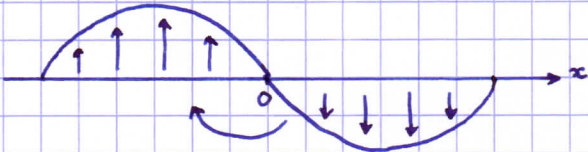


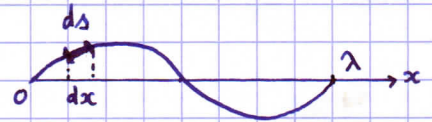
I Cadre de l'étude

1. Faibles déformations si: $a \ll \lambda$ soit: $ka \ll 1$
2. D'après la théorie de l'analyse de Fourier, une déformation quelconque peut être décomposée en une somme de déformations sinusoïdales. Il n'est donc pas restrictif de se limiter à une déformation sinusoïdale.

3.  La frontière de D n'est pas traversée par un flux de fluide, donc il s'agit d'un système fermé.

II Energie de surface

4. $E_s = \gamma (S_{\text{déformée}} - S_{\text{interface plane}})$
 $= \gamma \left[\int_0^\lambda \int_0^L ds dy - \int_0^\lambda \int_0^L dx dy \right]$



donc: $E_s = \gamma L \left[\int_0^\lambda \sqrt{1 + u'(x)^2} dx - \lambda \right]$

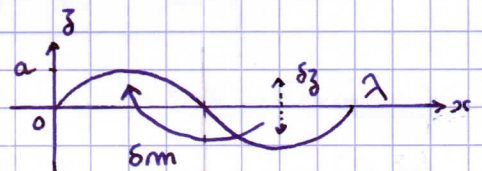
5. Pour de faibles déformations: $\sqrt{1 + u'(x)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} u'(x)^2 = 1 + \frac{1}{2} a^2 k^2 \cos^2(kx)$

Donc: $E_s = \gamma L \left[\int_0^\lambda \left(1 + \frac{1}{2} a^2 k^2 \cos^2(kx) \right) dx - \lambda \right]$
 $= \frac{1}{2} \gamma L a^2 k^2 \int_0^\lambda \frac{1 + \cos(2kx)}{2} dx$
 $= \frac{1}{2} \gamma L a^2 k^2 \left[\frac{\lambda}{2} + \underbrace{\left[\frac{\sin(2kx)}{4k} \right]_0^\lambda}_{=0} \right]$
 $= \frac{1}{4} \gamma L a^2 k^2 \cdot \lambda$ avec: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

D'où: $E_s = \frac{\pi}{2} \gamma L a^2 k$ En mettant le préfacteur: $E_s \sim \gamma L a^2 k$

III Energie de pesanteur

6. $S_m = \rho \delta V$ avec $\delta V =$ volume en - à droite
 $=$ volume en + à gauche
 $\sim \lambda \cdot L \cdot a$



donc: $S_m \sim \rho \lambda L a \sim \rho \frac{L a}{k}$

7. $\delta z \sim a$

8. $E_g = S_m g \delta z$ soit: $E_g = \rho \frac{L a^2}{k} g$

IV Analyse de stabilité de l'interface sans champ magnétique

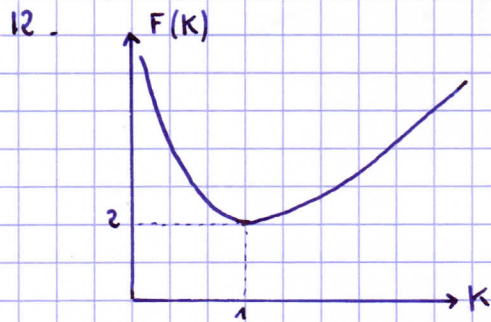
9. $E_p = E_s + E_g$ donne bien: $E_p = L \left(\delta k + \frac{\rho g}{k} \right) a^2$

10. $[p] = ML^{-3}$ $[g] = LT^{-2}$ $[\delta] = MT^{-2}$
 $l = p^\alpha \cdot g^\beta \cdot \delta^\delta \Rightarrow M^\alpha \cdot L^{-3\alpha} \cdot L^\beta \cdot T^{-2\beta} \cdot M^\delta \cdot T^{-2\delta} = L$
 $\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \delta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ \beta - 3\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \delta = \frac{1}{2} \quad \alpha = \beta = -\frac{1}{2}$

donc: $l = \sqrt{\frac{\delta}{\rho g}}$

11. $E_p = L a^2 \left(\delta \frac{k}{l} + \frac{\rho g}{k} l \right) = L a^2 \rho g \left(\frac{\delta}{\rho g} \frac{k}{l} + \frac{l}{k} \right) = L a^2 \rho g l \left(k + \frac{1}{k} \right)$

donc: $E_p = E^* F(k)$ avec: $E^* = \rho g L a^2 l = \sqrt{\delta \rho g} L a^2$ et $F(k) = k + \frac{1}{k}$



13. Ce graphe montre que $E_p > 0$

L'interface déformée a une énergie potentielle supérieure à celle de l'interface plane qui a une énergie potentielle nulle.

L'interface plane est stable car c'est l'état d'énergie potentielle minimale.

14. Par conservation du débit volumique pour cet écoulement incompressible dans un tube de courant de section $\sim \lambda L$, on en déduit que la vitesse caractéristique horizontale est la même que la vitesse caractéristique verticale:

$V_{xc}^* \sim \dot{a}$

15. masse de fluide en mouvement $\sim \rho \lambda^2 L$ donc: $E_{cv} \sim \rho \lambda^2 L \dot{a}^2 \sim \rho \frac{L}{k^2} \dot{a}^2$

16. De même: $E_{ch} \sim E_{cv} \sim \rho \frac{L}{k^2} \dot{a}^2$

17. Conservation de l'énergie mécanique: $E_m = E_c + E_p \sim \rho \frac{L}{k^2} \dot{a}^2 + \sqrt{\delta \rho g} L a^2 F(k) = \text{cte}$

On dérive par rapport au temps: $2 \dot{a} \ddot{a} \rho \frac{L}{k^2} + 2 a \dot{a} \sqrt{\delta \rho g} L F(k) = 0$

On $k = \frac{k}{l} \Rightarrow \ddot{a} \rho \frac{l^2}{k^2} + \sqrt{\delta \rho g} a F(k) = 0$
 $\Rightarrow \ddot{a} + a k^2 F(k) \sqrt{\delta \rho g} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{l^2} = 0$

On: $\frac{1}{l^2} = \frac{\rho g}{\delta} \Rightarrow \ddot{a} + a k^2 F(k) \sqrt{\delta \rho g} \cdot \frac{g}{\delta} = 0$

$\Rightarrow \ddot{a} + a k^2 F(k) \omega^{*2} = 0$ avec: $\omega^{*2} = \frac{\rho g}{\delta} \cdot g$

18. On reporte $a = a_0 e^{i\omega t}$ dans l'équation précédente: $-\omega^2 a_0 + a_0 k^2 F(k) \omega^{*2} = 0$

D'où: $\omega = \omega^* k \sqrt{F(k)}$

19. ω est réelle \Rightarrow oscillations non amorties de la surface libre.
C'est normal car on a négligé les frottements, c'est à dire la viscosité du fluide.

Ⓟ Influence d'un champ magnétique

20. e_B en $J \cdot m^{-2}$; $\frac{B^2}{\mu_0}$ en $J \cdot m^{-3}$ car, à $\frac{1}{2}$ près, c'est la densité volumique d'énergie magnétique
 $a^2 k$ en m $\Rightarrow \alpha$ est sans dimension

21. Les énergies sont en général des grandeurs quadratiques, d'où le terme en a^2

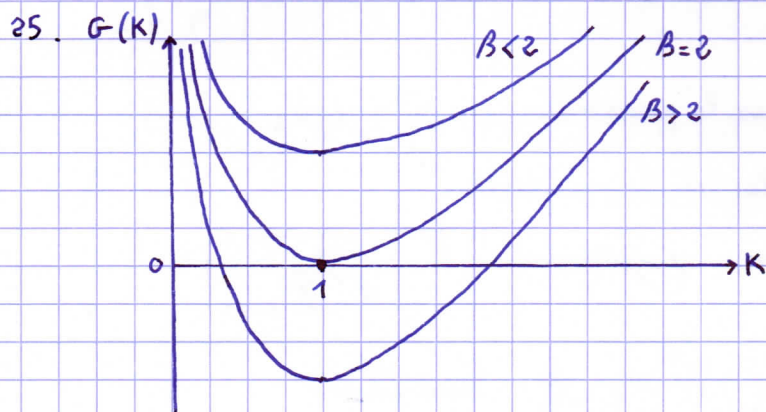
22. $E_p' \sim E_g + E_B$ avec $E_B \sim e_B \cdot \underbrace{\lambda L}_{\text{surface}} = -\alpha \frac{B^2}{\mu_0} a^2 \underbrace{k \lambda}_{\sim 1} L \sim -w_B a^2 L$

donc: $E_p' \sim L \left(\frac{\rho g}{k} + \frac{\rho g}{k} \right) a^2 - w_B a^2 L = E^* F(k) - w_B a^2 L$

23. $E_p' = E^* \left(F(k) - \frac{w_B a^2 L}{E^*} \right) = E^* \left(F(k) - \frac{w_B a^2 L}{\sqrt{\rho g} L a^2} \right) = E^* \left(k + \frac{1}{k} - \frac{w_B}{\sqrt{\rho g}} \right)$

donc: $E_p' = E^* G(k)$ avec: $G(k) = k + \frac{1}{k} - \beta$ avec: $\beta = \frac{w_B}{\sqrt{\rho g}}$

24. $\beta = \frac{\text{énergie magnétique}}{E^*}$ β permet de mesurer l'importance des effet magnétiques



26. Pour $\beta > \beta_c = 2$, $G(k)$ devient < 0
Cela signifie que l'énergie potentielle de l'interface déformée est inférieure à celle (nulle) de l'interface plane.

Donc pour $\beta > \beta_c = 2$ l'interface plane devient instable

27. L'instabilité apparaît pour $\beta = \beta_c = 2$ et $G(k) = 0$ - D'où: $k_c = 1$

28. $E_m' \sim \rho \frac{L}{k^2} \dot{a}^2 + E^* G(k) = \rho \frac{L}{k^2} \dot{a}^2 + \sqrt{\rho g} L a^2 G(k)$

$E_m' = \text{cte} \Rightarrow \dot{a}^2 + \frac{k^2}{\rho L} \sqrt{\rho g} L a^2 G(k) = \text{cte}$

$\Rightarrow \dot{a}^2 + \frac{k^2}{\rho L^2} \sqrt{\rho g} a^2 G(k) = \text{cte}$

ou: $\frac{1}{\rho L^2} = \frac{g}{\delta}$

$\Rightarrow \dot{a}^2 + g \frac{\sqrt{eg}}{\delta} k^2 G(k) a^2 = \text{cte}$

$\Rightarrow \dot{a}^2 + \omega^{*2} k^2 G(k) a^2 = \text{cte}$

29. En dérivant cette relation par rapport au temps: $\ddot{a} + K^2 \omega^{*2} G(K) a = 0$

En réinjectant $a = a_0 e^{i\omega t}$ on en déduit: $\omega^2 = \omega^{*2} K^2 G(K)$

30. $\beta < \beta_c$: $G(K) > 0 \Rightarrow \omega^2 > 0 \Rightarrow \omega$ réel oscillations sinusoidales de la surface autour de l'état stable $z=0$

$\beta > \beta_c$: $G(K) < 0$ pour certaines valeurs de $K \Rightarrow \omega^2 < 0 \Rightarrow \omega$ imaginaire pur il pourra y avoir amplification des oscillations jusqu'à atteindre un état d'équilibre stable comme celui de la figure 1

31. $\tau_c \rightarrow +\infty$ si $\beta \rightarrow \beta_c$: la croissance des oscillations est très lente si on est juste au dessus du seuil d'apparition de l'instabilité

32. On est à la limite d'apparition des pics $\Rightarrow \beta = \beta_c \Rightarrow K_c = 1 \Rightarrow k_c \cdot l = 1 \Rightarrow \frac{l}{\lambda_c} \sim 1$

Donc: $d_c = \lambda_c \sim l$

33. $l \sim 3 \text{ mm}$

34. Sur la figure 1, la distance d_c entre deux pics est de l'ordre de 2 à 3 mm. On a donc bien $d_c \sim l$.

35. Le terme $\omega^{*2} \left[G(K) - \frac{Aa^2 K^3}{2l^2} + \frac{Ba^4 K^5}{3l^4} \right] K^2 a^2$ est un terme d'énergie potentielle.

Pour trouver a_{eq} on dérive ce terme par rapport à a et on cherche l'annulation de cette dérivée.

Dans la limite $\beta \rightarrow \beta_c^+ = 2$: $G(K) = 0$ et $K = 1$. On dérive donc: $E = \omega^{*2} \left[-\frac{A}{2l^2} + \frac{Ba^2}{3l^4} \right] a^4$

$$\frac{dE}{da} = 4a^3 \omega^{*2} \left[-\frac{A}{2l^2} + \frac{Ba^2}{3l^4} \right] + \omega^{*2} a^4 \frac{2Ba}{3l^4}$$

$$\frac{dE}{da} = 0 \Rightarrow 2 \left[-\frac{A}{2l^2} + \frac{Ba^2}{3l^4} \right] + \frac{Ba^2}{3l^4} = 0 \Rightarrow -A + \frac{2}{3} B \theta^2 + \frac{1}{3} B \theta^2 \Rightarrow \theta_{eq} = \sqrt{\frac{A}{B}}$$

36. La force volumique $-f \vec{u}_z$ va augmenter le poids volumique $\vec{p} = -\rho g \vec{u}_z$

\rightarrow on remplace ρg par $\rho g + f$ dans les calculs précédents.

On avait $K=1 \Rightarrow k_c \sim \frac{1}{l} = \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}}$. On a maintenant: $k'_c = \sqrt{\frac{\rho g + f}{\gamma}}$

37. On lit: $d'_c \sim 1 \text{ mm} \Rightarrow \lambda'_c \sim \frac{1}{k'_c} \sim 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow \frac{l}{k'_c} \sim 10^3 \text{ m}$

38. $k'_c{}^2 = \frac{\rho g + f}{\gamma} = \frac{\rho g}{\gamma} \left(1 + \frac{f}{\rho g} \right) = \frac{1}{l^2} (1 + \varphi)$

$$\Rightarrow \varphi = (k'_c l)^2 - 1$$

A.N: $\varphi \sim (10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3})^2 - 1$ soit $\varphi \sim 8$