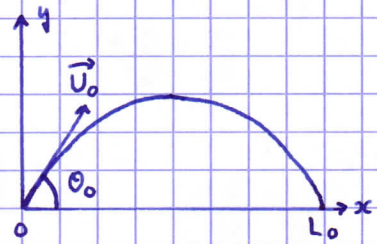


I. Trajectoire d'un volant de badminton

I.1 Loi de la quantité de mouvement au volant dans le référentiel terrestre galiléen: $m\vec{a} = m\vec{g}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = U_0 \cos \theta_0 t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + U_0 \sin \theta_0 t \end{cases}$$



d'où l'équation cartésienne: $y = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{U_0 \cos \theta_0}\right)^2 + x \tan \theta_0$

La trajectoire est une parabole.

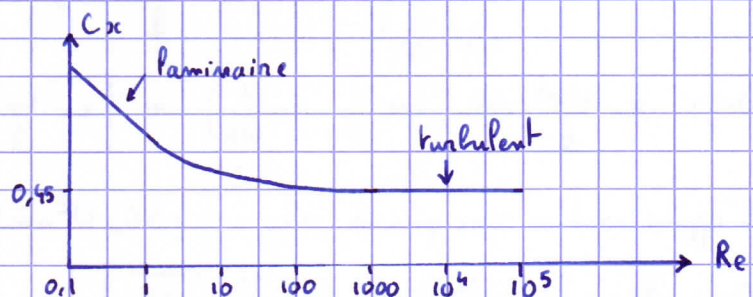
$$\text{On a: } 0 = -\frac{1}{2}g \frac{L_0^2}{U_0^2 \cos^2 \theta_0} + \frac{L_0 \sin \theta_0}{\cos \theta_0} \Rightarrow \boxed{L_0 = \frac{U_0^2}{g} \sin 2\theta_0}$$

I.2 $[L_0] = \frac{L^2 \cdot T^{-2}}{L \cdot T^{-2}} = L$ - C'est homogène.

$L_0 = 0$ pour $\theta_0 = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$ ce qui est normal

I.3 L_0 maximale à U_0 fixé si $\sin 2\theta_0 = 1 \Rightarrow \boxed{\theta_0 = \frac{\pi}{4}}$

I.4 C_x est sans dimension



I.5 $Re = \frac{U L}{\nu}$ Pour $U = 58 \text{ m/s}$: $Re \approx 2 \cdot 10^5$ Pour $U = 6,7 \text{ m/s}$: $Re = 3 \cdot 10^4$

L'écoulement est turbulent

I.6 Loi de la quantité de mouvement: $m \frac{d\vec{U}}{dt} = m\vec{g} - \frac{1}{2} \rho S C_x U \vec{U}$

mouvement rectiligne uniforme: $\frac{d\vec{U}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \frac{1}{2} \rho S C_x U \vec{U} = m\vec{g} = -mg \vec{u}_y$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{U}_\infty = -\sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_x}} \vec{u}_y} \quad U_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_x}}$$

I.7 On a alors: $\frac{d\vec{U}}{dt} = \vec{g} - g \frac{U}{U_\infty} \frac{\vec{U}}{U_0}$

I.8 La pesanteur est négligeable si: $g \ll g \frac{U^2}{U_0^2} \Rightarrow \boxed{U \gg U_\infty}$

On a alors: $\frac{d\vec{U}}{dt} = -g \frac{U}{U_0^2} \vec{U}$ A chaque instant vitesse et accélération sont parallèles \Rightarrow la trajectoire est rectiligne.

En projection selon la direction de la trajectoire: $\frac{dU}{dt} = -g \frac{U^2}{U_0^2} \Rightarrow \frac{dU}{U^2} = -\frac{g}{U_0^2} dt$

On intègre: $\left[-\frac{1}{U}\right]_{U_0}^U = -\frac{g}{U_0^2} t \Rightarrow \frac{1}{U_0} - \frac{1}{U} = -\frac{g}{U_0^2} t$

donc:
$$U = \frac{1}{\frac{1}{U_0} + \frac{g}{U_0^2} t}$$

I.9. $\frac{U_0}{2} = \frac{1}{\frac{1}{U_0} + \frac{g}{U_0^2} t_{1/2}} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{g U_0}{2 U_0^2} t_{1/2} = 1 \Rightarrow t_{1/2} = \frac{U_0^2}{g U_0}$

On mesure un écart de 1,6 cm entre les 2 premiers points sur la figure.
On cherche un écart de 0,8 cm entre deux points pour avoir $t_{1/2}$.
Cela correspond au point 3 $\rightarrow t_{1/2} = 150 \text{ ms}$

8,2 cm sur la figure correspondent à 9 m \Rightarrow 0,8 cm correspondent à 0,88 m

La vitesse au point 3 est donc: $U = \frac{0,88}{50 \cdot 10^{-3}} = 18 \text{ m s}^{-1}$

On n'a pas vraiment $\frac{U_0}{2} = 29 \text{ m s}^{-1}$.

Il y a deux explications:
- lecture imprécise sur la figure
- l'hypothèse $U \gg U_0$ n'est pas bien vérifiée.

I.10 $\dot{x} = U \cos \theta_0 = \frac{\cos \theta_0}{\frac{1}{U_0} + \frac{g}{U_0^2} t} \Rightarrow x = \frac{U_0^2}{g} \cos \theta_0 \left(\ln \left(\frac{1}{U_0} + \frac{g}{U_0^2} t \right) - \ln \frac{1}{U_0} \right)$

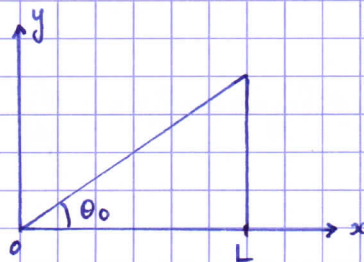
I.11 On a: $x = \frac{U_0^2}{g} \cos \theta_0 \left(\ln \frac{1}{U} - \ln \frac{1}{U_0} \right) \Rightarrow x = \frac{U_0^2}{g} \cos \theta_0 \ln \left(\frac{U_0}{U} \right)$

I.12 L'approximation c'est quand: $mg = \frac{1}{2} \rho S C_x U^2 \sin \theta_0 \Rightarrow U = \frac{U_0}{\sqrt{\sin \theta_0}}$

On a alors: $L = \frac{U_0^2}{g} \cos \theta_0 \ln \left(\frac{U_0}{U_0 \sqrt{\sin \theta_0}} \right)$

I.13 Le régime limite (3) est caractérisé par la vitesse limite \vec{U}_0 verticale et constante \Rightarrow points régulièrement espacés
On peut considérer que le régime limite s'observe à partir du point 40.

I.14 En négligeant le régime intermédiaire:



I.15 La portée est égale à la distance L calculée à la question 12.
L est forcément inférieure à la portée en l'absence de freinage.

I.16 $L = \frac{(6,7)^2}{9,81} \cdot 0,6 \ln \left(\frac{58}{6,7} \sqrt{0,8} \right)$ A.N: $L \approx 5,6 \text{ m}$

C'est inférieur à la portée de 9 m de la figure 1, ce qui prouve que le régime intermédiaire n'est pas négligeable.

I.17 Puisque tous les termes de l'équation du I.7 sont du même ordre de grandeur, on a :

$$\frac{d\vec{U}}{dt} \text{ comparable à } \vec{g} \Rightarrow \frac{U}{T} \approx g \Rightarrow \frac{L_i}{T^2} \approx g \Rightarrow L_i \approx g T^2$$

$$g \frac{U}{U_0} \text{ comparable à } \vec{g} \Rightarrow g \frac{U^2}{U_0^2} \approx g \Rightarrow U \approx U_0 \Rightarrow \frac{L_i}{T} \approx U_0 \Rightarrow T = \frac{L_i}{U_0}$$

$$\text{d'où : } L \approx g \left(\frac{L_i}{U_0} \right)^2$$

donc : $L_i \approx \frac{U_0^2}{g}$ ordre de grandeur de la distance parcourue dans le régime intermédiaire

$$\text{A.N. : } L_i \approx \underline{4,6 \text{ m}}$$

L'approximation de la question 14 est justifiée si $L_i \ll L$, ce qui n'est pas le cas.

$$\text{I.18 On veut : } L_i \ll L \Rightarrow \frac{U_0^2}{g} \ll \frac{U_0^2}{g} \cos \theta_0 \ln \left(\frac{U_0 \sqrt{\sin \theta_0}}{U_0} \right)$$

$$\Rightarrow 1 \ll \cos \theta_0 \ln \left(\frac{U_0 \sqrt{\sin \theta_0}}{U_0} \right)$$

$$\text{soit en pratique : } U_0 \gg U_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_x}} \Rightarrow$$

- grande vitesse initiale
- volant léger
- volant de section importante
- C_x grand

Convergence lente car la fonction $\ln(\)$ varie lentement. (?)

I.19 Lors de la montée, la vitesse U passe de U_0 à la valeur $\frac{U_0}{\sqrt{\sin \theta_0}}$ obtenue en I.12

$$\text{D'après I.8 : } \frac{U_0}{\sqrt{\sin \theta_0}} = \frac{1}{\frac{1}{U_0} + \frac{g}{U_0^2} t_{\text{montée}}} \Rightarrow t_{\text{montée}} = \frac{U_0^2}{g} \left(\frac{\sqrt{\sin \theta_0}}{U_0} - \frac{1}{U_0} \right)$$

$$\text{On a : } y_{\text{max}} \approx L \tan \theta_0 = \frac{U_0^2}{g} \sin \theta_0 \ln \left(\frac{U_0 \sqrt{\sin \theta_0}}{U_0} \right)$$

La descente se fait à la vitesse U_0 constante, donc : $t_{\text{descente}} = \frac{y_{\text{max}}}{U_0}$

$$\Rightarrow t_{\text{descente}} = \frac{U_0 \sin \theta_0}{g} \ln \left(\frac{U_0 \sqrt{\sin \theta_0}}{U_0} \right)$$

$$\text{Durée du régime intermédiaire : } t_i \approx \frac{L_i}{U_0} \Rightarrow t_i = \frac{U_0}{g}$$

Dans l'approximation de la question I.14 : $t_i \ll t_{\text{montée}}$ et $t_i \ll t_{\text{descente}}$

Avec la condition $U_0 \gg U_\infty$ de la question I.18, on a aussi : $t_{\text{descente}} > t_{\text{montée}}$

A. Modification des équations de Maxwell

II.1 On cherche $\vec{E}(M,t)$ sous la forme: $\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

On reporte dans l'équation de propagation: $-k^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} (-\omega^2 \vec{E}) = \mu^2 \vec{E}$

D'où la relation de dispersion: $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu^2$

On retrouve la relation de dispersion du vide si: $\mu = 0$

II.2 $\omega = c \sqrt{k^2 + \mu^2}$ donc: $v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \frac{2k}{2\sqrt{k^2 + \mu^2}}$ soit: $v_g = \frac{ck}{\sqrt{k^2 + \mu^2}}$

On suppose: $\mu \ll k$: $v_g = \frac{c}{(1 + \frac{\mu^2}{k^2})^{1/2}} \approx c(1 - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{k^2})$ d'où: $c - v_g = \frac{c\mu^2}{2k^2}$


II.3 Si \vec{E} est uniforme: $\Delta \vec{E} = \vec{0}$. On a donc: $\frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} + \mu^2 c^2 \vec{E} = \vec{0}$ d'après l'équation (1)

\vec{E} oscille sinusoidalement à la pulsation: $\omega_0 = \mu c$

D'où: $E = h\nu_0 = h \frac{\omega_0}{2\pi}$ soit: $E = h \mu c$ puis: $m = \frac{h\mu}{c}$

B. Mesure astrophysique

II.4 Les deux impulsions de longueurs d'onde différentes vont se propager à des vitesses de groupe différentes si le milieu est dispersif. Les temps de propagation ne seront pas les mêmes. Il y aura un décalage temporel à la réception des signaux.

II.5  Terre

Pour la longueur d'onde λ_1 , le temps de propagation est: $t_1 = L/v_{g1}$
 $t_2 = L/v_{g2}$

A la limite de résolution: $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{L}{v_{g2}} - \frac{L}{v_{g1}} = L \frac{v_{g1} - v_{g2}}{v_{g1} v_{g2}} \approx L \frac{\Delta v}{c^2}$ car $v_g \approx c$

d'où: $\frac{\Delta v}{c} = \frac{c \Delta t}{L}$

II.6 A.N: $\frac{\Delta v}{c} = 10^{-16}$

II.7 On a: $c - v_g = \frac{c\mu^2}{2k^2} = \frac{c\mu^2 \lambda^2}{8\pi^2}$

Donc: $\Delta v = v_{g1} - v_{g2} = \frac{c\mu^2}{8\pi^2} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)$

La condition: $\frac{\Delta v}{c} < 10^{-16}$ donne: $\frac{\mu^2}{8\pi^2} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) < 10^{-16} \Rightarrow \mu < \frac{\sqrt{8\pi} \cdot 10^{-8}}{\sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}}$

A.N: avec: $\lambda_2 = 0,8 \mu\text{m}$ et $\lambda_1 = 0,4 \mu\text{m}$, on a: $\mu < 0,1$

d'où: $m < 4 \cdot 10^{-44} \text{ kg}$

II-8 Le but est de prouver que la masse du photon est nulle, avec la meilleure précision possible. Il faut donc faire décroître la borne supérieure de $\frac{\Delta V}{c}$ puis de μ .

Intérêt des objets astrophysiques: L grand $\rightarrow \Delta V$ petit
Pour faire décroître la borne supérieure sur μ , il faut prendre λ_1 et λ_2 plus grands \rightarrow ondes radio

C. Une expérience d'électrostatique

II-9 En électrostatique l'équation (1) devient: $\Delta \vec{E} = \mu^2 \vec{E}$

On a: $\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \vec{0}$ car $\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$ en électrostatique

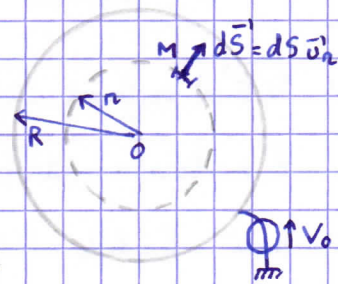
$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad} \rho - \mu^2 \text{grad} V - \Delta \vec{E}$$

Donc: $\frac{1}{\epsilon_0} \text{grad} \rho + \mu^2 \vec{E} - \Delta \vec{E} = \vec{0}$. Il y a compatibilité si: $\boxed{\text{grad} \rho = \vec{0}}$

II-10 Invariance par rotation autour de O: $\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \vec{E}(r)$

Tout plan contenant OM est plan de symétrie des charges: $\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{u}_r$

Théorème de Gauss pour la sphère de rayon $r < R$:



$$\oint_{(S)} \vec{E}(M) d\vec{S}(M) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{car l'intérieur est vide de charges}$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E_r(r) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0}} \quad \text{à l'intérieur de la sphère}$$

$$\Rightarrow \vec{0} = -\text{grad} V \Rightarrow \boxed{V = V_0} \quad \text{à l'intérieur de la sphère}$$

II-11 On a maintenant: $\vec{E} = \vec{E}_1$ petit $V = V_0 + V_1$ avec $V_1 \ll V_0$

Dans la sphère vide ($\rho = 0$): $\text{div} \vec{E} = -\mu^2 V \Rightarrow \underbrace{\text{div} \vec{E}_1}_{\text{petit}} = -\mu^2 (V_0 + V_1) = \underbrace{-\mu^2 V_0}_{\text{petit}} - \underbrace{\mu^2 V_1}_{\text{doublement petit}}$

On peut négliger le terme en $\mu^2 V_1$.

On a donc: $\text{div} \vec{E} \approx -\mu^2 V_0$ ou sous forme intégrale: $\oint_{(S) \text{ fermée}} \vec{E}(M) d\vec{S}(M) = -\mu^2 V_0 \mathcal{V}$ (volume de (S))

On en déduit: $4\pi r^2 E_r(r) = -\mu^2 V_0 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow E_r(r) = -\frac{\mu^2 V_0 r}{3} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\mu^2 \frac{V_0}{3} r \vec{u}_r}$

Puis: $\frac{dV}{dr} = -E_r(r) = \frac{\mu^2 V_0 r}{3} \Rightarrow V = \frac{\mu^2 V_0 r^2}{6} + K$

Pour $r = R$: $V = V_0 \Rightarrow K = V_0 - \frac{\mu^2 V_0 R^2}{6} \Rightarrow \boxed{V(r) = V_0 \left[1 + \frac{\mu^2}{6} (r^2 - R^2) \right]}$

II-12 $V \approx V_0$ si le terme $\frac{\mu^2}{6} (r^2 - R^2)$ est $\ll 1$ d'où la condition: $\boxed{\mu \ll \frac{1}{R}}$

II-13 $V_1 - V_2 = V_0 \frac{\mu^2}{6} (r_1^2 - r_2^2)$

On veut réduire la borne supérieure pour μ . On prend par exemple $\mu \approx 0,01 = 10^{-2}$
On prend: $V_0 \approx 10^3 \text{ V}$; r_1 et $r_2 \approx 10^{-1} \text{ m}$

$\Rightarrow V_1 - V_2 \approx 10^3 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2} = 1 \text{ mV}$ C'est mesurable donc il est possible de réduire la borne supérieure.