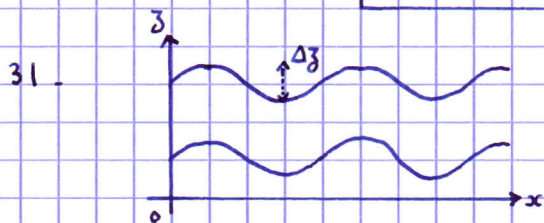
On a:  $\underline{E} = \underline{E}_i + \underline{E}_r = E_0 e^{-\frac{z}{\ell}} e^{i\omega t} (e^{-ik_x x} + \sqrt{R} e^{ik_x x})$

donc:  $|\underline{E}|^2 = E_0^2 e^{-\frac{2z}{\ell}} (e^{-ik_x x} + \sqrt{R} e^{ik_x x})(e^{ik_x x} + \sqrt{R} e^{-ik_x x})$   
 $= E_0^2 e^{-\frac{2z}{\ell}} (1 + R + \sqrt{R}(e^{i2k_x x} + e^{-i2k_x x}))$   
 $= E_0^2 (1+R) e^{-\frac{2z}{\ell}} (1 + \frac{2\sqrt{R}}{1+R} \cos(2k_x x))$

donc on a bien  $U$  de la forme:  $U = U_1 e^{-\frac{2z}{\ell}} (1 + \epsilon \cos(2k_x x))$  avec:  $\epsilon = \frac{2\sqrt{R}}{1+R}$

30. On a:  $e^{\frac{2z}{\ell}} = \frac{U_1}{U} (1 + \epsilon \cos(2k_x x)) \Rightarrow \frac{2z}{\ell} = \ln\left(\frac{U_1}{U}\right) + \ln(1 + \epsilon \cos(2k_x x))$

On:  $\epsilon \ll 1$  donc:  $z = \frac{\ell}{2} \left[ \ln\left(\frac{U_1}{U}\right) + \epsilon \cos(2k_x x) \right]$  Equation de l'équipotentielle  $U = \text{cste}$



On a:  $z_{\max} = \frac{\ell}{2} \ln\left(\frac{U_1}{U}\right) + \frac{\epsilon \ell}{2}$   
 $z_{\min} = \frac{\ell}{2} \ln\left(\frac{U_1}{U}\right) - \frac{\epsilon \ell}{2}$

D'où la profondeur:  $\Delta z = \epsilon \ell$

32.  $\lambda_{DB} = \frac{h}{p}$  avec:  $p = mv$  A.N.:  $\lambda_{DB} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{0,5 \cdot \frac{0,1}{6,02 \cdot 10^{23}}} = 8 \text{ nm}$

33. La légende de la figure 3 dit qu'il y a une forte diffraction si  $\lambda_{DB} \approx \Delta z$

On:  $\Delta z = \epsilon \ell \approx \epsilon \lambda \approx 100 \epsilon \lambda_{DB}$  car  $\ell \approx \lambda$  et  $\lambda \approx 100 \lambda_{DB}$

On calcule:  $100 \epsilon = 2,3$  donc  $\lambda_{DB}$  et  $\Delta z$  sont bien du même ordre de grandeur

34.  $\epsilon = \frac{2\sqrt{R}}{1+R} \Rightarrow \epsilon^2 (1+R)^2 = 4R \Rightarrow \epsilon^2 \approx 4R$  car  $R \ll 1 \Rightarrow R = \frac{\epsilon^2}{4}$  A.N.:  $R = 1,3 \cdot 10^{-4}$

35. On a:  $p_x = p \sin \theta \Rightarrow 2 \hbar k_x = \frac{h}{\lambda_{DB}} \sin \theta$

$\Rightarrow 2 \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} m \sin i = \frac{h}{\lambda_{DB}} \sin \theta$

$\Rightarrow \sin \theta = 2 \frac{\lambda_{DB}}{\lambda} m \sin i = 2 \cdot \frac{1}{100} m \sin i$

A.N.:  $m = 2; i = 60^\circ \Rightarrow \theta = 2^\circ$

