

I Impact mécanique de la pluie

I-A chute d'une goutte d'eau

1. a)  $r \sim 1 \text{ mm}$  ;  $v \sim 10 \text{ ms}^{-1}$

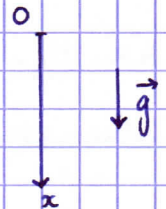
b)  $Re = \frac{\rho_a \cdot v \cdot (2r)}{\eta_a}$  A.N.:  $Re \approx 1 \cdot 10^3$  Ecoulement turbulent

c) Poids:  $m\vec{g} = \rho_e \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 g \vec{e}_x$

Poussée d'Archimède:  $\vec{\Pi} = -\rho_a \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 g \vec{e}_x$

Force de traînée:  $\vec{T} = -\frac{1}{2}\rho_a v^2 \cdot \pi r^2 \cdot C_x \vec{e}_x$

$\rho_a \ll \rho_e \Rightarrow$  on peut négliger la poussée d'Archimède.



d) Loi de la quantité de mouvement, selon Ox, dans R galiléen:

$$m\dot{v} = mg - \frac{1}{2}\rho_a v^2 \pi r^2 C_x \Rightarrow \dot{v} = g - \frac{\frac{1}{2}\rho_a v^2 \pi r^2 C_x}{\rho_e \cdot \frac{4}{3}\pi r^3} = g - \frac{3\rho_a C_x v^2}{8\rho_e r}$$

d'où:  $\frac{\dot{v}}{g} = 1 - \left(\frac{v}{u}\right)^2$  avec:  $u = \sqrt{\frac{8\rho_e g r}{3\rho_a C_x}}$  u: vitesse limite atteinte

2. a) On sépare les variables:  $\frac{dv}{1 - \left(\frac{v}{u}\right)^2} = g dt$

Changement de variable:  $w = \frac{v}{u} \rightarrow dw = \frac{dv}{u}$  donc:  $\frac{dw}{(1-w^2)} = \frac{g}{u} dt$

soit:  $\frac{dw}{(1-w)(1+w)} = \frac{g}{u} dt$

soit:  $\frac{1}{2} \left[ \frac{dw}{1-w} + \frac{dw}{1+w} \right] = \frac{g}{u} dt$

On intègre:  $\frac{1}{2} (\ln(1+w) - \ln(1-w)) = \frac{g}{u} t + K$

A  $t=0$ :  $v=0 \Rightarrow w=0$  on en déduit  $K=0$

D'où:  $\ln\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = \frac{2gt}{u}$  ou  $\frac{1+w}{1-w} = e^{\frac{2gt}{u}}$  d'où:  $w = \frac{e^{\frac{2gt}{u}} - 1}{e^{\frac{2gt}{u}} + 1}$

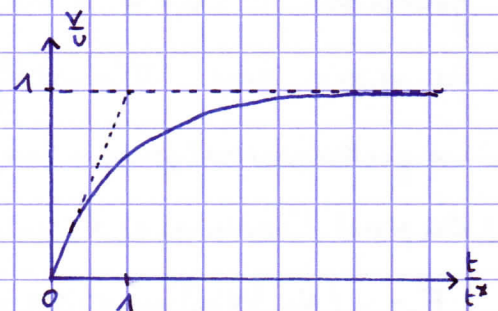
Finalement:  $v = u \tanh\left(\frac{gt}{u}\right)$

b) Temps caractéristique:  $t^* = \frac{u}{g}$

Au bout d'un temps  $t \approx 5t^*$ , la goutte a atteint sa vitesse limite.

c)  $H^* = ut^* = \frac{u^2}{g}$

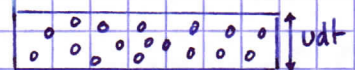
d)  $u^* \approx 7 \text{ ms}^{-1}$   $H^* \approx 6 \text{ m}$



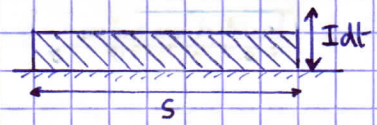


## I-B Effort mécanique

3. a) Pendant  $dt$ , la hauteur d'eau recueillie au sol est  $I dt$ .  
Le volume d'eau sur une surface  $S$  est  $I dt \cdot S$



Cette eau provient des gouttes qui ont traversé une surface  $S$ , à la vitesse  $v$ , pendant  $dt$ . Leur nombre est  $N_0 \cdot S v dt$   
Le volume d'eau est  $N_0 S v dt \cdot \frac{4}{3} \pi r_0^3$

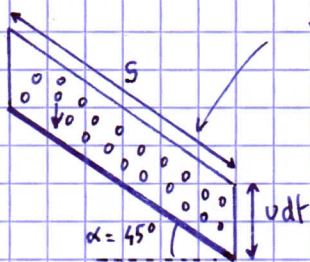


donc:  $I dt \cdot S = N_0 S v dt \cdot \frac{4}{3} \pi r_0^3 \Rightarrow N_0 = \frac{3I}{4\pi v r_0^3}$

b) A.N:  $N_0 = 3 \cdot 10^4 \text{ m}^{-3}$  ( $v = 5 \text{ m s}^{-1}$  pour  $r_0 = 0,5 \text{ mm}$ )

c) volume disponible par goutte:  $\frac{1}{N_0}$  donc:  $d_0^3 \sim \frac{1}{N_0} \Rightarrow d_0 = \frac{1}{N_0^{1/3}}$  A.N:  $d_0 \approx 3 \text{ cm}$

4. a)



volume:  $S \cdot v dt \cdot \cos 45^\circ$

- b) Loi de la quantité de mouvement à une goutte qui heurte le pare-brise:  $\frac{dP}{dt} = \vec{F}_{\text{pare-brise} \rightarrow 1 \text{ goutte}}$

soit:  $\vec{0} - m \vec{v} = \vec{F}_{\text{pare-brise} \rightarrow 1 \text{ goutte}}$  donc:  $\vec{F}_{1 \text{ goutte} \rightarrow \text{pare-brise}} = \frac{m \vec{v}}{dt}$

D'où:  $\vec{F}_0 =$  nombre de gouttes qui heurtent le pare-brise pendant  $dt \times \vec{F}_{1 \text{ goutte} \rightarrow \text{pare-brise}}$

$$= N_0 \cdot (S v dt \cos \alpha) \cdot \frac{m \vec{v}}{dt}$$

$$= N_0 S v \cos \alpha \cdot \frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho_e v \vec{e}_x$$

$$\vec{F}_0 = (N_0 \cdot \frac{4}{3} \pi r_0^3 \cdot \cos \alpha) \cdot S \rho_e v^2 \vec{e}_x$$

On a bien  $F_0 = (k \cos \alpha) \cdot S \rho_e v^2$  avec:  $k = N_0 \frac{4}{3} \pi r_0^3$  sans dimension

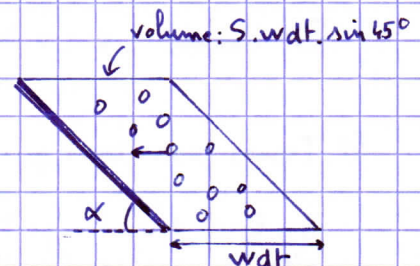
c) A.N:  $F_0 = 0,2 \text{ N}$

5. a)  $w \sim 1000 \text{ km h}^{-1} \approx 300 \text{ m s}^{-1}$

- b) Dans le référentiel  $R'$  lié à l'avion, la vitesse  $\vec{v}'$  des gouttes est:  $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{w} = v \vec{e}_x - w \vec{e}_y$

Or  $w \gg v$ , donc:  $\vec{v}' \approx -w \vec{e}_y$

Les gouttes arrivent presque horizontalement sur le pare-brise



- c) On prend l'expression de  $\vec{F}_0$  en remplaçant:  $v$  par  $w$  et  $\cos \alpha$  par  $\sin \alpha$  (et  $\vec{e}_x$  par  $-\vec{e}_y$ )

$$\vec{F} = - (N_0 \frac{4}{3} \pi r_0^3 \sin \alpha) S \rho_e w^2 \vec{e}_y$$

d) A.N:  $F \approx 600 \text{ N}$



I. c) Distribution du rayon des gouttes6. a) On a la condition de normalisation:  $\int_0^{+\infty} dP(r) = 1$ 

$$\Rightarrow m_0 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r}{\lambda}} dr = N_0$$

$$\Rightarrow m_0 \left[ -\lambda e^{-\frac{r}{\lambda}} \right]_0^{+\infty} = N_0 \quad \text{d'où: } \boxed{N_0 = m_0 \lambda}$$

$$b) P(r \leq \lambda) = \int_0^{\lambda} dP(r) = \frac{m_0}{N_0} \int_0^{\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} dr = \frac{m_0}{N_0} \left[ -\lambda e^{-\frac{r}{\lambda}} \right]_0^{\lambda} = \frac{m_0 \lambda}{N_0} (1 - e^{-1})$$

$\underbrace{\frac{m_0 \lambda}{N_0}}_{=1}$

$$\text{donc: } P(r \leq \lambda) = 1 - \frac{1}{e} \approx 0,6 \quad P(r > \lambda) = 1 - P(r \leq \lambda) = \frac{1}{e} \approx 0,4$$

A peu près 2/3 des gouttes ont un rayon inférieur à  $\lambda$

$$c) \langle r \rangle = \int_0^{+\infty} r dP = \int_0^{+\infty} r \frac{m_0}{N_0} e^{-\frac{r}{\lambda}} dr$$

$$\text{On pose: } x = \frac{r}{\lambda} \Rightarrow \langle r \rangle = \int_0^{+\infty} \lambda \frac{m_0}{N_0} x e^{-x} \lambda dx = \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$$

$= 1! = 1$

$$\text{donc: } \boxed{\langle r \rangle = \lambda}$$

Il y a donc plus de gouttes qui ont un rayon inférieur à la moyenne

7. a)  $dM(r) =$  masse des gouttes de rayon appartenant à  $[r, r+dr]$ 

$$b) \mu(r) = \rho e^{\frac{4}{3}\pi r^3} m_0 e^{-\frac{r}{\lambda}}$$

$$c) \frac{dM}{dr} = \rho e^{\frac{4}{3}\pi r^3} m_0 \left[ 3r^2 - \frac{r^3}{\lambda} \right] e^{-\frac{r}{\lambda}}$$

$$\frac{dM}{dr} = 0 \quad \text{pour } r = 3\lambda$$



Les gouttes dont la contribution à la masse totale est la plus importante ont pour rayon  $r = 3\lambda$

$$d) \langle m \rangle = \int_0^{+\infty} \rho e^{\frac{4}{3}\pi r^3} \lambda P(r) = \rho e^{\frac{4}{3}\pi} \frac{m_0}{N_0} \int_0^{+\infty} r^3 e^{-\frac{r}{\lambda}} dr \quad \text{on pose: } x = \frac{r}{\lambda}$$

$$= \rho e^{\frac{4}{3}\pi} \frac{m_0}{N_0} \lambda^4 \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx$$

$$= \rho e^{\frac{4}{3}\pi} \frac{m_0}{m_0 \lambda} \cdot \lambda^4 \cdot 3!$$

$$\text{d'où: } \boxed{\langle m \rangle = \rho \cdot 8\pi \lambda^3}$$

$$e) \text{ masse d'une goutte de rayon } \langle r \rangle: m_{\langle r \rangle} = \rho e^{\frac{4}{3}\pi} \lambda^3 \langle m \rangle$$

Les gouttes de rayon supérieur à  $\langle r \rangle$  ont donc une contribution importante à la masse totale.

8. a) Par analogie avec  $\vec{F} = -Q N_0 r_0^3 \vec{e}_y$ , la force exercée par les gouttes de rayon appartenant à  $[r, r+dr]$  est:

$$d\vec{F} = -Q dN(r) r^3 \vec{e}_y$$



$$\text{donc: } \vec{F}_D = \int_0^{+\infty} -Q dN(r) r^3 \vec{e}_y = -Q \int_0^{+\infty} m_0 r^3 e^{-\frac{r}{\lambda}} dr \vec{e}_y = -Q \frac{N_0}{\lambda} \int_0^{+\infty} r^3 e^{-\frac{r}{\lambda}} dr \vec{e}_y = -6\lambda^4$$

$$\text{donc: } \boxed{\vec{F}_D = -6Q N_0 \lambda^3 \vec{e}_y}$$

4)  $\varphi = \frac{6Q N_0 \lambda^3}{Q N_0 r_0^3}$  si  $r_0 = \langle r \rangle = \lambda$ , alors:  $\varphi = 6$

c) En tenant compte de la distribution des rayons des gouttes, la force exercée sur le pare-brise est d'environ  $6 \times 600 \approx 4 \cdot 10^3$  N.  
Le pare-brise ayant une surface de  $0,5 \text{ m}^2$ , cela correspond à une pression de  $8 \cdot 10^3$  Pa. C'est faible devant la pression atmosphérique qui règne dans l'habitacle.

9. a)  $m(r) = m_0 e^{-\frac{r}{\lambda}} \Rightarrow \ln m = \ln m_0 - \frac{r}{\lambda} \Rightarrow \ln 10 \cdot \log m = \ln m_0 - \frac{r}{\lambda} \Rightarrow \log m = \frac{\ln m_0}{\ln 10} - \frac{r}{\lambda \ln 10}$

On s'attend à obtenir une droite de pente  $-\frac{1}{\lambda \ln 10}$

C'est vérifié sauf pour les petits rayons de goutte ( $< 1 \text{ mm}$  environ)

b) Le plus faible régime de précipitation correspond aux plus faibles valeurs de  $m \Rightarrow$  courbe e)

On lit:  $m_0 = m(r=0) \approx 5000 \text{ m}^{-3} \text{ mm}^{-1}$  (en prolongeant la droite modélisant la courbe e)'

• pente =  $\frac{\log 0,01 - \log 100}{6 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}} = -1000 \Rightarrow \lambda \approx 0,4 \text{ mm}$

c)  $\langle r \rangle = \lambda = 0,4 \text{ mm}$  ;  $N_0 = m_0 \lambda = 2000 \text{ gouttes} \cdot \text{m}^{-3}$

d) Avec la loi de Marshall-Palmer on surestime le nombre de petites gouttes. Or celles-ci ont une plus faible quantité de mouvement, donc une moindre influence dans la force  $\vec{F}$  exercée sur le pare-brise. C'est donc la force  $\vec{F}$  qui souffre le moins de l'écart de cette loi aux relevés météo.



II Formation des gouttes - Instabilité de Rayleigh - Plateau

II-A Approche statique

10. a)  $E_0 = \gamma \cdot 2\pi R_0 L$  (On néglige les courbures car  $R_0 \ll L$ )

b)  $E_N = N \cdot \gamma \cdot 4\pi r^2$

c) La situation en chapelet est plus favorable si  $E_N < E_0 \Rightarrow N \gamma 2 r^2 < \gamma R_0 L$

Pour éliminer N, on traduit la conservation du volume:  $\pi R_0^2 L = N \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow N = \frac{3 R_0^2 L}{4 r^3}$

Donc:  $\frac{3 R_0^2 L}{4 r^3} \cdot 2 r^2 < R_0 L$  soit:  $r > \frac{3}{2} R_0$

Il est préférable d'avoir peu de gouttes de grand rayon plutôt que beaucoup de gouttes de petit rayon pour minimiser la surface.

11. a) Conservation du volume:  $\pi R_0^2 L = \int_0^L \pi R(x)^2 dx$

$\Rightarrow R_0^2 L = \int_0^L [ \langle R \rangle^2 + 2a \langle R \rangle \sin kx + a^2 \sin^2(kx) ] dx$   $\sin^2(kx) = \frac{1 - \cos 2kx}{2}$

$= \langle R \rangle^2 \cdot L + \frac{2a \langle R \rangle}{k} [-\cos kx]_0^L + \frac{a^2 L}{2} - \frac{a^2}{4k} [\sin 2kx]_0^L$

$= \langle R \rangle^2 \cdot L + \frac{2a \langle R \rangle}{k} (1 - \cos kL) + \frac{a^2 L}{2} - \frac{a^2}{4k} \sin 2kL$

$\Rightarrow R_0^2 = \langle R \rangle^2 + \frac{2a \langle R \rangle}{kL} (1 - \cos kL) + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4kL} \sin 2kL$

$\approx \langle R \rangle^2 + \frac{a^2}{2}$  car  $kL \gg 1$

donc:  $\langle R \rangle^2 = R_0^2 - \frac{a^2}{2} = R_0^2 (1 - \frac{a^2}{2R_0^2})$

$\langle R \rangle = R_0 (1 - \frac{a^2}{2R_0^2})^{1/2}$

Or  $a \ll R_0$  donc on a finalement:  $\langle R \rangle = R_0 (1 - \frac{a^2}{4R_0^2})$

b) La surface élémentaire entre  $x$  et  $x+dx$  est:  $dS = 2\pi R(x) \cdot ds$   
 $= 2\pi R(x) dx \sqrt{1 + (\frac{dR}{dx})^2}$

Donc:  $S_\lambda(a) = \int_0^\lambda dS = 2\pi \int_0^\lambda R(x) \sqrt{1 + (\frac{dR}{dx})^2} dx$

On a:  $\sqrt{1 + (\frac{dR}{dx})^2} = (1 + k^2 a^2 \cos^2(kx))^{1/2} \approx 1 + \frac{k^2 a^2}{2} \cos^2(kx)$

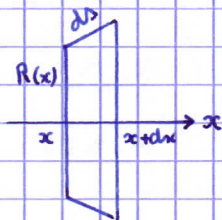
Donc:  $S_\lambda(a) = 2\pi \int_0^\lambda (\langle R \rangle + a \sin kx) (1 + \frac{k^2 a^2}{2} \cos^2(kx)) dx$

$\approx 2\pi \int_0^\lambda [ \langle R \rangle + a \sin kx + \langle R \rangle \frac{k^2 a^2}{2} \cos^2(kx) ] dx$  en négligeant le terme en  $a^3$  car  $a \ll R_0 \ll L$

$= 2\pi [ \int_0^\lambda \langle R \rangle dx + \int_0^\lambda a \sin kx dx + \langle R \rangle \frac{k^2 a^2}{2} \int_0^\lambda \frac{1 + \cos(2kx)}{2} dx ]$

$= 2\pi [ \lambda \langle R \rangle + \frac{a}{k} [-\cos kx]_0^\lambda + \langle R \rangle \frac{k^2 a^2}{4} \lambda + \langle R \rangle \frac{k^2 a^2}{8k} [\sin 2kx]_0^\lambda ]$

$= 0$  car  $k\lambda = 2\pi$





donc:  $S_\lambda(a) = 2\pi\lambda \langle R \rangle \left[ 1 + \frac{h^2 a^2}{4} \right]$   
 $= 2\pi\lambda R_0 \left( 1 - \frac{a^2}{4R_0^2} \right) \left( 1 + \frac{h^2 a^2}{4} \right)$   
 $= S_\lambda''(0) \left[ 1 + \frac{h^2 a^2}{4} - \frac{a^2}{4R_0^2} - \frac{h^2 a^4}{16R_0^2} \right]$  négligeable car terme en  $a^4$

On a bien:  $S_\lambda(a) = S_\lambda(0) \left[ 1 + \frac{a^2}{4R_0^2} (h^2 R_0^2 - 1) \right]$

c) Instabilité si  $S_\lambda(a) < S_\lambda(0) \Rightarrow 1 + \frac{a^2}{4R_0^2} (h^2 R_0^2 - 1) < 1$   
 $\Rightarrow h^2 R_0^2 - 1 < 0$   
 $\Rightarrow R_0 < \frac{1}{h} = \frac{\lambda}{2\pi}$

L'instabilité apparaît quand le rayon du cylindre devient trop petit

## II. B Approche dynamique

12. a)  $\underline{\omega}$  réel si  $(hR_0)^2 - 1 > 0 \Rightarrow \frac{2\pi R_0}{\lambda} > 1$  donc  $\underline{\lambda} < 2\pi R_0$

$\underline{\omega}$  imaginaire si  $(hR_0)^2 - 1 < 0$  donc  $\underline{\lambda} > 2\pi R_0$

b) Si  $\underline{\omega}$  est réel:  $e^{j(\omega t - hx)}$  donne en notation réelle un  $\cos(\omega t - hx)$   
 on a une oscillation sinusoïdale du rayon du filet d'eau

Si  $\underline{\omega}$  est imaginaire:  $\underline{\omega} = j\omega$

on a alors  $e^{j(\omega t - hx)} = e^{j(j\omega t - hx)} = e^{-\omega t} e^{-jhx}$

Si  $\omega > 0$ :  $e^{-\omega t} \rightarrow 0$  quand  $t$  croît  
 Si  $\omega < 0$ :  $e^{-\omega t} \rightarrow +\infty$  quand  $t$  croît

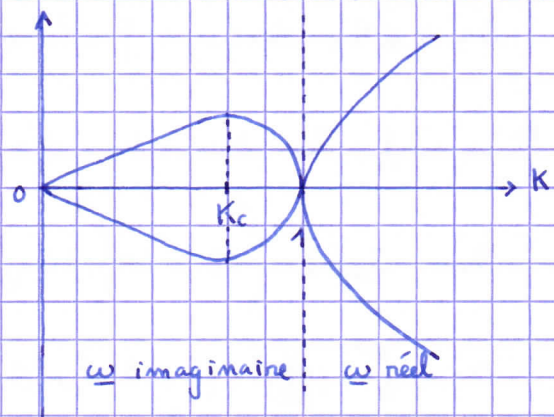
le rayon tend vers  $\langle R \rangle$   
 il y a instabilité du filet d'eau et celui-ci se sépare en gouttelettes.

13. a) En posant  $K = hR_0$ , on a:

$\underline{\omega}^2 = \Omega_0^2 K^2 (K^2 - 1)$

Si  $K > 1$ :  $\underline{\omega} = \pm \Omega_0 K \sqrt{K^2 - 1} = \Omega_0 g_\pm(K)$

Si  $K < 1$ :  $\underline{\omega} = \pm j \Omega_0 K \sqrt{1 - K^2} = j \Omega_0 f_\pm(K)$



b) L'instabilité se développe si  $K < 1$ . Elle se développera le plus rapidement quand  $|\underline{\omega}|$  sera maximal.

On lit sur la courbe:  $K_c \approx 0,7$ . Puis  $|f_\pm(K_c)| \approx 0,5$ , donc  $|\underline{\omega}|_c \approx 0,5 \Omega_0$

Où le temps caractéristique:  $\tau_c = \frac{1}{|\underline{\omega}|_c}$  soit:  $\tau_c \approx 2 \sqrt{\frac{2\pi R_0^3}{g}}$



c) moteurs: tension superficielle  
frein: gravité

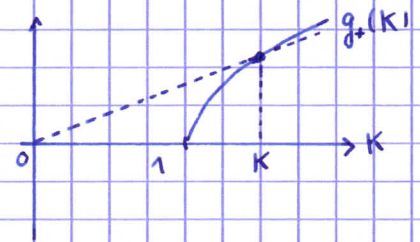
d) A.N:  $\tau_c = 10^{-2} \text{ s}$  ;  $\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2\pi R_0}{K_c}$  A.N:  $\lambda_c \approx 9 \text{ mm}$

e) Le cas d'une onde progressive correspond à  $K > 1$ .

La vitesse de phase est:  $v_{cp} = \frac{\omega}{k}$  avec:  $\omega = \underline{\omega} = \Omega_0 g_{\pm}(K)$  et  $k = \frac{K}{R_0}$

donc:  $v_{cp} = \Omega_0 R_0 \frac{g_{\pm}(K)}{K}$

On lit sur le graphique la valeur de  $\frac{g_{\pm}(K)}{K}$  grâce à la pente de la droite passant par l'origine et par le point de coordonnées  $(K, g_{\pm}(K))$  (droite représentée en pointillés)



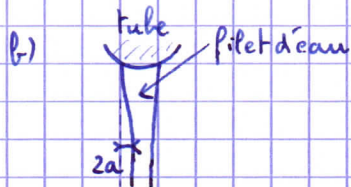
On multiplie ensuite cette pente par  $\Omega_0 R_0$  et on a  $v_{cp}$ .

Si  $K^2 \gg 1$ :  $g_{\pm}(K) \approx \pm K^2$  donc:  $\frac{g_{\pm}(K)}{K} \approx \pm K$  donc:  $v_{cp} \approx \pm \Omega_0 R_0 K$

Or:  $K = k R_0$  d'où:  $v_{cp} \approx \pm \Omega_0 R_0^2 k$

## II-C Instabilité d'un filet d'eau en chute libre

14. a) Débit volumique:  $Q = \rho_e \pi R_0^2 U_0 \Rightarrow U_0 = \frac{Q}{\rho_e \pi R_0^2}$  A.N:  $U_0 = 0,6 \text{ m s}^{-1}$



Sur la gauche de la photo 5.a), à environ 1 cm en dessous du tube, on observe un rétrécissement du filet d'eau de  $2a \approx 1 \text{ mm}$ .

Donc:  $a \approx 0,5 \text{ mm}$

15. a) Régime ondulatoire  $\Rightarrow K > 1 \Rightarrow \underline{\omega}$  réelle

b)  $\vec{v}_{\text{onde}/\text{labo}} = \vec{v}_{\text{onde}/\text{eau}} + \vec{v}_{\text{eau}/\text{labo}}$   
 $\vec{0} = \vec{v}_{cp} + \vec{U}_0 \Rightarrow \vec{v}_{cp} = -\vec{U}_0$

$\Rightarrow v_{cp} = U_0$  en norme

c) Approximativement:  $\lambda \approx 1 \text{ mm} \Rightarrow k R_0 \approx 6$

d) On a  $(k R_0)^2 \approx 36 \gg 1$  donc d'après la question 13.e):  $v_{cp} \approx \Omega_0 R_0^2 k = \Omega_0 R_0^2 \frac{2\pi}{\lambda}$

A.N:  $v_{cp} \approx 1 \text{ m s}^{-1}$  C'est comparable à la valeur de  $U_0$  déjà calculée.

e) Le filet d'eau est plus court donc l'hypothèse  $L \gg \lambda$  sera moins bien vérifiée.

f) La viscosité du fluide pourrait expliquer l'atténuation.