Un biberon est dans un four à micro-ondes qui fournit une puissance volumique $\wp_v$ au lait. Le lait occupe un cylindre de rayon r_1. La paroi de verre est de rayon extérieur r_2. On note $e = r_2 - r_1$ et on suppose $e \ll r_1$. On note λ_v et λ_l les conductivités thermiques du verre et du lait. On souhaite maintenir le biberon tiède, en attendant le réveil de bébé ! Le four fonctionne donc à puissance faible et on suppose que l'on a atteint un régime de fonctionnement stationnaire de l'ensemble.
1°) Etablir les équations thermiques dans chaque partie, en expliquant les approximations éventuelles (pb quasi 1D dans le verre).
2°) Etablir les lois de température dans chaque partie, sachant que $T(r_2) = T_{ext}$.

1°) Notons T_{lv} la température à l'interface lait-verre.
<u>Dans le verre :</u>
L'épaisseur de la paroi de verre étant supposée très fine devant le rayon intérieur de la paroi, toutes les surfaces cylindriques traversées, dans le verre, par le flux thermique, seront quasiment les mêmes. Or, en régime stationnaire, et en l'absence de terme de création, le flux thermique se conserve tout au long de son cheminement.
$\phi_{cd} = Cte\ \forall r \implies j_{cd} S = Cte\ \forall r$. Or $S = Cte$ donc $j_{cd} = Cte\ \forall r$, c'est-à-dire $-\lambda_v \frac{dT_v}{dr} = Cte$.

<u>Dans le lait :</u>
Pb 2D à symétrie cylindrique, avec terme de création. Avec la démarche du cours, on obtient :
$\frac{-\lambda_l}{r} \frac{d}{dr}\left(r \frac{dT_l}{dr}\right) = \wp_v$.

2°)
<u>Dans le verre :</u>
On se retrouve ainsi dans un pb 1D : $T_v(r) = \alpha r + \beta$. Et en utilisant les conditions aux limites :
$T_v(r) = \frac{T_{ext} - T_{lv}}{e}(r - r_2) + T_{ext}$.

<u>Dans le lait :</u>
$\frac{d}{dr}\left(r \frac{dT_l}{dr}\right) = -\frac{r\wp_v}{\lambda_l}$, puis $r \frac{dT_l}{dr} = -\frac{r^2}{2\lambda_l}\wp_v + K_1$, mais en se plaçant en $r = 0$, on obtient $K_1 = 0$.
Puis $\frac{dT_l}{dr} = -\frac{r}{2\lambda_l}\wp_v$, qui conduit à $T_l(r) = -\frac{r^2}{4\lambda_l}\wp_v + K_2$.
La condition aux limites en $r = r_1$ s'écrit $T_{lv} = -\frac{r_1^2}{4\lambda_l}\wp_v + K_2$, ce qui donne K_2,
puis $T_l(r) = -\frac{(r^2 - r_1^2)}{4\lambda_l}\wp_v + T_{lv}$.

La continuité du flux thermique à l'interface lait/verre s'écrit : $-\lambda_l \frac{dT_l}{dr}(r_1) = -\lambda_v \frac{dT_v}{dr}(r_1)$, d'où
$\frac{r_1}{2}\wp_v = \lambda_v \frac{T_{lv} - T_{ext}}{e}$, d'où $T_{lv} = T_{ext} + \frac{e\, r_1}{2\lambda_v}\wp_v$.

En définitive, $\boxed{T_v(r) = -\frac{r_1}{2\lambda_v}\wp_v(r - r_2) + T_{ext}}$ et $\boxed{T_l(r) = -\frac{(r^2 - r_1^2)}{4\lambda_l}\wp_v + T_{ext} + \frac{e\, r_1}{2\lambda_v}\wp_v}$