

# PHYSIQUE & CHIMIE en 2<sup>ème</sup> année PSI

## TD, AD et Formulaires

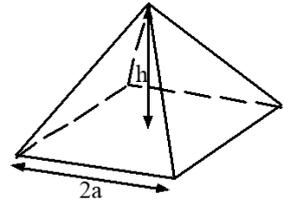
| <u>Page</u> | <u>Thème</u>   |
|-------------|--|
| 2           | 1.Calculs d'intégrales                                     |
| 3           | 2.Electronique (systèmes linéaires)                        |
| 6           | 3.Electronique (oscillateurs)                              |
| 7           | 4.Electronique (modulation)                                |
| 8           | 5.Electronique numérique                                   |
| 9           | 6.Révisions Thermodynamique                                |
| 10          | 7.Thermochimie   |
| 12          | 8.Statique des fluides                                     |
| 12          | 9.Champ des vitesses ; débits                              |
| 13          | 10.Ecoulements parfaits                                    |
| 15          | 11.Viscosité   |
| 16          | 12.Ecoulements dans des conduites                          |
| 17          | 13.Ecoulements externes                                    |
| 18          | 14.Equilibres chimiques                                    |
| 19          | 15.Electrostatique   |
| 20          | 16.Diagrammes potentiel-pH                                 |
| 21          | 17.Ondes 1D dans un milieu non dispersif                   |
| 23          | 18.Diagrammes binaires                                     |
| 26          | 19.Magnétostatique   |
| 27          | 20.ARQS  |
| 27          | 21.Ferromagnétisme   |
| 28          | 22.Courbes courant-potentiel                               |
| 30          | 23.Diffusion de particules                                 |
| 31          | 24.Diffusion thermique                                     |
| 32          | 25.Puissance électrique                                    |
| 33          | 26.Transformateurs   |
| 35          | 27.Machines synchrones ,puis 28 Machines à courant continu |
| 37          | 29.Electronique de puissance                               |
| 38          | 30.Ondes sonores dans les fluides                          |
| 39          | 31.Ondes électromagnétiques                                |
| 40          | 32.Dispersion et absorption                                |
| 40          | 33.Plasmas   |
| 43          | 34.Accumulateurs et piles                                  |
| 47          | 35.Cristallographie et atomistique                         |
| 48          | Statique des fluides (MF0)                                 |
| 58          | Formulaire de maths  |
| 60          | Notation complexe en électricité                           |
| 61          | Les différents systèmes de coordonnées                     |
| 65          | Opérateurs de dérivation spatiale                          |

# 1 Calculs d'intégrales

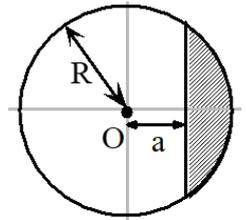
On rappelle que la mesure d'une surface est  $S = \iint_D dS$  où  $D$  est le domaine d'intégration correspondant à l'étendue de la surface et  $dS$  un élément de surface découpé dans  $S$  autour de chaque point  $P$  ( $dS$  est contenu dans le plan tangent en  $P$  à  $S$ ). La mesure d'un volume est  $V = \iiint_D d\tau$  où  $D$  est le domaine d'intégration correspondant à l'étendue du volume.

- 1 Calculer la surface totale des 4 pentes d'une pyramide à section carrée (d'arête  $2a$  au sol) et de hauteur  $h$ . Calculer ensuite le volume intérieur de cette pyramide.

Rép :  $S = 4a\sqrt{h^2+a^2}$      $V = \frac{4}{3}ha^2$



- 2 Calculer la mesure de la surface hachurée sur le dessin ci-contre en fonction de  $a$  et  $R$ .



- 3 Calculer la surface latérale d'un cône circulaire de hauteur  $h$  et dont la base a un rayon  $R$ . Il sera utile ici de travailler en coordonnées sphériques.

En déduire la surface de tissu à utiliser pour fabriquer un manteau de caniche (et oui, çà existe) dont la forme sera modélisée par un cône tronquée de hauteur  $a$  et dont l'une des bases a un rayon  $R_1$  et l'autre un rayon  $R_2$ .

Calculer ensuite le volume intérieur du manteau.

- 4 Soit un fil de section négligeable, de longueur  $2\ell$ , de densité de charges linéique  $\lambda$  non uniforme vérifiant l'expression suivante :  $\lambda(x) = \frac{3}{a} x^2$  avec  $0 \leq x \leq 2\ell$

Préciser la dimension de  $a$  puis exprimer la charge totale du fil en fonction de  $L$  et  $a$ .

- 5 Soit un verre cylindrique circulaire de rayon  $R$  et de hauteur  $h$ . On le place sur une terrasse un jour où il neige. La neige y pénètre et se tasse de plus en plus à mesure qu'elle s'accumule. Ainsi, la densité de la neige dans le verre n'est pas uniforme et on considérera que la masse volumique suit une loi linéaire de la forme  $\rho = \alpha z + \beta$ , avec  $\rho = \rho_1$  en bas du verre (où  $z = 0$ ) et  $\rho = \rho_2$  en haut du verre (où  $z = h$ ). Calculer la masse totale de la neige contenue dans le verre.

Reprendre l'exercice dans le cas où le récipient n'est plus un cylindre mais une sphère de rayon  $R$ .

- 6 Soit un cylindre de rayon  $R$  et de hauteur  $h$  portant des charges réparties en volume, de densité volumique exprimée en coordonnées cylindriques :  $\rho = A r^2 z \cos\theta$ . Déterminer la charge totale du cylindre  $Q$ .

- 7 On considère un disque plein de rayon  $R$ , de centre  $O$ , dont on veut déterminer la charge totale  $Q$ . Ce disque est caractérisé par une densité surfacique de charges  $\sigma(r, \theta)$ . Déterminer  $Q$  dans chacun des 3 cas suivants :

1)  $\sigma(r, \theta) = \frac{A}{\sqrt{R^2 - r^2}}$                       2)  $\sigma(r, \theta) = 3 a r^2 \sin^2\theta$

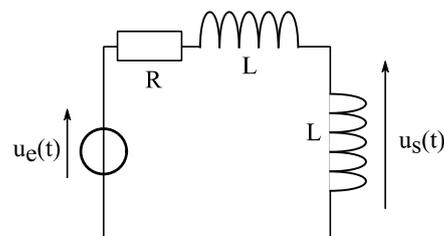
- 8 On considère une sphère pleine de rayon  $R$ , de centre  $O$ , dont on veut déterminer la charge totale  $Q$ . Cette sphère est caractérisée par une densité volumique de charges  $\rho(r, \theta, \varphi)$ .

Déterminer  $Q$  sachant que  $\rho(r, \theta, \varphi) = \rho_0 \frac{r^2}{R^2} \sin\theta \sin^3\frac{\varphi}{3}$  .

## 2 Electronique (systèmes linéaires)

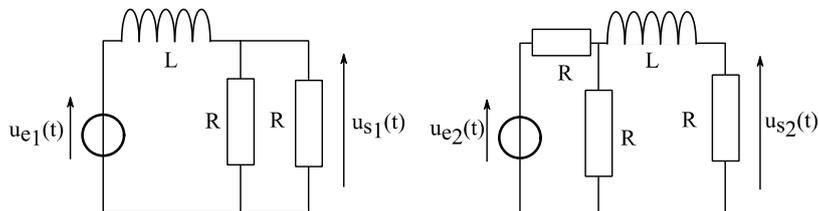
**1** On s'intéresse au montage ci-contre.

- 1°) Etablir l'expression de la fonction de transfert en régime harmonique (notation complexe :  $\underline{H}(j\omega) = \underline{u}_s/\underline{u}_e$ ), puis en « notation opérationnelle » :  $H(p)$ .
- 2°) Quel type de filtre est-ce ? Le retrouver en étudiant les comportements très haute et très basse fréquence du montage.
- 3°) Déterminer l'équation différentielle liant  $u_s(t)$  à  $u_e(t)$ , à l'aide de deux méthodes différentes.



**2** On s'intéresse aux montages ci-contre.

- 1°) Etablir les fonctions de transfert complexes en régime harmonique.
- 2°) Vérifier les comportements en très haute et très basse fréquence des montages.
- 3°) Déterminer les équations différentielles liant les tensions d'entrée et de sortie.



**3** On considère le signal :  $e(t) = 2 \cos\left(20\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \sin^2(20\pi t)$ . Donner sa représentation spectrale (amplitude et phase) en échelle linéaire.

**4** On considère les fonctions de transfert (ou transmittances), dont les expressions en notation opérationnelle, ou en notation complexe sont les suivantes :

$$H_1(p) = \frac{3p}{2-5p}; H_2(p) = \frac{1-2p}{1+3p}; H_3(p) = \frac{-2p}{p^2+2+5p}; H_4(p) = \frac{1-3p}{2+p^2-5p}; H_5(j\omega) = \frac{2-3j\omega}{3+2\omega^2+5j\omega}$$

- 1°) Déterminer si les systèmes associés sont stables ou pas.
- 2°) Dans le 1<sup>er</sup> et le 3<sup>ème</sup> cas, quelles sont les expressions des fonctions de transfert en régime harmonique de pulsation  $\omega$  ?
- 3°) Dans le 1<sup>er</sup> et le 2<sup>ème</sup> cas, quelles sont les sorties  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  associées à l'entrée  $e(t) = E_0 \cos(10\pi t + \varphi_e)$  ?

**5** On considère le signal suivant :  $e(t) = -2 + 3 \cos(20\pi t + \pi/2) + \sin(2,0 \cdot 10^4 \pi t - \pi)$ .

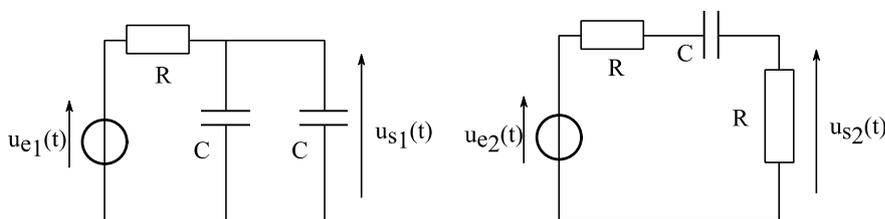
- 1°) Donner sa représentation spectrale (amplitude et phase) en échelle linéaire.
- 2°) On considère la fonction de transfert  $H(p) = \frac{2}{1 + \frac{0,05p}{\pi}}$ . Quels sont ses diagrammes de Bode asymptotiques ?
- 3°) Représenter le module et l'argument de sa fonction de transfert en régime harmonique en fonction de la fréquence, en échelle linéaire.
- 4°) En déduire la représentation spectrale de la sortie, en échelle linéaire, lorsque le signal d'entrée est  $e(t)$ . Quelle serait l'allure des signaux temporels  $e(t)$  et  $s(t)$  ?

**6** On considère le signal suivant :  $e(t) = 2 + 3 \cos(2\pi t + \pi/2) - 0,2 \sin(2,0 \cdot 10^5 \pi t + \pi)$ .

- 1°) Donner sa représentation spectrale (amplitude et phase).
- 2°) On considère la fonction de transfert est  $H(p) = \frac{5p}{\pi \cdot 10^4 + 5p}$ . Quels sont ses diagrammes de Bode asymptotiques ?
- 3°) Représenter le module et l'argument de sa fonction de transfert en régime harmonique en fonction de la fréquence, en échelle linéaire.
- 4°) En déduire la représentation spectrale en amplitude de la sortie  $s(t)$  lorsque le signal d'entrée est  $e(t)$ .
- 5°) Quelles sont les allures des signaux temporels  $e(t)$  et  $s(t)$  ?

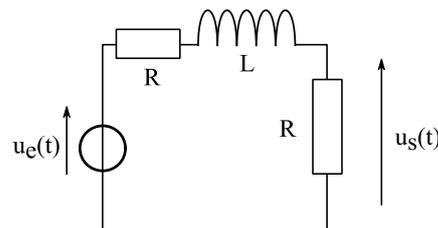
**7** On considère les montages ci-contre.

- 1°) Déterminer les fonctions de transfert (ou transmittances) complexes en régime harmonique  $H_1(j\omega)$  et  $H_2(j\omega)$ .
- 2°) Dans les deux cas, que vaut la sortie, si l'entrée est constante et vaut  $E_0$  depuis  $t = -\infty$  ?
- 3°) Dans les deux cas, quelle est la sortie associée à l'entrée définie par  $u_e(t) = 0$  pour  $t \leq 0$  et  $u_e(t) = E_0$  pour  $t > 0$  ?



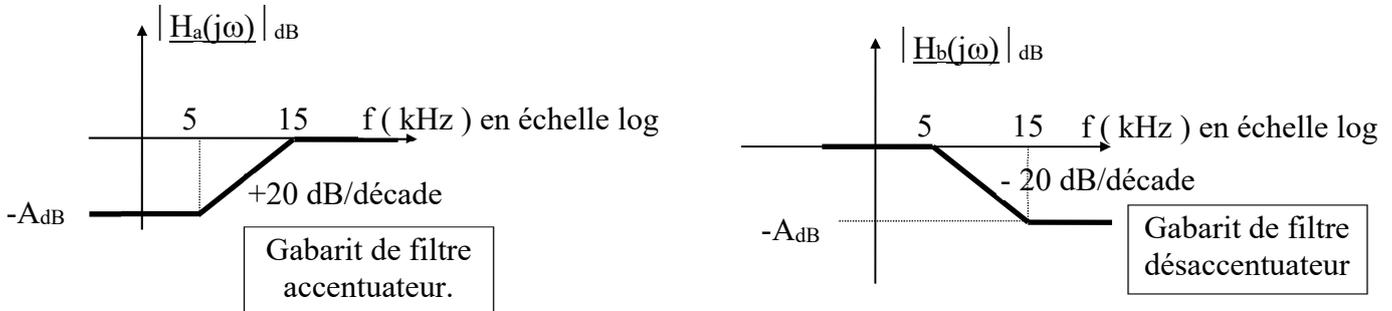
**8** On s'intéresse au montage ci-contre.

- 1°) Etablir l'équation différentielle liant  $u_s(t)$  à  $u_e(t)$ .
- 2°) On cherche à résoudre cette équation différentielle pour un signal d'entrée défini par  $u_{e1}(t) = E_a < 0$  pour  $t \leq 0$  et  $u_{e1}(t) = E_b > 0$  pour  $t > 0$ . On note  $u_{s1}(t)$  la tension de sortie associée.  
Que vaut la tension  $u_{s1}(t)$  à  $t = 0^-$  ? Cette tension est-elle une fonction du temps continue (au sens des mathématiques) ? Expliquer.  
Résoudre l'équation différentielle et représenter à la fois  $u_{e1}(t)$  et la tension de sortie  $u_{s1}(t)$ , de  $t = -\infty$  à  $t = +\infty$ .

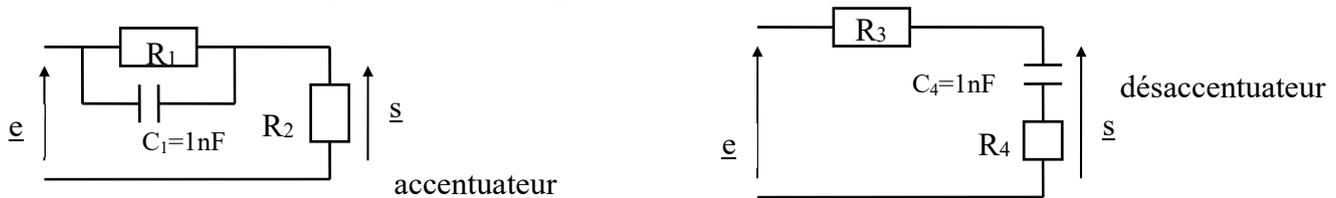


- 3°) On se place à présent en régime sinusoïdal établi :  $u_{e2}(t) = E_2 \cos(\omega t + \varphi)$ . Déterminer la sortie associée  $u_{s2}(t)$ .
- 4°) On se place à nouveau en régime sinusoïdal établi, mais avec :  $u_{e3}(t) = E_3 \sin(\omega t + \varphi)$ . Déterminer la sortie associée  $u_{s3}(t)$ .
- 5°) Pour :  $u_{e4}(t) = E_a \cos(\omega_a t + \varphi_a) + E_b \cos(\omega_b t + \varphi_b)$ , quelle est l'expression de  $u_{s4}(t)$  ?
- 6°) Pour :  $u_{e5}(t) = E_0 + E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ , quelle est l'expression de  $u_{s5}(t)$  ?
- Application 1 : que vaut approximativement  $u_{s5}(t)$  si  $E_0 = E_1$  et si  $\omega_1 = 500 R/L$  ?
- Application 2 : que vaut approximativement  $u_{s5}(t)$  si  $E_0 = 2E_1$  et si  $\omega_1 = 0,02 R/L$  ?

**9** On désire, pour permettre une transmission ou un enregistrement d'un signal musical dans de bonnes conditions, disposer de deux filtres dont les caractéristiques sont données ci-dessous. Attention, il s'agit de diagrammes de Bode asymptotiques, en échelle logarithmique. Les deux paliers horizontaux les plus bas sont à  $-A_{dB}$ . Les cassures sont respectivement à 5 kHz et à 15 kHz.



- 1°) Déterminer la valeur de  $A_{dB}$ , atténuation en dB introduite par le premier filtre sur les signaux graves.
- 2°) Proposer des fonctions de transferts  $\underline{H}_a(p)$  et  $\underline{H}_b(p)$  dont les tracés des diagrammes de Bode asymptotiques sont ci-dessus.
- 3°) Calculer les valeurs des composants convenables pour réaliser les filtres voulus à l'aide des circuits ci-dessous.



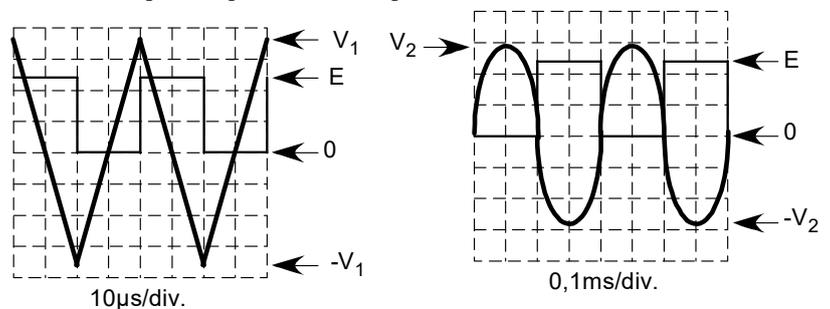
4°) Expliquer comment utiliser ces deux filtres dans un contexte d'émission hertzienne, sachant que celle-ci s'accompagne de l'ajout (involontaire mais inévitable) au signal utile d'un « bruit blanc », appelé « souffle », et que les signaux utiles ont toujours un spectre dont les raies sont de plus forte amplitude en basse fréquence qu'en haute fréquence.

**11 (CCP PSI 00)** : L'exercice qui vient incite à bien réfléchir sur l'action d'un filtre dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel. Soit le filtre passe-bande de fonction de transfert

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{G_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})} \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ On observe à}$$

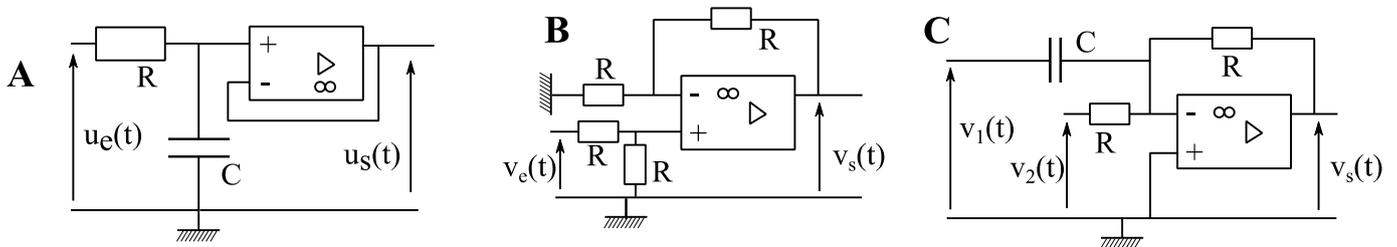
l'oscilloscope la sortie  $v_s$  en réponse à un signal créneau qui s'écrit

$$v_e(t) = \frac{E}{2} + 2 \frac{E}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sin[(2p+1)\omega_1 t]. \text{ Les chronogrammes sont ceux ci-contre.}$$



- 1°) Que vaut dans chaque cas la composante continue du signal d'entrée ? Même question pour le signal de sortie. Justifier le résultat pour le signal de sortie.
- 2°) Quelle opération mathématique faut-il effectuer pour passer d'un créneau (sans composante continue) à un triangle ? Comment un filtre passe-bande peut-il réaliser cette opération (de façon approchée) ?
- 3°) A quelle condition un filtre passe-bande peut-il transformer un créneau en sinusoïde ? De quelle composante sinusoïdale du créneau s'agit-il ? Compte tenu du positionnement du créneau par rapport à la sinusoïde sur le dessin, comment la pulsation de la sinusoïde de sortie est-elle positionnée par rapport à la pulsation  $\omega_0$  ?
- 4°) Compte tenu de tous ces éléments, déterminer  $G_0$ ,  $Q$  et  $\omega_0$ . On notera bien les deux échelles de temps.

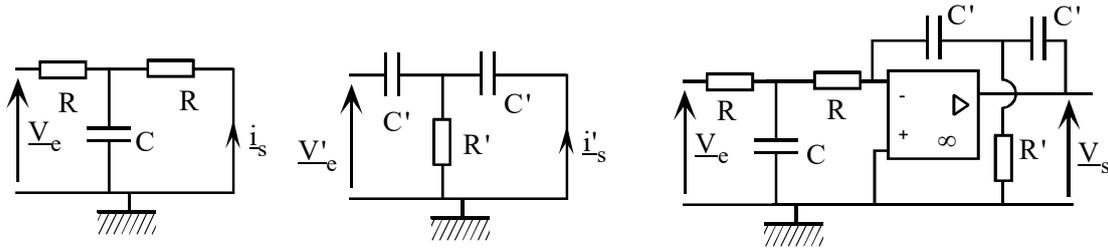
**12** On considère les 3 montages ci-dessous dans lesquels les ALI sont supposés idéaux et en fonctionnement linéaire. Déterminer le lien entre la, ou les entrées, et la sortie, en régime harmonique (notation complexe).



Rép :  $\frac{u_s}{u_e} = \frac{1}{1+jRC\omega}$  ;  $\frac{v_s}{v_e} = 1$  ;  $v_s = -jRC\omega v_1 - v_2$ .

**13 Double intégrateur (CCP)**

- 1°) Calculer  $i_s$  et  $i'_s$  pour les 2 premiers quadripôles ci-dessous en régime harmonique.
- 2°) Trouver une condition sur R, R', C, C' pour que le 3<sup>ème</sup> montage se comporte comme un double intégrateur, l'ALI étant idéal et en fonctionnement linéaire.



Rép :  $i_s = -\frac{v_e}{R(2+jRC\omega)}$  ;  $i'_s = \frac{R'C'^2\omega^2 v_e}{1+2jR'C'\omega}$  ;  $\frac{v_s}{v_e} = \frac{1}{2RR'C'^2\omega^2}$

**14 Diagramme de Bode (Mines)**

On considère la fonction de transfert en régime harmonique :  $H(j\omega) = \frac{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_4}\right)}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_3}\right)^2\left(1+j\frac{\omega}{\omega_5}\right)}$

avec  $\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = 10$ . Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques amplitude et phase.

**15 .**

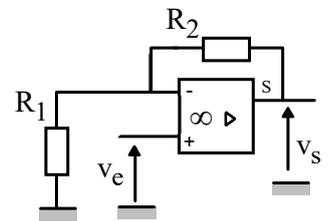
- 1°) Etablir le schéma d'un montage dérivateur parfait.
- 2°) Si l'ALI. n'est plus parfait, mais admet pour lui-même une fonction de transfert du premier ordre, que devient la fonction de transfert du montage complet ? Tracer alors son diagramme de Bode.

Rép :  $H(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{-\mu_0 jRC\omega}{\mu_0 + 1 + j\omega\left(\frac{1}{\omega_0} + RC\right) - \frac{RC\omega^2}{\omega_0}}$

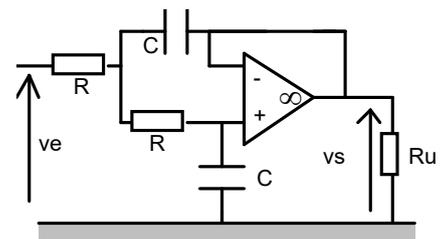
**16** On considère un montage amplificateur non inverseur. On suppose que la charge éventuelle qui se trouve à la sortie du montage a une impédance d'entrée infinie. L'ALI utilisé a une tension de saturation  $\pm V_{sat}$  (avec  $V_{sat} = 15$  V), et une vitesse de balayage

$\sigma = \left|\frac{dv_s}{dt}\right|_{max} = 0,5V.(\mu s)^{-1}$ .

Déterminer les amplitudes maximales de  $v_s$  pour que le régime reste linéaire à une fréquence de 100Hz ; 1kHz ; 10kHz ; 100kHz ; 1MHz.



**17** L'ALI du montage est idéal et fonctionne en régime linéaire. Calculer la fonction de transfert de ce filtre. Tracer ses diagrammes de Bode. A quoi sert un tel filtre? Calculer les impédances d'entrée et de sortie, Ru étant l'impédance de charge du circuit.

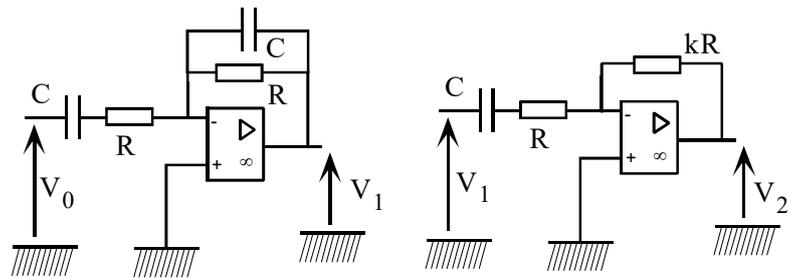


### 3 Electronique (oscillateurs)

1 On posera  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

1°) Déterminer  $H_1 = \frac{V_1}{V_0}$  et  $H_2 = \frac{V_2}{V_1}$ .

2°) On relie la sortie du premier reliée à l'entrée du second et la sortie du second reliée à l'entrée du premier). Calculer k pour que le circuit oscille sinusoidalement. A quelle pulsation seront ces oscillations ?



### 2

Soit le montage ci-contre. On posera  $R_0 C_0 \omega_0 = 1$ .

1°) Déterminer la fonction de transfert en tension  $H_1(j\omega) = \frac{s}{e}$ . Quelle est la nature du filtre ?

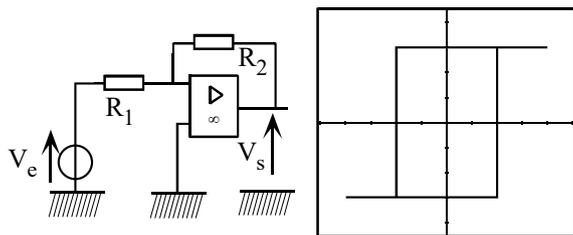
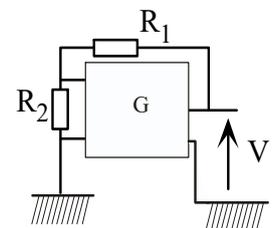
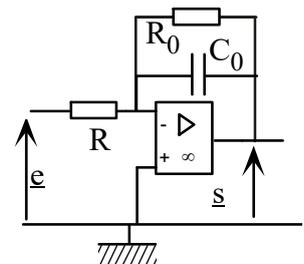
2°) On considère un autre montage, composé de 3 du type de celui ci-dessus (les uns à la suite des autres).

Quelle est la fonction de transfert  $H_2(j\omega)$  du nouveau système ? Déterminer le module et l'argument pour  $\omega = 0$ ,  $\omega = \omega_0$  et  $\omega \rightarrow \infty$ .

3°) On considère le montage de la question 2°) et on place à l'entrée un suiveur. On obtient alors un montage que l'on note G. Pourquoi utiliser un suiveur ? Quel est son schéma ?

4°) On réalise le montage ci-contre. Déterminer la condition sur  $R_1$  et  $R_2$  pour que le système oscille. Quelle sera la pulsation des oscillations ?

Rép : 4°)  $\omega = \omega_0 \sqrt{3}$  ;  $R_2 R_0^3 = 8 R^3 (R_1 + R_2)$



3 Avec le montage ci-dessus on obtient sur un oscilloscope la figure de droite.

1°) Comment l'oscilloscope a-t-il été utilisé ? Comment est-il branché ?

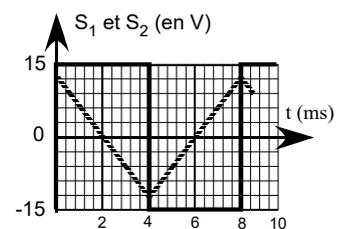
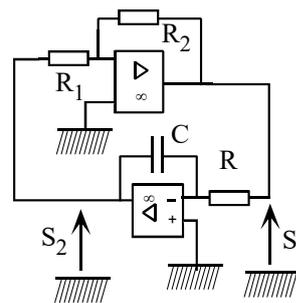
2°) Placer les bornes + et - de l'ALI.

3°) Quel est le type de tension  $v_e$  ? Les échelles horizontale et verticale sont 5 V/div. Déterminer  $V_{sat}$ .

4°) Calculer le rapport  $R_1/R_2$ .

5°) On réalise le second montage ci-contre, et on observe les oscillogrammes joints. Etablir les correspondances entre les courbes et les signaux  $S_1$  et  $S_2$ .

6°) Exprimer la demi-période en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $\tau = RC$ . Mesurer la demi-période sur les graphes. En déduire  $\tau$ .



### 4

A  $t=0$ , on ferme l'interrupteur, le condensateur est déchargé. Le dipôle du bas du dessin est une lampe.

Voici son principe de fonctionnement : Si  $u < u_a$ ,  $i=0$ . On donne  $u_a = 150$  V. Une fois que  $u \geq u_a$ , la lampe s'allume, et  $i = \alpha + \beta u$  ; mais la lampe ne reste allumée que pour  $u > u_c = 98$  V. Quand  $u \leq u_c$ ,  $i=0$  à nouveau, et la lampe est éteinte.

Données :  $R=20$  k $\Omega$  ;  $E=200$  V ;  $C=50$   $\mu$ F ;  $\alpha=0,1$  A ;  $\beta=1,75 \cdot 10^{-3}$  A/V.

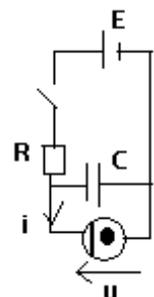
1°) Au bout de combien de temps ( $t_0$ ) la lampe éclaire-t-elle ? poser  $\tau=RC$ .

2°) Pendant combien de temps reste-t-elle allumée ?

3°) Pendant combien de temps reste-t-elle ensuite éteinte ? On pourra poser  $U = (E - \alpha R) / (1 + \beta R)$  et  $\tau' = \tau / (1 + \beta R)$ .

4°) Montrer que le régime est périodique. Quelle est sa période T ?

5°) Représenter  $u(t)$  puis  $du(t)/dt$  en fonction de  $u(t)$ .



$$R\acute{e}p : t_0 = \tau \ln\left(\frac{E}{E - u_a}\right) = 1,39s \quad t_1 - t_0 = \tau \ln\left(\frac{u_a - U}{u_e - U}\right) = 0,024s \quad T = t_2 - t_0 = \tau \ln\left(\frac{u_a - U}{u_e - U}\right) + \tau \ln\left(\frac{u_e - E}{u_a - E}\right) = 0,74s$$

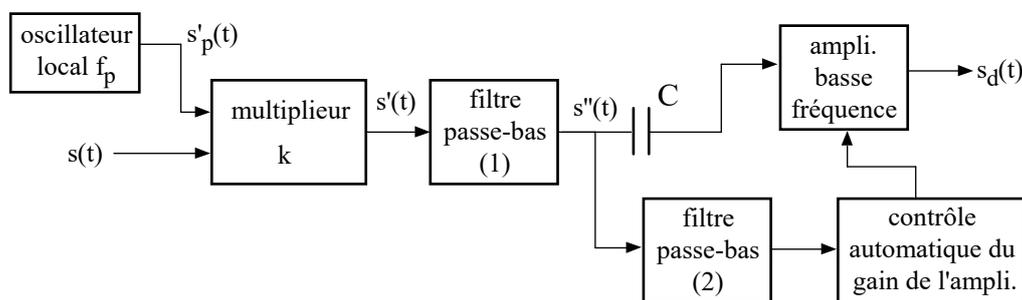
## 4 Electronique (modulation)

### 1 modulation et démodulation d'amplitude :

Un signal modulé sinusoidalement en amplitude est un signal de la forme :  $s(t) = A_p(1 + m \cos(2\pi f_m t)) \cos(2\pi f_p t)$

où  $f_p$  est la fréquence du signal porteur,  $f_m$  ( $\ll f_p$ ) la fréquence du signal de modulation et  $m$  l'indice de modulation.

- 1 ) Proposer un schéma de modulateur d'amplitude utilisant un multiplieur de coefficient  $k$  et un sommateur.
- 2 ) Donner l'allure du signal modulé  $s(t)$  pour un indice de modulation  $m < 1$ .
- 3 ) Pour transmettre un signal audio en modulation d'amplitude (AM), on module une porteuse sinusoidale par le signal audio. Calculer la largeur de la bande de fréquence nécessaire à la transmission d'un signal audio encombrant la plage de fréquence  $f_{m1} = 300 \text{ Hz} \leq f_m \leq f_{m2} = 4,5 \text{ kHz}$ , sachant que la porteuse utilisée est de fréquence  $f_p = 1 \text{ MHz}$ .
- 4 ) On revient au  $s(t)$  du début de l'énoncé. En admettant que l'on dispose, à la réception, d'un oscillateur local  $s'_p = A'_p \cos(2\pi f_p t)$  synchrone de l'oscillateur utilisé à l'émission, expliquer le principe du circuit représenté ci-après, où le filtre passe-bas (1) a une fréquence de coupure  $f_{H1} < f_p$  et le filtre passe-bas (2) une fréquence de coupure  $f_{H2} < f_m$ .

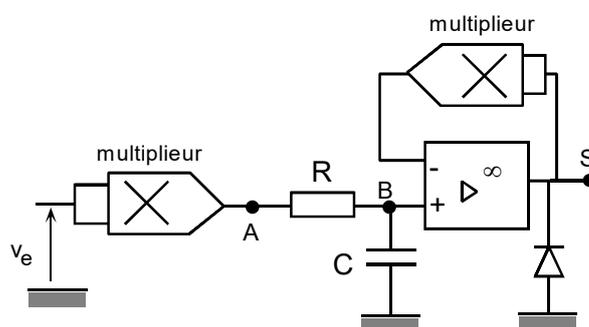


2 (CCP) On rappelle que la valeur efficace est la racine de la moyenne du carré.

Montage utilisant un multiplieur pour obtenir la valeur efficace vraie d'un signal.

On donne :  $v_e(t) = E\sqrt{2} \sin \omega_0 t$ .

- 1 ) Quel est le spectre de  $v_A(t)$  ?
- 2 ) Calculer le produit RC pour avoir une atténuation de la composante sinusoidale de 40 dB.
- 3 ) En pratique, que vaut  $v_B$  ?
- 4 ) Calculer  $v_S$ .
- 5 ) A quoi sert la diode ?



### 3 modulation et démodulation

1 ) Un signal modulé a pour expression :  $E(t) = E_0(1 + m \cos(\omega_0 t)) \cos(\omega_p t)$ . Que représentent  $m$ ,  $\omega_0$  et  $\omega_p$  ?

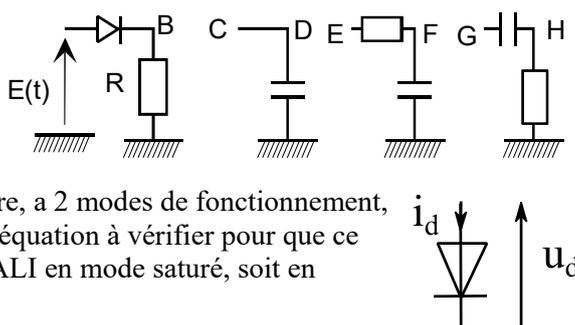
De quel type de modulation s'agit-il ? Donner l'allure de  $E(t)$ .

2 ) La démodulation est effectuée en multipliant le signal modulé par  $e(t) = e_0 \cos(\omega_p t)$ . En sortie on récupère  $s = E.e/g$ , où  $g$  est une constante. Comment se nomme ce type de démodulation ? Quelle est l'expression du signal de sortie du multiplieur et son spectre ? Comment compléter le montage pour obtenir le signal démodulé ?

3 ) La démodulation est maintenant effectuée à l'aide d'un montage à diode idéale. Donner l'allure du signal en B, en D si B et C sont reliés, en F si D et E sont reliés, en H si F et G sont reliés. Quelle valeur de  $m$  ne doit pas être dépassée ? On rappelle

qu'une diode idéale, dont les tension et courant sont définis ci-contre, a 2 modes de fonctionnement, et pour chacun d'eux, il existe une équation, mais également une inéquation   vérifier pour que ce mode de fonctionnement soit possible (dans le même esprit qu'un ALI en mode saturé, soit en saturation basse, soit en saturation haute) :

-  tat passant :  $u_d = 0$ , mais uniquement pour  $i_d > 0$ .
-  tat bloquant :  $i_d = 0$ , mais uniquement pour  $u_d \leq 0$ .



## 5 Electronique numérique

### 1 Stroboscopie :

1°) On cherche à déterminer la vitesse angulaire de rotation  $\omega$  d'un disque blanc sur lequel est peint un petit secteur noir. On le met en rotation et on l'éclaire avec un stroboscope, dont la fréquence des flashes est notée  $f_e$ . On fait les observations suivantes :

On ne voit qu'un seul secteur blanc, fixe, notamment pour  $f_e \in \{234, 286, 322, 429, 515, 1286, 2571\} \text{ mn}^{-1}$ .

On voit deux secteurs blancs, fixes, diamétralement opposés, notamment pour  $f_e \in \{206, 1031, 1718, 5130\} \text{ mn}^{-1}$ .

On voit trois secteurs blancs, immobiles, régulièrement répartis, notamment pour  $f_e = 7736 \text{ mn}^{-1}$ . Que vaut  $\omega$  ?

### 2 Fréquence parasite

Une équipe de tournage de cinéma procède à l'enregistrement d'une séquence dans une maison louée à cette fin. Le son est enregistré sur un support numérique, au moyen d'un microphone et d'un convertisseur analogique-numérique, dont la fréquence d'échantillonnage est  $f_e = 44 \text{ kHz}$ . Lors du premier tournage de la scène, l'équipe est satisfaite du jeu des acteurs, mais en écoutant la bande sonore, l'ingénieur du son constate l'existence d'un sifflement parasite. Le producteur s'agite, cherche le coupable de ce son parasite, en vain. Il décide de retourner la scène, après avoir vérifié qu'aucun bruit gênant n'était présent au moment de dire « moteur ». L'enregistrement se déroule bien, mais à nouveau, lors de l'écoute, le sifflement apparaît. Il procède à une analyse spectrale du son et voit apparaître une raie assez marquée, à 6,1 kHz. Grosse tension dans l'équipe ; tout le monde part à la recherche d'un appareil produisant un sifflement, mais rien ne produit ce son dans la maison. C'est alors qu'un technicien tombe par hasard sur un piège à souris, sur lequel est écrit « piège à ultrasons ».

1°) Expliquer pourquoi cet appareil pourrait être responsable du sifflement et proposer une valeur de sa fréquence d'émission.

2°) Quelle technique pourrait-on mettre en œuvre pour éliminer ce problème sans dégrader le son du film ? Comment s'appelle le montage qui serait utilisé ? Quelles seraient ses caractéristiques ?

### 3 Paramétrage d'une numérisation

On considère un signal utile dont le spectre est continu et s'étale de  $f_{min} = 120 \text{ Hz}$  à  $f_{max} = 15,00 \text{ kHz}$ . On se sert de ce signal utile pour moduler une porteuse de fréquence  $f_p = 500 \text{ kHz}$ , avec conservation de la porteuse, mais en mode BLU (bande latérale unique), la seule bande conservée étant celle de plus haute fréquence. Le signal modulé doit être numérisé.

1°) Comment doit-on choisir la fréquence d'échantillonnage ?

2°) Monsieur X, chargé de régler les paramètres de l'échantillonnage, qui n'était visiblement pas passé par la PSI du LVH, a choisi  $f_e = 800 \text{ kHz}$ . Surpris de ce choix, monsieur Y passant par là (qui lui a fait la bonne PSI), lui conseille d'afficher le spectre du signal numérisé, au moyen d'une FFT, pour qu'il voit qu'il n'a pas fait le bon choix. Que voit-il comme spectre ?

3°) Dépité, monsieur X se dit qu'il faut qu'il change quelque chose, mais ne sait pas trop quoi. Il décide de changer la fréquence de la porteuse et choisit  $f_{p2} = 900 \text{ kHz}$ , sans changer  $f_e$ . Que voit-il alors comme nouveau spectre ?

4°) Une entreprise qui fabrique des diapasons procède à la vérification de certains d'entre eux avant la commercialisation. Parmi les modèles conçus pour produire le La3 (de fréquence théorique  $f_0 = 440 \text{ Hz}$ ), l'un semble présenter un défaut. La personne chargée du contrôle décide de le frapper en même temps qu'un modèle déjà certifié juste. Le son est numérisé, puis son spectre est calculé au moyen d'une FFT. Comment choisir tous les paramètres de la numérisation pour avoir des chances de voir apparaître deux raies distinctes si l'écart entre les deux fréquences est de l'ordre de 1 Hz ?

### 4 Filtrage numérique (1) :

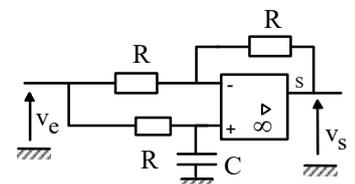
On souhaite réaliser un filtre numérique qui correspondrait à un filtre analogique de fonction de transfert en notation opérationnelle  $H(p) = \frac{\tau p}{1 + \tau p}$ .

1°) Quel type de filtre est-ce ?

2°) Décrire comment réaliser le filtre numérique équivalent avec la méthode d'Euler. Tester le résultat au moyen d'un programme python, ou éventuellement d'un tableur.

### 5 Filtrage numérique (2) :

On souhaite réaliser un filtre numérique réalisant la même fonction que le montage à ALI ci-contre, pour lequel on suppose que l'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire. Déterminer la fonction de transfert du filtre analogique ci-contre en notation opérationnelle, puis décrire comment réaliser le filtre numérique équivalent avec la méthode d'Euler. Tester le résultat au moyen d'un programme python.



## 6 Révisions de thermodynamique

**1** Une mole de gaz parfait ( $\gamma = \frac{5}{3}$ ) décrit le cycle ABCA suivant : de A à B : isotherme. De B à C : isobare. De C à A : isochore. Les transformations sont toutes quasi-statiques.

On donne  $V_A = 5,00 \text{ L}$ ,  $V_B = 0,500 \text{ L}$ ,  $T_A = 301 \text{ K}$ .

1°) Exprimer puis calculer  $P_A$ ,  $P_B$ ,  $P_C$ ,  $T_C$ .

2°) Exprimer puis calculer les travaux  $W_{AB}$ ,  $W_{BC}$ ,  $W_{CA}$  et les transferts thermiques  $Q_{AB}$ ,  $Q_{BC}$ ,  $Q_{CA}$  reçus par le gaz au cours des différentes étapes.

3°) Reprendre les questions 1°) et 2°) en adoptant un modèle de gaz réel, d'équation d'état (pour 1 mole) :

$(P + a/V^2) V = R T$ , et d'énergie interne (pour 1 mole) :  $U = 3/2RT - a/V$ . On donne avec  $a = 0,135 \text{ m}^6 \cdot \text{Pa} \cdot \text{mol}^{-2}$ .

**2** On place une mole d'hélium à 300 K dans un cylindre dont les parois sont diathermanes, c'est-à-dire perméables à la chaleur. Le cylindre est placé dans un thermostat à 273 K. Le volume d'hélium reste constant.

1°) Quelle est la température d'équilibre ? Calculer la variation d'entropie, l'entropie reçue, l'entropie créée.

2°) A partir de cet équilibre, on divise le volume par 2 de façon isotherme. Calculer la variation d'entropie, l'entropie reçue, l'entropie créée.

$$\text{Rép : } T_2 = 273 \text{ K} \quad \Delta S = \frac{3}{2} R \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) = -1,18 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \quad S_e = \frac{3R}{2} \left( 1 - \frac{T_1}{T_2} \right) = -1,23 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \quad S_c = 5,7 \cdot 10^{-2} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\Delta S = -R \ln 2 = -5,76 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \quad S_e = -R \ln 2 = -5,76 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \quad S_c = 0$$

**3** On considère une machine à glace (congélateur) décrivant un cycle thermodynamique que l'on suppose réversible. Elle est placée dans une pièce où la température est maintenue à 20°C. Sa puissance mécanique est constante et vaut  $P = 2,0 \text{ kW}$ .

1°) Faire le schéma de principe de la machine, en faisant bien apparaître le caractère idéal ou non des sources chaude et froide.

2°) Déterminer le temps nécessaire pour fabriquer 1,0 tonne de glace à  $-5,0^\circ\text{C}$  à partir d'eau à 20°C. Il faudra bien penser à décomposer le problème en plusieurs étapes pour tenir compte des états physiques successifs de l'eau, et à découper si nécessaire les étapes en tranches infinitésimales pour tenir compte de l'évolution éventuelle de la température des sources thermiques.

3°) Déterminer l'efficacité globale de la machine.

Données :  $L_{fus} = 334 \text{ kJ/kg}$  ;  $c_{eau} = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  ;  $c_{glace} = 2,1 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

Rép : en posant  $T_0 = 293 \text{ K}$ ,  $T_1 = 273 \text{ K}$  et  $T_2 = 268 \text{ K}$ ,  $m = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg}$

$$\Delta t = \frac{m}{P} \left[ T_0 c_{eau} \ln \left( \frac{T_0}{T_1} \right) + c_{eau} (T_1 - T_0) + L_{fus} \left( \frac{T_{air} - T_1}{T_1} \right) + c_{glace} T_0 \ln \left( \frac{T_1}{T_2} \right) + c_{glace} (T_2 - T_1) \right] \quad \eta = 15$$

**4 (ENTPE PSI) :** Soit un local chauffé par une pompe à chaleur, la source froide étant un lac à température  $T_0$  ;

l'extérieur du local est à  $T_0$  aussi. Lorsque le local est à la température  $T$  différente de  $T_0$ , il subit une déperdition thermique : pendant une durée infinitésimale  $dt$ , il perd une quantité de transfert thermique donnée par :

$\delta Q = \alpha C (T(t) - T_0) dt$ , où  $\alpha$  est un réel positif et  $C$  est la capacité thermique (appelée aussi capacité calorifique) totale

du local. Bien noter que cette quantité change à mesure que  $T(t)$  change, quand on n'est pas en régime stationnaire, c'est-à-dire lorsque la température du local  $T(t)$  varie au cours du temps. En régime stationnaire (c'est-à-dire indépendant du temps), l'intérieur est à  $T = T_1 = \text{Cte}$ .

1°) Donner l'expression et l'unité de  $\alpha$  sachant que pendant  $\Delta t$ , si le chauffage est coupé,  $T(t)$  passe de  $T_1$  à  $T_2$  (on établira une équation différentielle que l'on résoudra pour exprimer  $\alpha$  en fonction de  $\Delta t$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_0$ ).

2°) A.N.  $T_1 = 294 \text{ K}$ ,  $T_2 = 286 \text{ K}$ ,  $T_0 = 281 \text{ K}$ ,  $\Delta t = 3,0 \text{ h}$  ; donner la valeur de  $\alpha$ .

3°) Pendant un cycle, le fluide interne de la machine reçoit un transfert thermique  $\delta Q_F$  de la part de la source froide,  $\delta Q_C$  de la part de la source chaude, et un travail mécanique  $\delta W$  de la part du moteur qui l'entraîne. Dire pour chacune des trois si elle est positive ou négative.

4°) On suppose la machine réversible et en régime stationnaire. A partir des 2 principes, retrouver l'expression de l'efficacité  $\eta$  en fonction de  $T_1$  et  $T_0$ .

5°) En fait,  $\eta' = \beta \eta$ . Exprimer alors  $W$  sur une durée  $\tau$  en fonction de  $\beta$ ,  $\eta$ ,  $T_1$ ,  $T_0$ ,  $\alpha$ ,  $\tau$  et  $C$ , sachant qu'on maintient le local à  $T_1$  grâce à  $W$ .

6°) Exprimer la puissance mécanique de la machine. On donne  $C = 1,0 \cdot 10^7 \text{ U.S.I.}$  et  $\beta = 0,4$ .

$$\text{Rép : } \alpha = \frac{1}{\Delta t} \ln \left( \frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0} \right) \quad \alpha = 8,8 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \quad \eta = \frac{T_1}{T_1 - T_0} = 22,6 \quad W = \frac{\alpha C \tau (T_1 - T_0)}{\beta \eta} \quad P = 1,3 \text{ kW}$$

## 7 Thermochimie

1 ENSTIM L'oxydation du diazote en monoxyde d'azote s'effectue suivant la réaction  $\frac{1}{2}N_2(g) + \frac{1}{2}O_2(g) \rightarrow NO(g)$ .

1°) L'enthalpie standard de réaction de cette réaction est  $\Delta_f H^\circ = 90 \text{ kJ/mol}$  à 298 K. Pourquoi cette notation  $\Delta_f H^\circ$ ? La réaction est-elle endothermique ou exothermique ?

2°) L'enthalpie standard de formation du dioxyde d'azote étant de  $34 \text{ kJ/mol}$ , calculer l'enthalpie standard  $\Delta_r H^\circ$  de la réaction d'oxydation du monoxyde d'azote en dioxyde d'azote  $NO(g) + \frac{1}{2}O_2(g) \rightarrow NO_2(g)$ .

2 ENSTIM Les tables thermodynamiques donnent les enthalpies standard de formation suivantes (à 298 K) :

|  |       |                      |                    |
|--|-------|----------------------|--------------------|
|  | Si(s) | SiO <sub>2</sub> (s) | O <sub>2</sub> (g) |
| enthalpie standard de formation $\Delta_f H^\circ$ (kJ.mol <sup>-1</sup> ) | 0     | -911                 | 0                  |

1°) Pourquoi les enthalpies de formation du silicium et du dioxygène sont nulles ?

2°) La liaison Si=O présente une énergie de liaison de  $E_{Si=O} = 796 \text{ kJ.mol}^{-1}$ . On donne aussi  $E_{O=O} = 498 \text{ kJ.mol}^{-1}$ .

On donne l'enthalpie de sublimation du silicium :  $\Delta_{\text{sub}} H^\circ(\text{Si}) = 399 \text{ kJ.mol}^{-1}$ . Établir un cycle thermodynamique et donner alors l'expression littérale et la valeur numérique de l'enthalpie de sublimation de la silice.

3 Déduire des données ci-dessous les valeurs, à 25°C de

a) L'enthalpie standard de formation de la propanone gazeuse (CH<sub>3</sub>)<sub>2</sub>C=O.

b) L'énergie de la double liaison C=O dans la propanone.

c) L'enthalpie standard de combustion de la butanone gazeuse (CH<sub>3</sub>-CH<sub>2</sub>-CO-CH<sub>3</sub>, la liaison entre C et O étant double).

Données :  $\Delta_f H^\circ(\text{eau, liq, 298}) = -285,2 \text{ kJ/mol}$

$\Delta_f H^\circ(\text{CO}_2, \text{g, 298}) = -393,5 \text{ kJ/mol}$

$\Delta_c H^\circ(\text{propanone, g, 298}) = -1700 \text{ kJ/mol}$  (combustion complète avec obtention d'eau liquide et de CO<sub>2</sub> gazeux)

$\Delta_{\text{sub}} H^\circ(\text{graphite, 298}) = 716,7 \text{ kJ/mol}$  (sublimation).

Energies de liaison : C-H : 412 kJ/mol

C-C : 374 kJ/mol

O=O : 495,3 kJ/mol

H-H : 435,2 kJ/mol

4 ENSTIM Le biogaz, produit par la fermentation de matières organiques, est un mélange composé essentiellement de méthane CH<sub>4</sub> et de dioxyde de carbone CO<sub>2</sub>, avec un peu de H<sub>2</sub>O et de H<sub>2</sub>S. Après traitement, on obtient un gaz composé de 95 % de méthane et de 5,0 % de CO<sub>2</sub> (composition molaire) qui peut être injecté dans le réseau de gaz naturel.

On cherche à déterminer la température de flamme obtenue à partir d'un tel gaz lors de sa combustion dans l'air (80% de diazote et 20% de dioxygène en quantité de matière). On suppose que la combustion dans l'air est totale et adiabatique, que le méthane et le dioxygène sont en proportions stœchiométriques et que les gaz entrent à la température de  $T_o = 300 \text{ K}$ .

1°) Écrire l'équation de la réaction de combustion du méthane et calculer son enthalpie standard de réaction à  $T_o = 300 \text{ K}$ . On considérera que l'eau est sous forme gaz.

2°) Pour une quantité  $n_o$  de biogaz, dresser un bilan des quantités de matière avant la combustion et après.

3°) En déduire l'expression littérale de la température finale atteinte  $T_f$ , puis en donner une valeur à 2 chiffres significatifs.

|  |                  |                 |                 |
|--|------------------|-----------------|-----------------|
| Composé (gaz)                                      | H <sub>2</sub> O | CO <sub>2</sub> | CH <sub>4</sub> |
| $\Delta_f H^\circ$ (kJ.mol <sup>-1</sup> ) à 300 K | -240             | -390            | -110            |

Capacités thermiques molaires à pression constante considérées comme constantes dans l'intervalle de température étudié :

|   |  |                 |
|---|--|-----------------|
| composé   | CH <sub>4</sub> , N <sub>2</sub> , O <sub>2</sub> , H <sub>2</sub> O | CO <sub>2</sub> |
| $C_p^\circ$ (J.K <sup>-1</sup> .mol <sup>-1</sup> ) | 30   | 45              |

## 5 Energie réticulaire :

Calculer l'énergie réticulaire à 298K de Na<sub>2</sub>O, c'est-à-dire le  $\Delta_f H^\circ$  de la réaction donnant les ions gazeux  $Na^+(g)$  et  $O^{2-}(g)$  à partir de Na<sub>2</sub>O (cr).

Données à 298 K : Enthalpie standard de formation :  $Na_2O(cr) : -415,9 \text{ kJ.mol}^{-1}$

Energie standard d'ionisation :  $Na \rightarrow Na^+ + e^- : 492 \text{ kJ.mol}^{-1}$  ; Enthalpie standard de sublimation :  $Na : 107,5 \text{ kJ.mol}^{-1}$

Energie de liaison :  $O_2 : 498 \text{ kJ.mol}^{-1}$  ; Energie de double attachement électronique :  $O + 2e^- \rightarrow O^{2-} : 710 \text{ kJ.mol}^{-1}$

## 6 E3aPSI Combustion totale et complète

Considérons la réaction de combustion du méthane dans le dioxygène :  $CH_{4(g)} + 2 O_{2(g)} = CO_{2(g)} + 2 H_2O_{(liq)}$  [1]

1°) A l'aide des données thermodynamiques, calculer l'enthalpie standard  $\Delta_r H_1^\circ$  de la réaction [1] à 298 K.

2°) Calculer le pouvoir calorifique du méthane, représentant l'énergie libérée par la combustion complète d'un mètre-cube de méthane, initialement à 298 K, sous la pression  $p^\circ=1 \text{ bar}$  (l'exprimer en MJ et en kWh)

|                     |  |                       |  |
|---------------------|--|-----------------------|--|
| Élément ou composé  | $\Delta_f H^\circ$ en kJ.mol <sup>-1</sup> à 298 K | Élément ou composé    | $\Delta_f H^\circ$ en kJ.mol <sup>-1</sup> à 298 K |
| O <sub>2</sub> (g)  | 0  | CO <sub>2</sub> (g)   | -393,5   |
| CH <sub>4</sub> (g) | -74,4  | H <sub>2</sub> O(liq) | -285,8   |
| CO(g)               | -110,5   | H <sub>2</sub> O(g)   | -241,8   |

3°) Intéressons-nous maintenant la réaction de combustion incomplète (obtention de monoxyde de carbone) résultant du mélange non stœchiométrique  $CH_{4(g)} + 3/2 O_{2(g)}$ . Ecrire cette réaction, notée [2], puis calculer l'enthalpie standard  $\Delta_r H_2^\circ$  qui lui est

associée. Analyser le résultat obtenu en termes de rendement énergétique et de fiabilité par rapport à la réaction de combustion [1].

|                         | $C_p^\circ(\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1})$ |                                  | $C_p^\circ(\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1})$ |
|-------------------------|---|----------------------------------|---|
| $\text{O}_2(\text{g})$  | 29,97   | $\text{H}_2\text{O}(\text{g})$   | 30,01   |
| $\text{N}_2(\text{g})$  | 27,88   | $\text{H}_2\text{O}(\text{liq})$ | 75,47   |
| $\text{CO}_2(\text{g})$ | 44,16   |                                  |   |

### 7 Température de flamme :

Le gaz de ville est constitué essentiellement de méthane. Sa combustion à pression atmosphérique produit une

flamme dont on cherche à calculer la température.  $\text{CH}_4(\text{g}) + 2 \text{O}_2(\text{g}) = \text{CO}_2(\text{g}) + 2 \text{H}_2\text{O}(\text{g})$

La réaction est supposée totale, les réactifs initiaux étant le méthane ( $n_0$  moles), le dioxygène ( $2n_0$  moles) et le diazote ( $8n_0$  moles). Calculer la température de flamme lors de la combustion du gaz de ville.

Données :

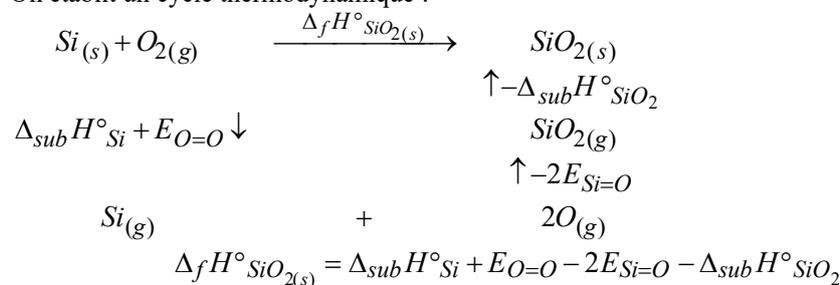
$$\Delta_{\text{vap}}H^0(\text{eau}, 298) = 43,84 \text{ kJ/mol} \quad \Delta_c H^0(\text{méthane}, \text{g}, 298) = -890,4 \text{ kJ/mol} \quad (\text{c signifie combustion totale, avec obtention d'eau liquide})$$

### 8 ENSTIM

Les enthalpies de formation du silicium et du dioxygène sont nulles car ce sont des corps simples dans leur état physique le plus stable à 298 K et sous la pression  $P^\circ$ .

#### IV.2. Remarque : on donne l'énergie de la liaison simple alors que dans la formule de Lewis écrite plus haut, on a mis des doubles liaisons...

On établit un cycle thermodynamique :



On en déduit :

$$\Delta_f H^\circ \text{SiO}_{2(s)} = 399 + 498 - 2 \times 796 + 911 = \underline{\underline{216 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}}}$$

### 9 ENSTIM

1°) Combustion du méthane (ici avec formation d'eau vapeur) :  $\text{CH}_{4(g)} + 2\text{O}_{2(g)} = \text{CO}_{2(g)} + 2\text{H}_2\text{O}_{(g)}$ .

Enthalpie standard de la réaction :

$$\Delta_r H^\circ = 2\Delta_f H^\circ_{\text{H}_2\text{O}} + \Delta_f H^\circ_{\text{CO}_2} - \Delta_f H^\circ_{\text{CH}_4}$$

$$\Delta_r H^\circ = 2 \times (-240) + (-390) - (-110) = \underline{\underline{-760 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}}}$$

2°) On dresse un bilan des quantités de matière des réactifs gazeux (en mol) :

$$\text{CH}_4 : 0,95n_0 \quad ; \quad \text{CO}_2 : 0,05n_0 \quad ; \quad \text{O}_2 : 1,9n_0 \quad ; \quad \text{N}_2 : 7,6n_0$$

Après la combustion, le mélange gazeux est constitué (en mol) de :

$$\text{CO}_2 : n_0 \quad ; \quad \text{H}_2\text{O} : 1,9n_0 \quad ; \quad \text{N}_2 : 7,6n_0$$

3°) On fait un bilan d'enthalpie en passant par un chemin fictif, selon lequel la réaction se déroule de façon totale dans des conditions isobare et isotherme à  $T_0 = 300 \text{ K}$ , puis tous les constituants du mélange gazeux obtenu passent de  $T_0$  à  $T_f$ .

Puisque  $\xi_f = 0,95n_0$  et  $\xi_i = 0$ , on en déduit l'équation suivante :

$$0,95n_0 \Delta_r H^\circ + n_0 (c_p^\circ_{\text{CO}_2} + 1,9 c_p^\circ_{\text{H}_2\text{O}} + 7,6 c_p^\circ_{\text{N}_2}) (T_f - T_0) = 0.$$

$$\text{Finalement : } T_f = T_0 - \frac{0,95 \Delta_r H^\circ}{c_p^\circ_{\text{CO}_2} + 1,9 c_p^\circ_{\text{H}_2\text{O}} + 7,6 c_p^\circ_{\text{N}_2}} = 2,5 \cdot 10^3 \text{ K.}$$

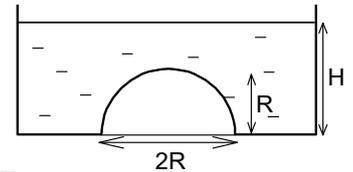
## 8 Statique des fluides

1 On considère une demi-sphère solide pleine, posée sur le fond d'un récipient.

1°) Déterminer la force de surpression que subit la demi-sphère lorsque de l'eau la recouvre entièrement, la hauteur d'eau étant  $H$ . Il pourra être utile d'isoler un système autre que la demi-sphère elle-même.

2°) Retrouver le résultat en mettant en œuvre une méthode utilisant la poussée d'Archimède.

Rép :  $F_z = -\mu_{eau} g \pi R^2 \left( H - \frac{2}{3} R \right)$  ( $Oz$  étant l'axe vertical ascendant).

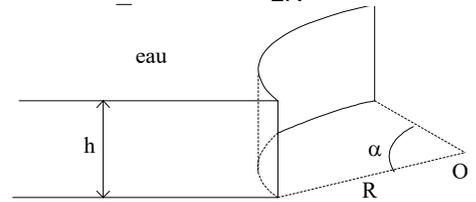


### 2-Résultante des forces de pression sur un barrage

Un barrage a la forme d'un secteur cylindrique caractérisé par son rayon  $R$  et l'angle  $\alpha$ . L'eau du lac a une masse volumique  $\mu$  et une hauteur  $h$ .

Déterminer la résultante des forces de pression s'exerçant sur la paroi.

Rép :  $F_x = \mu g R h^2 \sin(\alpha/2)$



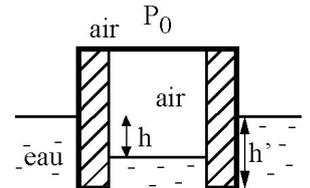
### 3 Equilibre d'un système flottant :

Un récipient cylindrique de section intérieure (surface)  $S$  et de section extérieure  $S'$  est introduit verticalement dans un liquide de masse volumique  $\rho$  (après avoir été retourné). La pression de l'air ambiant est  $P_0$  et la température constante  $T_0$ . Le récipient a une profondeur  $\ell$  et une masse  $m$ .

1°) Déterminer de 2 façons différentes les conditions traduisant l'équilibre vertical du système.

2°) A quelle condition sur la masse  $m$  le récipient peut-il flotter en équilibre à la surface du liquide ?

3°) Etudier la stabilité de cet équilibre pour des déplacements verticaux.



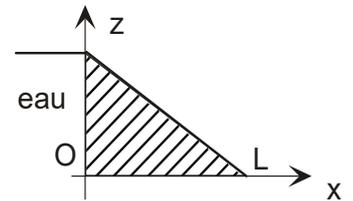
4 Soit un « barrage-poids » de largeur  $\ell$ , de profil triangulaire, de hauteur  $h$ , et de longueur de base  $L$ . Il

subit trois forces réparties : les forces de pression exercées par l'eau, le poids du barrage, et la réaction du sol. L'eau est considérée comme un fluide incompressible de masse volumique  $\mu_0$ . Le béton qui constitue le barrage a une masse volumique  $\mu_b = 2,5 \mu_0$ .

1°) Calculer la résultante des forces  $\vec{F}$  qu'exerce l'eau sur le barrage.

2°) On cherche à déterminer les coordonnées de son point d'application  $C$ . Pour cela, on peut commencer par -utiliser les symétries du problème pour définir sur quel segment vertical du plan  $yOz$  se trouve  $C$ .

Puis, on écrira que  $\vec{OC} \wedge \vec{F} = \iint_S \vec{OM} \wedge d\vec{F}$ ,  $S$  étant la surface séparant l'eau du béton.



3°) Déterminer le poids du barrage et son centre d'inertie.

4°) En écrivant les conditions d'équilibre du barrage, trouver la résultante des actions que le sol exerce sur lui, et déterminer le point d'application  $N$  de cette résultante.

## 9 Champ des vitesses ; débits

1 Soit un écoulement dont le champ des vitesses est donné, en coordonnées

cartésiennes par 
$$\begin{cases} v_x(x, y, z, t) = ax \\ v_y(x, y, z, t) = -ay, a \text{ étant un réel strictement positif. Cet} \\ v_z(x, y, z, t) = 0 \end{cases}$$

écoulement est-il stationnaire ? incompressible ?

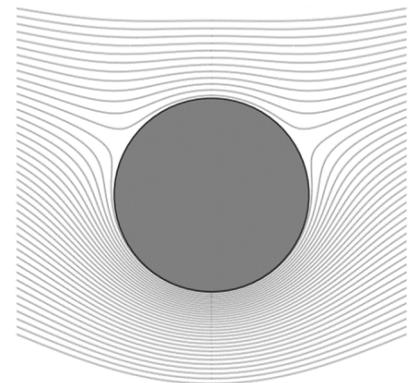
2 Soit un écoulement autour d'un cylindre d'axe ( $Oz$ ), de rayon  $R$ , tournant sur lui-même. On montre qu'un tel écoulement peut être modélisé par le champ des vitesses suivant, en coordonnées cylindriques~:

$$v_r(r, \theta, z, t) = v_0 \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos(\theta) ;$$

$$v_\theta(r, \theta, z, t) = v_0 \left[ \frac{R}{r} - \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin(\theta) \right] ; v_z(r, \theta, z, t) = 0$$

1°) En utilisant l'annexe mathématique, dire si cet écoulement est incompressible. Est-il stationnaire ?

2°) On donne ci-contre une carte de lignes de courant pour cet écoulement. Où le champ des vitesses est-il le plus important en norme ? où est-il le plus faible ?



3 Soit un écoulement pour lequel le champ des masses volumique est :  $\mu(M, T) = \mu_0 \exp(-\alpha t)$ ,  $\alpha$  étant un réel strictement positif. Le champ des vitesses est donné en coordonnées cartésiennes par  $\vec{v}(M, t) = \alpha x \vec{u}_x$ .

1°) Cet écoulement est-il incompressible ?

2°) Vérifier que les données sont compatibles avec l'équation locale de conservation de la masse.

3°) Soit un tunnel rectangulaire de largeur  $a$  parallèlement à  $Oy$ , de hauteur  $b$  parallèlement à  $Oz$ , et d'axe  $Ox$ . On pose  $x_2 = x_1 + L$ , avec  $L > 0$ . Soit  $S_c$  la surface de contrôle correspondant à la portion du tunnel comprise entre  $x_1$  et  $x_2$ , et  $V_c$  le volume de contrôle délimité par  $S_c$ .

a) Déterminer le débit massique  $D_{me}$  dans le sens  $x$  croissant à travers la section du tunnel située dans le plan  $x = x_1$ .

b) Déterminer le débit massique  $D_{ms}$  dans le sens  $x$  croissant à travers la section du tunnel située dans le plan  $x = x_2$ .

c) Déterminer la masse de fluide  $m_e$  qui entre dans  $V_c$  par la face située en  $x_1$  entre  $t = 0$  et  $t = t_1$ .

- d) Déterminer la masse de fluide  $m_s$  qui sort de  $V_c$  par la face située en  $x_2$  entre  $t = 0$  et  $t = t_1$ .  
 e) Déterminer la masse  $m(0)$  située dans  $V_c$  à  $t = 0$ , puis  $m(t_1)$  à  $t = t_1$ . Vérifier que  $m(0)$ ,  $m(t_1)$ ,  $m_e$  et  $m_s$  sont liés par une relation qui traduit la conservation globale de la masse.

**4** Soit un écoulement pour lequel le champ des vitesses a pour expression en coordonnées cartésiennes :  $\vec{v}(M, t) = \alpha x \vec{u}_z$ ,  $\alpha$  étant une constante.

1°) Calculer le débit volumique à travers la surface rectangulaire correspondant à  $x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$  et  $y \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$ , et orientée selon  $+\vec{e}_z$ .

2°) Même question pour la surface rectangulaire  $x \in [0, a]$  et  $y \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$ , et orientée selon  $+\vec{e}_z$ .

**5** Soit un écoulement pour lequel le champ des vitesses a pour expression en coordonnées cartésiennes :  $\vec{v}(M, t) = \alpha \vec{u}_x + \beta \vec{u}_z$ .

1°) Calculer le débit volumique à travers la surface rectangulaire correspondant à  $x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$  et  $y \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$ , et orientée selon  $+\vec{e}_z$ .

2°) Même question pour la surface rectangulaire  $x \in [0, a]$  et  $y \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$ , et orientée selon  $-\vec{e}_z$ .

**6** Soit un écoulement pour lequel le champ des vitesses a pour expression en coordonnées cylindriques :

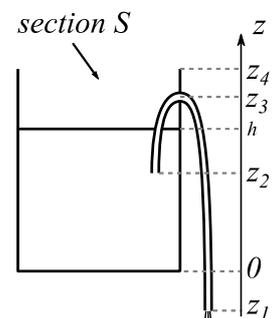
$$\vec{v}(M, t) = \alpha \left(1 - \frac{r}{R}\right) \vec{u}_z.$$

1°) Calculer le débit volumique à travers le disque de centre  $O$  et de rayon  $R$ , orienté selon  $+\vec{e}_z$ .

2°) Calculer le débit volumique à travers le cylindre d'axe  $(Oz)$ , de hauteur  $H$ , de rayon  $\frac{R}{2}$ , orienté selon  $+\vec{e}_r$ .

## 10 Ecoulements parfaits

**1** On s'intéresse au siphon ci-contre. La section du tuyau est  $s$ , celle du récipient  $S$ . On suppose que le siphon est amorcé et que le liquide s'écoule. On note  $h$  la hauteur de liquide dans le réservoir. Déterminer la vitesse de sortie du liquide en bas du tuyau en utilisant les grandeurs (les  $z_i$  sont algébriques) apparaissant sur le dessin. Quand le siphon arrête-t-il de fonctionner ?



**2** On étudie la vidange d'un réservoir de section constante  $S_0$  contenant de l'eau (fluide parfait) et qui peut se vider par un orifice circulaire de section  $s$  placé au fond. La hauteur de la surface libre est notée  $h$  et vaut initialement  $h_0$ . On suppose  $S_0 \gg s$ .

1°) En supposant l'écoulement quasi-stationnaire, exprimer la vitesse  $v$  de l'écoulement à l'orifice  $s$  en fonction de  $g$  et  $h$ .

2°) En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $h(t)$  puis l'intégrer.

3°) On s'intéresse à un réservoir de section variable  $S(z)$ ,  $(Oz)$  étant vertical ascendant, avec l'origine au niveau du bas du réservoir. Déterminer l'équation  $z=f(r)$  des génératrices du vase en coordonnées cylindriques pour que la surface libre descende à vitesse constante.

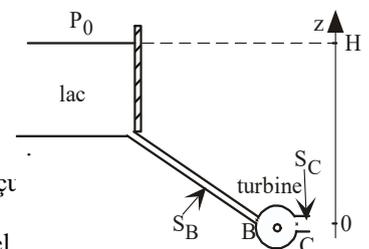
4°) On revient à  $S(z)=Cte=S_0$ . Mais le réservoir est alimenté par une arrivée d'eau de débit volumique  $D_e=Cte$ . Etablir l'équation différentielle régissant  $h(t)$ .

**3** On suppose que  $z_C = z_B$ . On note  $D_v$  le débit volumique dans la conduite.

1°) L'écoulement est parfait, quasi-stationnaire, homogène et incompressible. Exprimer  $P_B$  en fonction de  $P_0$ ,  $\rho$ ,  $g$ ,  $H$  et  $v_B$  puis en fonction de  $D_v$ ,  $S_B$ ,  $P_0$ ,  $\rho$ ,  $g$ ,  $H$ .

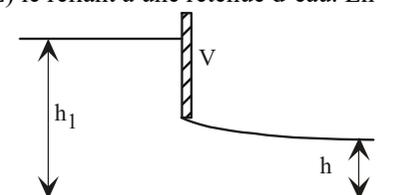
2°) On note  $e_m$  l'énergie mécanique d'une unité de masse du fluide. Donner les 3 termes qui composent  $e_m$ . Déterminer le travail fourni par kg de fluide à la turbine. Exprimer la puissance reçue turbine.

3°) La partie située après la turbine est appelée « diffuseur ». Elle est caractérisée par  $S_C > S_B$ . Quel d'avoir cette inégalité vérifiée ?



**4** Le débit obtenu dans un canal de largeur  $L$  est régulé par une vanne  $V$  (de même largeur  $L$ ) le reliant à une retenue d'eau. En amont de la vanne, la hauteur d'eau est  $h_1$  et la vitesse est  $\vec{v}_1 = v_1 \vec{u}_x$ . On posera

$H = h_1 + \frac{v_1^2}{2g}$ . Dans le canal, et à distance de la vanne, on suppose que le niveau de l'eau



s'est établi à une hauteur constante  $h$ . La vitesse  $y$  est  $\vec{v} = v\vec{u}_x$ . On fait les hypothèses suivantes :

L'eau est incompressible, et on désigne par  $\mu$  sa masse volumique ; on néglige les effets liés à la viscosité de l'eau ; on se place en régime stationnaire.

1°) Exprimer le débit volumique  $q$  dans le canal en fonction de  $g$ ,  $H$ ,  $h$  et  $L$ , et tracer son évolution en fonction de  $h$ . Montrer que,  $H$  étant fixé,  $q$  ne peut pas excéder une valeur maximale  $q_m$  que l'on définira en fonction de  $H$ ,  $L$  et  $g$ . Pour  $q < q_m$ , mettre en évidence 2 régimes possibles.

2°) Dans le cas où  $v_1^2 < gh_1$ , établir une inéquation liant  $H$  et  $h_1$ . Notons  $h_2$  la valeur particulière de  $h$  pour un débit  $q$  donné. Sur le graphe donnant  $q$  en fonction de  $h$ , placer  $h_1$  et  $h_2$ .

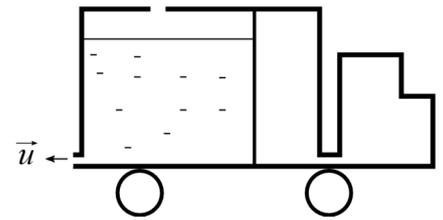
**5** Un compresseur délivre de l'eau sous une pression de  $P_1 = 129$  bar à une lance à incendie (section  $S_1$ ), qui se termine par une petite buse (section  $S_2$ ) où la pression de sortie est  $P_2 = 1,0$  bar. Le débit volumique est de  $D_v = 540$  L.h<sup>-1</sup>. On suppose  $S_2 \ll S_1$ .

1°) Calculer la norme du champ des vitesses  $v_2$  à la sortie de la buse, et calculer  $S_2$ .

2°) Le compresseur est relié en amont par un tuyau à un robinet sous  $P_r = 4,0$  bar. La section du robinet est  $S_r = 2,0$  cm<sup>2</sup>. La section de la lance est  $S_1 = 20$  mm<sup>2</sup>. Calculer la vitesse du fluide  $v_r$  dans le robinet, et  $v_1$  dans la lance.

3°) Calculer la puissance fournie par la pompe électrique pour comprimer le fluide. Calculer son rendement sachant qu'il consomme une puissance électrique de  $P_{elec} = 2,5$  kW.

4°) Déterminer la force horizontale exercée par l'opérateur qui tient la lance, d'axe horizontal.

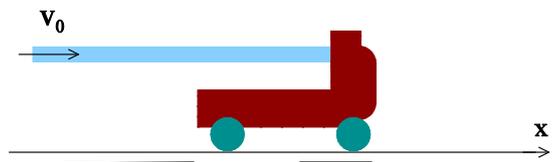


**6** Le fluide (supposé parfait) dans le camion est de l'eau. À un instant  $t$  donné, le débit massique est  $q_m$  et la vitesse relative d'éjection est  $\vec{u}$ . Déterminer en fonction de  $q_m$  et de  $\vec{u}$  la composante horizontale de la force que doit exercer, à  $t$ , le sol sur le camion pour que celui-ci garde une vitesse constante  $v$ .

**7** Un enfant joue avec un petit camion qu'il fait avancer grâce à un jet d'eau depuis un tuyau d'arrosage. On néglige les frottements aussi bien de l'air sur le jouet, que du sol sur les roues. Toute l'eau est recueillie dans la benne du camion. Le camion a un mouvement de translation rectiligne horizontal.

1°) Exprimer l'accélération  $a(t)$  du camion en fonction de sa vitesse  $v(t)$ ,  $v_0$  et  $D_m$  le débit massique sortant du tuyau d'arrosage que l'on suppose constant, ainsi que de la masse  $m(t)$  du système {camion+eau recueillie}. Quelle application numérique qualitative peut-on faire ?

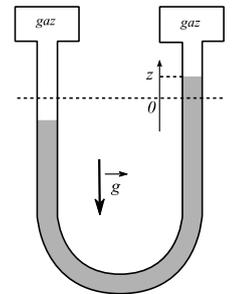
2°) On suppose qu'à l'instant initial le camion est immobile. Déterminer  $v(t)$  et  $v(\infty)$ .



## 8

On considère un tube en U dans lequel se trouve un liquide parfait, incompressible, de masse volumique  $\rho$ .

Aux 2 extrémités du tube, un gaz parfait (de coefficient  $\gamma$ ) est contenu dans 2 réservoirs identiques. À l'équilibre, on note  $P_e$  et  $V_e$  ses pression et volume. Le tube est de longueur  $L$  et de section  $S$  (rayon petit devant le rayon de courbure). Par la méthode de votre choix et en faisant les hypothèses nécessaires, établir l'équation des petits mouvements du liquide. On pourra faire des développements limités.



## 9

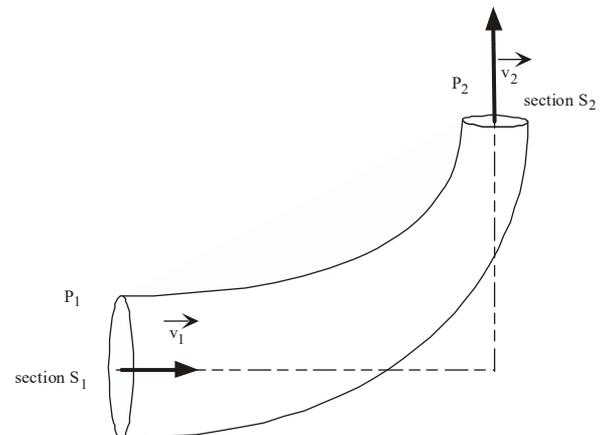
On néglige la pesanteur. On considère une canalisation coudée à 90°, les axes des sections d'entrée et de sortie étant tous deux dans le plan horizontal. L'eau qui s'écoule à l'intérieur est considérée comme un fluide parfait et incompressible, de masse volumique  $\rho$ . On se place en régime stationnaire. Le débit volumique est noté  $D$ .

1°) Trouver une relation entre  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ .

2°) Quelle est l'expression de la force exercée par le tuyau sur l'eau entre les sections  $S_1$  et  $S_2$  ?

3°) Ecrire une relation entre  $v_1$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  et  $\rho$ .

4°) Quelle force doit-on exercer sur le tronçon de canalisation pour le maintenir en place ?



**10** Tuyère : Soit un fluide compressible circulant dans une tuyère de section variable. L'écoulement est considéré comme stationnaire : la pression  $P$ , la section  $S$  et la masse volumique du fluide  $\mu$  sont fonction de  $x$ .

1) On admet que le champ des accélérations est  $\vec{a} = v \frac{dv}{dx} \vec{u}_x$ . Appliquer le PFD à une particule de fluide.

2) En déduire une relation entre  $\mu$ ,  $dv$ ,  $v$  et  $dP$ ,  $dv$  et  $dP$  étant des petites variations de  $v$  et  $P$  entre  $x$  et  $x + dx$ .

- 3) En déduire une relation entre  $\mu, d\mu, v, dv$  et  $c$ , célérité du son, en admettant que  $c^2 = \frac{dP}{d\mu}$
- 4) Ecrire l'expression du débit massique ; pourquoi est-il conservatif ?
- 5) Ecrire une relation de la forme  $\frac{dS}{S} = -\frac{dv}{v} \times f(v)$  et expliciter  $f(v)$ .
- 6) Sachant que la pression diminue quand  $x$  augmente, comparer  $v$  à  $c$  le long de la tuyère.

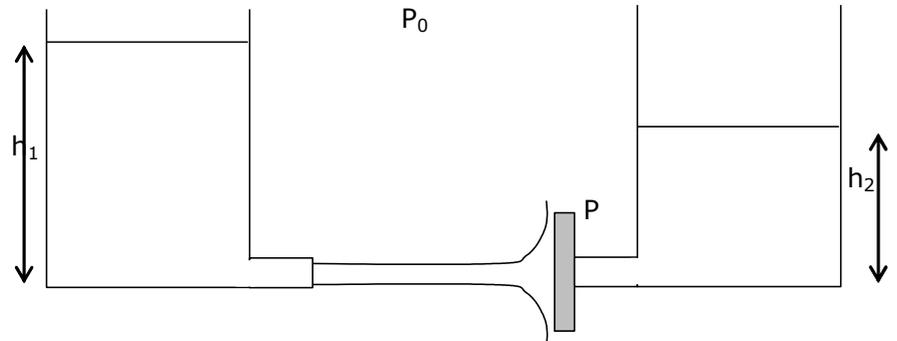
### 11 Solide plaqué contre une ouverture d'un réservoir

Deux réservoirs cylindriques de section  $S$  sont remplis à l'instant  $t=0$  sur une hauteur  $h_1$  pour l'un et  $h_2$  pour l'autre, d'un liquide parfait, de masse volumique  $\mu_0$  uniforme et constante.

Le liquide s'échappe du réservoir de gauche par un orifice de section  $s$  situé à l'altitude  $z=0$ . L'autre réservoir a son orifice de section  $s$  aussi, situé aussi à l'altitude  $z=0$ . Cet orifice est obstrué par une plaque solide, de masse négligeable.

La pression extérieure est uniformément égale à  $P_0$ , pression atmosphérique.

Calculer la hauteur minimale  $h_{1min}$  de liquide à gauche qui permet que le solide reste plaqué contre l'orifice du réservoir de droite. (On précisera toutes les hypothèses qu'on sera amené à faire pour résoudre ce problème).



### 12 Un jet a la forme d'une lame d'épaisseur $e$ et de largeur $\ell$ selon $Oz$ .

La vitesse de l'eau dans le jet est  $v_0$ . Arrivant sur une plaque plane (en gros trait sur le dessin) de largeur  $L$  dans le plan de la figure, il se divise en deux jets caractérisés par les grandeurs  $(e_1, v_1, \ell)$  et  $(e_2, v_2, \ell)$ .

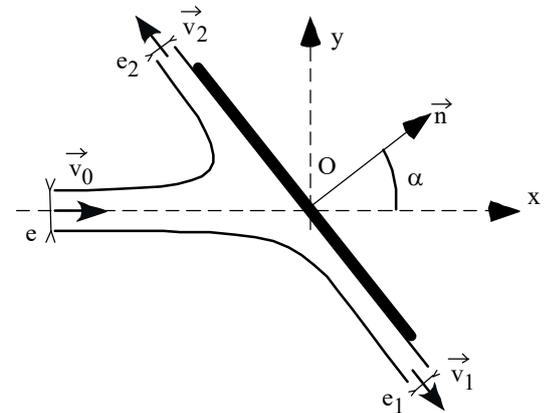
La pression ambiante est  $P_0$ . L'écoulement est stationnaire.

On fera les hypothèses suivantes :

- Le fluide est parfait et incompressible (masse volumique  $\rho$ ).
- Les effets de la pesanteur sont négligés.

1°) Grâce à des relations de Bernoulli et à un bilan de quantité de mouvement, déterminer les épaisseurs  $e_1$  et  $e_2$  des jets glissants sur la plaque. On les exprimera en fonction de  $e$  et  $\alpha$ .

2°) En déduire l'expression de la force exercée par le jet sur la plaque.



## 11 Viscosité

### 1 Écoulement de Poiseuille entre deux plans

Soit un fluide newtonien incompressible de masse volumique  $\mu$ , de viscosité  $\eta$ , en écoulement horizontal entre deux plans situés aux cotes  $z = \frac{h}{2}$  et  $z = -\frac{h}{2}$  de longueurs considérées infinies selon  $(Ox)$  et  $(Oy)$ . L'écoulement est stationnaire. On néglige la pesanteur. Le champ des vitesses est  $\vec{v} = v(x, z) \vec{u}_x$ .

Le mouvement du fluide est dû à un gradient de pression dans la direction  $(Ox)$ .

1°) Montrer que  $v$  ne dépend pas de  $x$  et n'est donc fonction que de  $z$ .

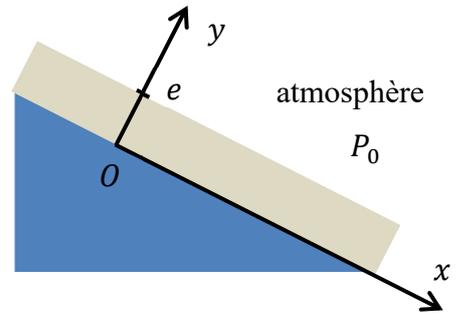
2°) Faire un bilan des forces qui s'exercent sur une particule de fluide occupant un volume élémentaire  $d\tau$ . En déduire la relation  $\sim: \eta \frac{d^2v}{dz^2} \vec{u}_x = \overrightarrow{\text{grad}} P$ .

3°) Montrer que la pression ne dépend pas de  $y$  ni de  $z$ . Montrer que la dérivée de la pression par rapport à  $x$  est une constante, que l'on notera  $K$ , et que l'on supposera négative.

4°) Préciser les conditions aux limites sur la vitesse.

5°) Déterminer  $v(z)$ . En déduire le débit volumique par unité de largeur  $Q_{v\ell}$ .

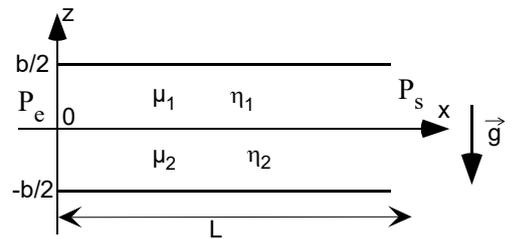
2 On étudie l'écoulement stationnaire, homogène et incompressible d'un liquide visqueux le long d'un plan incliné de largeur  $L$  selon  $(Oz)$ , faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. On note  $\rho$  la masse volumique du fluide et  $\eta$  sa viscosité. La couche de liquide est d'épaisseur uniforme  $e$ . Le champ des vitesses est de la forme  $\vec{v} = v(y)\vec{u}_x$ . On néglige les forces de viscosité exercées par l'atmosphère sur le liquide. La démarche de cet exercice est conforme à celle utilisée dans le cours pour déterminer le profil des vitesses d'un écoulement de Couette plan, sans négliger la pesanteur.



- 1°) Quelle condition aux limites relative au champ des vitesses (ou à sa dérivée) peut-on écrire à l'interface entre l'atmosphère et le liquide ?
- 2°) Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à une particule de fluide, assimilée à un point matériel.
- 3°) La projeter selon  $Oy$  et  $Oz$ , et en déduire une première expression de la fonction pression  $P(x, y)$ , faisant éventuellement intervenir une fonction de  $x$  inconnue. Projeter ensuite selon  $Ox$  et en déduire la véritable fonction  $P(x, y)$ , compte tenu des conditions aux limites.
- 4°) Déterminer la fonction  $v(y)$ , puis le débit massique  $D$ .

### 3 Friction entre deux fluides

On réalise un écoulement de Poiseuille stationnaire de 2 liquides (fluides incompressibles et non miscibles, de masses volumiques  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , et de viscosités dynamiques  $\eta_1$  et  $\eta_2$ ). L'écoulement est stationnaire.  $Oz$  est l'axe vertical ascendant. Le premier fluide est situé entre  $z = 0$  et  $z = +b/2$ . Le second fluide est situé entre  $z = -b/2$  et  $z = 0$ . Les deux fluides sont entre 2 plaques immobiles, situées en  $z = -b/2$  et  $z = +b/2$ .



Elles sont de très grande dimension selon  $Oy$ . On étudie l'écoulement sur une longueur  $L$ , parallèlement à  $Ox$  :  $\vec{v} = v\vec{u}_x$

- 1°) Quelle relation d'ordre existe-t-il entre  $\mu_1$  et  $\mu_2$  ? Justifier
- 2°) On néglige désormais l'effet de la pesanteur, et on admet que la pression ne dépend que de  $x$ . Elle vaut  $P_e$  en  $x = 0$  et  $P_s$  en  $x = L$ , avec  $P_e > P_s$ . Montrer que le champ des vitesses  $v$  ne dépend pas de  $x$ . Quelle(s) est(sont) les variables dont dépend la fonction vitesse  $v$  ?
- 3°) Etablir l'expression du champ des vitesses dans les deux fluides, en introduisant 4 constantes, inconnues à ce stade.
- 4°) Écrire les conditions d'adhérence sur les interfaces solide-fluide. On admet que l'on peut écrire une condition d'adhérence à l'interface entre les deux liquides. Il manque donc encore une équation puisqu'il y a en tout 4 constantes à déterminer. À l'aide du principe des actions réciproques, écrire cette 4<sup>ème</sup> équation. Déterminer alors les 4 constantes.

## 12 Ecoulements dans des conduites

1 Résistances hydrauliques à faibles  $Re$ . Un récipient sous pression (pression  $P_r$ ) contient de l'huile, de viscosité  $\eta$  et de masse volumique  $\mu$ . Dans tout l'exercice le nombre de Reynolds est inférieur à 2000.

- 1°) Un tuyau circulaire de rayon  $R_1$  et de longueur  $L_1$ , relie le récipient à l'atmosphère extérieure ( $P_0$ ). Déterminer le débit volumique avec lequel l'huile sort du récipient. Comment le résultat est-il modifié si on double la longueur du tuyau ? si on double le diamètre du tuyau ?
- 2°) On dispose un tuyau de rayon  $R_2$  et de longueur  $L_2$  au bout du premier. On néglige la perte de charge au niveau du raccord. Déterminer le nouveau débit volumique. Quelle analogie peut-on faire avec l'électricité ?
- 3°) Le récipient sous pression dispose de deux sorties. On branche le tuyau  $(L_1, R_1)$  sur la sortie n°1 et le tuyau  $(L_2, R_2)$  sur la sortie n°2. Déterminer le débit volumique total sortant du récipient. Quelle analogie peut-on faire avec l'électricité ?
- 4°) Un tuyau de longueur  $L$ , rayon  $R$  a-t-il la même résistance hydraulique que  $N$  tuyaux en parallèle, de longueur  $L$  et de rayon  $\frac{R}{\sqrt{N}}$  ? justifier.

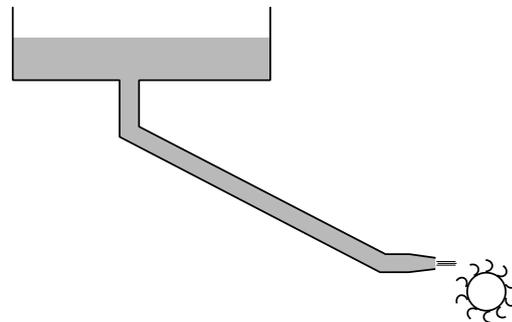
2 Pertes de charges régulières dans une conduite horizontale (pesanteur négligée)

De l'air, de viscosité  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{Pl}$ , de masse volumique  $\mu = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , s'écoule de façon incompressible et stationnaire dans une conduite de rayon  $R = 10 \text{ cm}$  et de longueur  $L = 200 \text{ m}$ , avec un débit volumique  $D_v = 500 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$ . La rugosité du tuyau est  $k = 0,075 \text{ mm}$ .

- 1°) Quelle est la vitesse débitante de l'écoulement ? combien vaut le nombre de Reynolds ? Quel type d'écoulement a-t-on ?
- 2°) Pour maintenir un tel écoulement, horizontal, il faut imposer une différence de pression  $\Delta P = P_e - P_s$  entre l'entrée et la sortie. Calculer cette différence de pression en s'appuyant par l'abaque de Moody distribuée en cours.
- 3°) En déduire la puissance de la pompe qui permet d'assurer cet écoulement.

### 3 Puissance disponible dans une chute d'eau

Un particulier installe dans un site montagneux un dispositif de captage d'eau : un tuyau de rayon  $R_1 = 0,20$  m fait descendre de l'eau depuis une altitude  $z_h = H = 150$  m jusqu'à une altitude  $z_b = 0$ , où se trouve une turbine. La turbine est à l'air libre (turbine Pelton) et alimentée par le jet d'eau qui sort à l'air libre juste devant la turbine.



1°) On adopte le modèle de l'écoulement parfait. Dans cette question, il n'y a pas d'injecteur : le tuyau est de rayon  $R_1$  jusqu'au bout (contrairement au dessin).

Déterminer la vitesse de l'eau dans le tuyau de rayon  $R_1$ , puis la puissance maximale récupérable par la turbine.

2°) Le tuyau de la canalisation qui amène l'eau de la retenue d'eau jusqu'à la turbine, est en fer galvanisé, et mesure  $L = 275$  m de long. Il présente deux coudes, imposant chacun un coefficient de pertes de charge  $\zeta_1 = 0,81$  ; on néglige les pertes de charge à l'entrée du tuyau. À la sortie du tuyau est placé un injecteur, c'est-à-dire un embout de très faible longueur et de petite section (rayon  $R_2 = 5,0$  cm). Cet injecteur envoie le jet d'eau sur une turbine Pelton. Le raccord entre le tuyau et l'injecteur présente un coefficient de pertes de charge  $\zeta_2 = 0,24$  (en prenant comme vitesse débitante celle dans l'injecteur).

On admet que le nombre de Reynolds est supérieur à  $10^6$ . Grâce au diagramme de Moody distribué en cours, déterminer le coefficient  $\lambda$  de perte de charge dans le tuyau. En tenant compte de la réalité de l'écoulement, donner une estimation de la vitesse débitante de sortie de l'eau (c'est-à-dire dans l'injecteur), puis de la puissance maximale récupérable.

3°) Intérêt de l'injecteur : en reprenant, pour simplifier, le modèle du fluide en écoulement parfait, déterminer comment la pression évolue en fonction de  $z$  dans le tuyau, dans le cadre de ce modèle. Pour quelle valeur de  $z$  y a-t-il le plus de risque de cavitation, c'est-à-dire de vaporisation de l'eau ? En quoi l'injecteur permet-il d'éviter la cavitation ?

## 13 Ecoulements externes

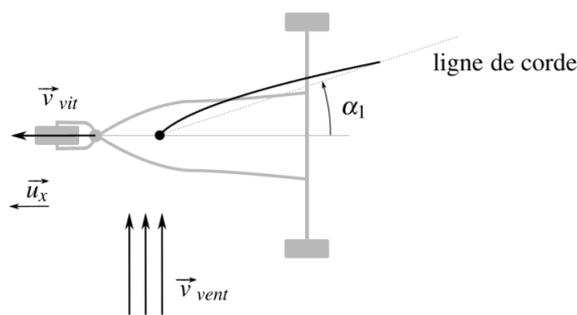
1 Planche à voile à foil : Un véliplanchiste équipe son flotteur d'un foil, afin de naviguer nettement au-dessus de la surface de l'eau, sans être perturbé par les vagues. Le foil est une sorte d'aile d'avion située sous l'eau, d'envergure  $L = 0,50$  m, et de longueur de corde  $\ell = 9,0$  cm. Pour simplifier, on dira que son profil est de type NACA 4412. Le foil est relié à la planche de telle sorte qu'il présente un angle d'incidence de  $8^\circ$ . Estimer la vitesse à partir de laquelle le véliplanchiste pourra naviguer au-dessus de l'eau, comme le montre l'image ci-contre. Et s'il dépasse cette vitesse, pourra-t-il se maintenir à altitude constante, et si oui, comment ?



2 Char à voile : On considère un char à voile qui se déplace en ligne droite dans une direction

orthogonale au vent (voir figure). Son mat à une longueur  $L_1 = 4$  m. La voile a une longueur moyenne de corde  $L_2 = 2,1$  m. On pose  $S = L_1 L_2$ . Pour simplifier, on suppose que son profil est un NACA 4412 (courbes données en classe). La masse volumique de l'air est  $\mu = 1,20$  kg  $\cdot$  m $^{-3}$ . La viscosité de l'air est  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5}$  Pa  $\cdot$  s. Le vent est constant et uniforme, de vitesse  $\vec{v}_{vent}$ , de norme égale à 60 km  $\cdot$  h $^{-1}$ .

1°) Le pilote règle la voile de façon à ce qu'elle fasse par rapport à l'axe du char un angle  $\alpha_1 = 50^\circ$ . Le char avance alors à vitesse constante de norme  $v_{vit} = 40$  km  $\cdot$  h $^{-1}$  selon l'axe Ox. Déterminer le nombre de Reynolds, les coefficients de traînée et de portance de la voile, puis la force propulsive de la voile dans ces conditions. Pourrait-on négliger l'effet de la traînée de la voile ?



2°) On modélise l'ensemble des actions mécaniques qui s'opposent à l'avancement du char (frottements dans les essieux, déformations des pneus,...) par une force  $\vec{F}_{resist} = -K(v_{vit})^2 \vec{e}_x$ . On néglige la traînée de la voile et du chariot jusqu'à la fin de l'exercice. Déterminer la valeur de  $K$ .

3°) Pour la direction du mouvement choisie, orthogonale au vent, le pilote pourrait-il choisir un meilleur angle  $\alpha_1$  de réglage de sa voile ?

4°) Compte tenu de l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds associé à cette étude, le coefficient de portance en dépend assez peu, comme le montre le schéma de gauche de la figure donnant les caractéristiques du NACA4412. Le pilote décide de régler l'angle  $\alpha_1$  à une valeur notée  $\alpha'_1$ , pour obtenir le coefficient de portance maximal, dont on admet la valeur  $C_z = 1,5$ , et l'angle d'incidence associé  $i' = 14^\circ$ . Effectuer un bilan des actions mécaniques qui s'exercent sur le char puis en déduire la relation

$v_{vit}'^2 = \frac{\mu S C_z}{2K} v_{vent} \sqrt{v_{vent}^2 + v_{vit}'^2}$  vérifiée par la nouvelle vitesse  $v_{vit}'$  du char. En déduire la valeur de cette vitesse puis l'angle  $\alpha'_1$ .

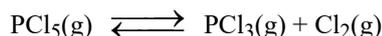
5°) Si on prenait en compte la traînée de la voile (mais pas celle du chariot), comment serait modifiée la réponse à la question 3°) ?

## 14 Equilibres chimiques

1 Pour chacun des composés gazeux qui entrent en jeu dans la réaction de synthèse de l'ammoniac:  $N_2 + 3H_2 \rightleftharpoons 2NH_3$ , les tables thermodynamiques fournissent l'entropie molaire standard  $S^\circ$  à 25°C et l'enthalpie molaire standard de formation à 25°C.

- 1) a) Calculer  $\Delta_r S^\circ$  et  $\Delta_r H^\circ$  pour la synthèse de l'ammoniac.  
b) En déduire  $\Delta_r G^\circ(298)$  ainsi que la constante d'équilibre  $K^\circ(298)$ .
- 2) On suppose (Approximation d'Ellingham) l'entropie standard de réaction et l'enthalpie standard de réaction constantes dans l'intervalle de température : 298K-400K .  
a) Exprimer numériquement dans ce domaine de température l'enthalpie libre standard de réaction  $\Delta_r G^\circ$  en fonction de T.  
b) Exprimer numériquement dans ce domaine de température la loi donnant  $\ln K^\circ = f(T)$ .  
c) Calculer  $K^\circ$  et  $\Delta_r G^\circ$  à 400K. On donne  $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ .

2 On étudie l'équilibre en phase gazeuse de la réaction de dissociation du pentachlorure de phosphore :



- 1°) On suppose l'enthalpie standard de la réaction indépendante de la température :  $\Delta_r H^0 = 92,910 \text{ kJ.mol}^{-1}$   
a) Soit K la constante d'équilibre. Montrer que  $\ln K$  peut se mettre sous la forme :  $\ln K = a/T + b$ .  
b) Calculer a et b sachant qu'à 573K sous  $P^\circ$ , le taux de dissociation de  $PCl_5$  est  $\alpha = 0,95$ ,  $PCl_5$  étant introduit seul.
- 2°) Dans un réacteur à volume constant V, à la température  $T = 529K$ , on introduit 1,00 mol de  $PCl_5(g)$ . La pression initiale avant le début de la réaction est de 2,00 bars. Déterminer la composition du mélange à l'équilibre en calculant les fractions molaires des différents constituants.
- 3°) Dans une enceinte à la température  $T = 529K$ , on introduit 1,00 mol de  $PCl_5(g)$  et 1,00 mol d'Argon sous une pression  $P = 2,00$  bars, cette pression étant maintenue constante au cours de la réaction. Calculer la fraction molaire de chaque constituant à l'équilibre.  
On donne  $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

3 À 450°C on introduit 0,100 mole de  $H_2$  et 0,200 mole de  $CO_2$  dans un récipient de volume constant où l'on a fait le vide. La réaction  $H_{2(g)} + CO_{2(g)} \rightleftharpoons CO_{(g)} + H_{2O(g)}$  (1) a lieu et la pression d'équilibre s'établit à 0,500 bar.

- 1°) L'analyse du mélange montre qu'il contient 10 % en moles d'eau. Calculer la constante  $K_1$  de l'équilibre (1).
- 2°) On introduit alors un mélange de cobalt et d'oxyde de cobalt et il s'établit les équilibres supplémentaires :



L'analyse du nouveau mélange gazeux montre qu'il contient 30 % en mole d'eau, les deux solides CoO et Co étant toujours présents. Grâce à un bilan de matière couplé, portant sur les réactions (2) et (3), déterminer les constantes  $K_2$  et  $K_3$ . Il est inutile de faire un bilan couplé sur les 3 puisque la première est combinaison linéaire des deux autres.

4 On considère l'équilibre :  $CaCO_3(s) \rightleftharpoons CaO(s) + CO_2(g)$  On donne  $M_{Ca} = 40,0 \text{ g.mol}^{-1}$

- 1°) Calculer la variance du système.
- 2°) A 900°C, la constante de cet équilibre est  $K = 1,00$ .  
a) On place 100g de  $CaCO_3(s)$  dans une enceinte fermée thermostatée à 900°C et préalablement vidée, dont le volume est  $V = 2,24 \text{ L}$ . La réaction se déplace-t-elle ? jusqu'où ? Même question pour  $V = 224 \text{ L}$ .  
b) On place 100g de  $CaCO_3(s)$  dans une enceinte fermée thermostatée à 900°C et contenant initialement de l'air. L'enceinte est souple (donc de volume variable) ce qui fait que la pression qui y règne est en permanence égale à la pression extérieure : 1,00 bar. La réaction se déplace-t-elle ? jusqu'où ?

5 On considère : (R1) :  $C_{cr} + CO_{2g} = 2CO_g$  (R2) :  $ZnCO_{3cr} = ZnO_{cr} + CO_{2g}$  (R3) :  $Br_{2liq} + H_{2g} = 2HBr_g$

- 1°) Calculer la variance. Peut-on déplacer ces réactions sans qu'il y ait rupture d'équilibre ? (les proportions initiales des constituants sont quelconques).
- 2°) Quel est l'effet sur ces équilibres d'une augmentation isotherme de pression ?

6 CCP PSI 99 et 00 On s'intéresse aux déplacements de l'équilibre suivant :  $NO(g) + 1/2 O_2(g) \rightleftharpoons NO_2(g)$

- 1- Expliquer le sens de l'évolution, à T constant, pour une augmentation de pression.
- 2- Expliquer le sens de l'évolution, à P constant, pour une augmentation de température.
- 3- On considère dans un réacteur fermé le mélange :  $n_1$  moles de  $NO_2$ ,  $n_2$  moles de  $O_2$  et  $n_3$  moles de  $NO$ . Expliquer le sens d'évolution, à  $T=Cte$ , a) pour un ajout isochore de  $NO$  b) pour un ajout isobare d'Argon c) pour un ajout isobare de  $NO_2$

Données :  $\Delta_f H^\circ(NO_2) = 33,2 \text{ kJmol}^{-1}$

$\Delta_f H^\circ(NO) = 90,2 \text{ kJmol}^{-1}$

## 15 Electrostatique

**1** On considère une sphère creuse, de centre  $O$ , de rayon intérieur  $R_1$ , de rayon extérieur  $R_2$ . L'espace entre  $R_1$  et  $R_2$  porte une charge distribuée en volume avec une densité volumique  $\rho$  uniforme.

1°) Déterminer le champ électrique créé par cette distribution en tout point de l'espace.

2°) En déduire le potentiel électrique  $V$  en tout point, en le prenant nul à l'infini.

3°) Quel est le flux du champ électrique à travers une surface carrée, de côté  $a$ , parallèle au plan  $yOz$ , ayant pour centre le point  $A$ , situé sur l'axe  $Ox$ , en  $x = a/2$ , avec  $a > 2R_2$ . On note que la réponse ne nécessite quasiment aucun calcul.

4°) On ajoute une autre sphère creuse, de centre  $O$  également, de rayon intérieur  $R_3 > R_2$ , de rayon extérieur  $R_4$ . L'espace entre  $R_3$  et  $R_4$  porte une charge distribuée en volume avec une densité volumique  $(-\rho)$  uniforme. On donne  $R_4^3 - R_3^3 = R_2^3 - R_1^3$ . Déterminer le champ électrique à l'extérieur de l'ensemble des deux sphères creuses.

**2** On considère un fil infini d'axe  $Oz$  portant une charge uniformément répartie, avec une densité linéique  $\lambda$ , et  $\vec{E}$  le champ électrique créé par cette distribution de charges.

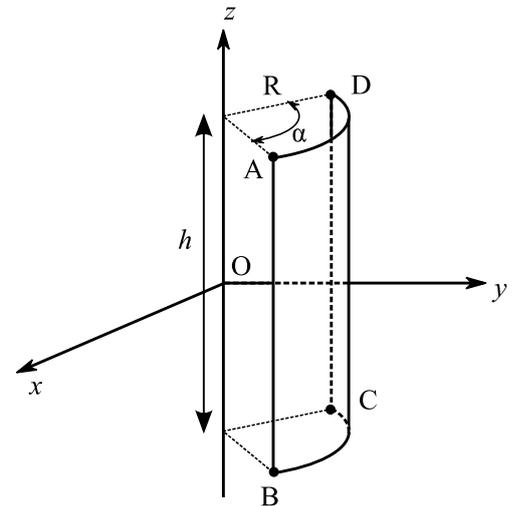
1°) Calculer le flux de  $\vec{E}$  à travers une sphère de rayon  $R$  et de centre  $O$ .

2°) Calculer le flux de  $\vec{E}$  à travers une sphère de rayon  $R$  et de centre  $A$ , situé sur l'axe  $Ox$ , à une distance  $3R$  de  $O$ .

3°) Calculer le flux de  $\vec{E}$  à travers un disque de rayon  $R$ , d'axe  $Oz$  et de centre  $O$ .

4°) La figure ci-contre montre une surface  $S$  constituée d'une portion de cylindre de rayon  $R$ , d'axe  $Oz$ , de hauteur  $h$ , couvrant un secteur angulaire  $\alpha$ . Pour fixer les idées, elle est délimitée par les points  $A, B, C, D$ . Quel est le flux de  $\vec{E}$  à travers cette surface, orientée selon  $+\vec{u}_r$  ?

5°) Quel est le flux de  $\vec{E}$  à travers le rectangle délimité par  $A, B, C, D$  et orienté de façon fuyante par rapport à l'axe ( $Oz$ ) ?



**3** On considère 4 charges ponctuelles : une charge  $+q$  située en  $A_1(1, -1, 0)$ , une

charge  $-q$  située en  $A_2(1, 1, 0)$ , une charge  $+q$  située en  $A_3(-1, 1, 0)$  et une charge  $-q$  située en  $A_4(-1, -1, 0)$ .

1°) Déterminer la direction du champ électrique en un point du plan  $xOz$ , puis en un point du plan  $yOz$ .

2°) Comment est le champ électrique en un point de l'axe  $Oz$  ?

3°) Calculer le champ électrique et le potentiel au point  $A_5(1, 0, 0)$ .

**4** On considère une sphère pleine de centre  $O$ , de rayon  $R$ , uniformément chargée en volume avec une densité de charge  $\rho$ .

1°) Déterminer le champ électrique  $\vec{E}_1$  créé par cette distribution de charges en un point quelconque à l'intérieur de la sphère.

2°) Une cavité sphérique de rayon  $R'$  et de centre  $O'$  est pratiquée dans la sphère (la cavité est entièrement contenue dans la sphère de la question 1°). Dans cette cavité, il y a le vide. Déterminer le champ  $\vec{E}_2$  qui règne en un point quelconque de la cavité.

**5** Déterminer en tout point de l'espace le champ et le potentiel créés par un ensemble constitué d'une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R_1$  uniformément chargée en surface (densité superficielle  $\sigma_1$ ) et d'une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R_2 > R_1$ , uniformément chargée en surface (densité superficielle  $\sigma_2$ ), avec  $\sigma_1 R_1^2 = -\sigma_2 R_2^2$ .

**6** On considère une répartition continue volumique de charges  $\rho$  à l'intérieur d'un volume sphérique de centre  $O$  et de rayon  $R$  de charge totale  $Q > 0$ .  $\rho$  n'est fonction que de  $r$  et se met sous la forme :  $\rho(r) = A r$ ,  $A$  étant une constante.

1°) Exprimer  $A$  en fonction de  $Q$  et  $R$ .

2°) Déterminer les caractéristiques (direction, sens, norme) du champ électrostatique  $\vec{E}$  en tout point de l'espace.

3°) Déterminer le potentiel électrostatique  $V$  en tout point de l'espace, en le prenant nul à l'infini.

**7** Soit le dispositif suivant constitué de deux cylindres coaxiaux de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ), de hauteurs infinies. L'espace situé entre ces deux cylindres ( $R_1 \leq r \leq R_2$ ) est chargé; on caractérise cette distribution de charges par une densité volumique :

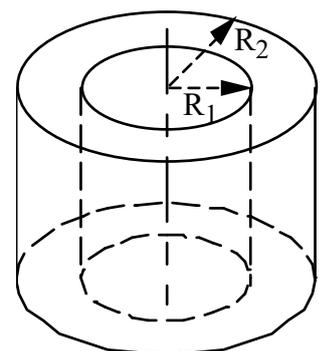
$$\rho(r) = \rho_0 [ 1 + (r/R_2)^2 ] \text{ avec } \rho_0 > 0.$$

1°) Préciser en tout point de l'espace le sens et la direction du champ électrostatique créé par cette distribution de charges. Justifier.

2°) Déterminer en tout point de l'espace  $\vec{E}(M) = E(M) \vec{u}$  où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire dont on précisera clairement la direction et le sens.

3°) En déduire le potentiel électrostatique  $V(M)$  en tout point de l'espace; on posera  $V(R_2) = 0$ .

4°) Calculer la différence de potentiel entre les deux cylindres de rayons  $R_1$  et  $R_2$ .



## 16 Diagrammes potentiel-pH (révisions)

1 On veut tracer le diagramme potentiel-pH du fer pour  $c_{tra} = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol/L}$ . On fera apparaître les espèces chimiques suivantes :  $\text{Fe}(\text{cr})$   $\text{Fe}^{2+}$   $\text{Fe}(\text{OH})_2(\text{s})$   $\text{Fe}^{3+}$   $\text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s})$ . On donne  $E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}(\text{cr})}^0 = -0,44 \text{ V}$  ;  $E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^0 = 0,77 \text{ V}$

- Pour la réaction  $\text{Fe}(\text{OH})_2 = \text{Fe}^{2+} + 2 \text{HO}^-$ , on donne  $\text{pK}_{s2} = 15$ , c'est-à-dire  $K_{s2} = 10^{-15}$ .
- Pour la réaction  $\text{Fe}(\text{OH})_3 = \text{Fe}^{3+} + 3 \text{HO}^-$ , on donne  $\text{pK}_{s3} = 38$ , c'est-à-dire  $K_{s3} = 10^{-38}$ .

1°) Déterminer la frontière de pH entre  $\text{Fe}^{2+}$  et  $\text{Fe}(\text{OH})_2(\text{s})$  puis celle entre  $\text{Fe}^{3+}$  et  $\text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s})$ .

2°) Faire un tableau de synthèse avec le nombre d'oxydation croissant quand on monte dans les lignes et le pH qui augmente quand on se déplace vers la droite.

3°) Déterminer les frontières de potentiel entre  $\text{Fe}(\text{cr})$  et les espèces de degré d'oxydation +II.

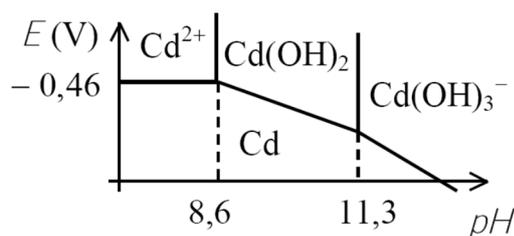
4°) Déterminer les frontières de potentiel entre les espèces de degré d'oxydation +II et celles de degré +III.

5°) Réaliser le tracé du diagramme.

2 On veut tracer le diagramme potentiel-pH du cuivre pour  $c_{tra} = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol/L}$ , en considérant les espèces chimiques suivantes :  $\text{Cu}(\text{cr})$   $\text{Cu}^+$   $\text{Cu}_2\text{O}(\text{s})$   $\text{Cu}^{2+}$   $\text{Cu}(\text{OH})_2(\text{s})$ . On donne

$$E_{\text{Cu}^+/\text{Cu}(\text{cr})}^0 = 0,52 \text{ V} ; E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+}^0 = 0,16 \text{ V}$$

- Pour la réaction  $\text{Cu}_2\text{O}(\text{s}) + \text{H}_2\text{O} = 2\text{Cu}^+ + 2 \text{HO}^-$ , on donne  $\text{pK}_{s1} = 30$ .
- Pour la réaction  $\text{Cu}(\text{OH})_2(\text{s}) = \text{Cu}^{2+} + 2 \text{HO}^-$ , on donne  $\text{pK}_{s2} = 20$ .



1°) Adapter la démarche de l'exercice précédent au cuivre et réaliser un premier tracé.

2°) Il y a des frontières qui se croisent. Pour un pH élevé, on a réussi à découper le plan du tracé en zones affectées chacune à une seule espèce. Mais en-dessous d'un certain pH, ce n'est plus le cas. Quel est ce pH ?

3°) Pour les pH faibles, il y a dismutation : une espèce réagit avec elle-même pour en donner une de degré d'oxydation plus élevée et une de degré plus faible. Quelles sont ces 2 espèces qui apparaissent lors de la dismutation ? Déterminer alors la frontière de potentiel entre ces deux espèces puis reprendre le tracé.

3 On donne le diagramme E-pH du cadmium pour une concentration de tracé  $c_{tra} = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol/L}$ .

a) Déterminer  $E^0(\text{Cd}^{2+}/\text{Cd})$ .

b) Déterminer le produit de solubilité  $K_s$  de  $\text{Cd}(\text{OH})_2$ , c'est-à-dire la constante  $K^0$  de la réaction de dissolution du solide  $\text{Cd}(\text{OH})_2$  en solutés  $\text{Cd}^{2+}$  et  $\text{HO}^-$ .

c) Déterminer la constante de formation du complexe  $\text{Cd}(\text{OH})_3^-$

d) Déterminer les pentes des droites du diagramme.

e) Que se passe-t-il si on place du métal cadmium dans de l'eau pure ?

4 On donne le diagramme  $E=f(\text{pH})$  de l'élément chlore à  $25^\circ\text{C}$ , tracé avec les conventions suivantes :

- la concentration totale en atomes de chlore dans la phase aqueuse,  $c_{tra}$ , est égale à  $0,10 \text{ mol.L}^{-1}$  ;
- la frontière entre espèces dissoutes correspond à l'égalité des concentrations en atomes de chlore ;
- en ne considérant que les 4 espèces chimiques suivantes : dichlore  $\text{Cl}_2$  en solution, acide hypochloreux  $\text{HClO}$ , ion hypochlorite  $\text{ClO}^-$ , et ion chlorure  $\text{Cl}^-$  ;

1°) Identifier chacun des domaines repérés de A à D, en précisant le nombre d'oxydation du chlore dans chacun d'eux.

Dans la suite de l'énoncé, chaque espèce sera désignée par la lettre de son domaine.

2°) Déterminer, à l'aide du diagramme, les potentiels standard  $E^0_1$  et  $E^0_2$  des couples A/B et B/C. En déduire celui du couple A/C.

3°) Ecrire l'équation-bilan de la réaction  $A \rightarrow D$  et déterminer la constante d'équilibre correspondante.

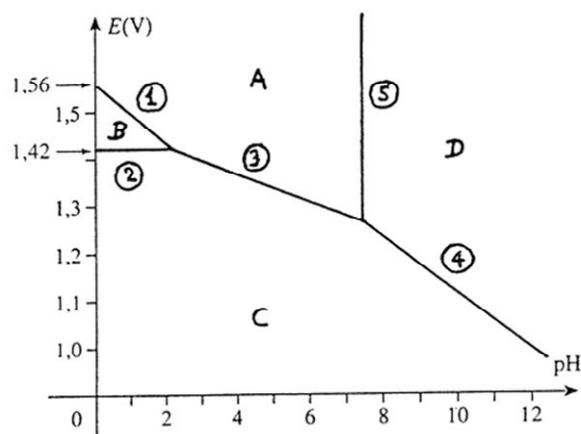
4°) Quels sont les pentes des segments 1, 3 et 4 ? vérifier la correspondance avec le diagramme.

5°) Equilibrer l'équation rédox  $B=A+C$ . Calculer sa constante d'équilibre K.

6°) L'eau de Javel est un mélange -supposé équimolaire- de chlorure de sodium et d'hypochlorite de sodium.

a) Quel est son pH pour  $c_{tra} = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$  ? Quel est le potentiel rédox du système ?

b) Il est fortement déconseillé d'acidifier la solution : justifier cette remarque en décrivant ce qui se passerait lors de l'ajout d'un excès d'acide fort.

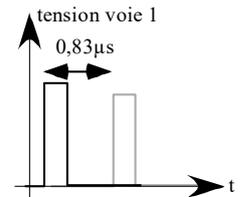
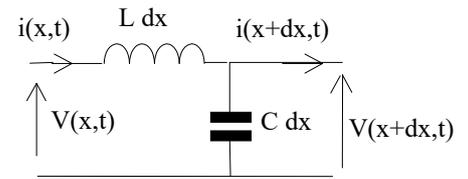


- c) Quand on ajoute de l'eau de Javel dans une solution de sulfate de fer (II) fraîchement préparée, on observe l'apparition d'un précipité brun. Interpréter cette observation en superposant les diagrammes  $E=f(\text{pH})$  des éléments fer et chlore. Ecrire l'équation-bilan de la réaction.

## 17 Ondes 1D dans un milieu non dispersif

1 Un câble coaxial de 100 m de long est branché sur un générateur d'impulsions.

- On adopte le modèle de câble ci-dessus :
  - Déterminer l'équation de propagation vérifiée par  $i$  et  $V$ .
  - En déduire l'expression littérale de la célérité.
  - Si on envoie une impulsion, en arrivant en bout de ligne, le signal est-il (avec ce modèle) atténué ? déformé ?
  - On place un oscilloscope à la sortie du générateur. On y observe l'image ci-contre : Déterminer la vitesse de propagation de l'onde. Que verrait-on à l'oscilloscope si on court-circuitait le câble en sortie ?
- Le modèle utilisé à la question 1 convient-il ? Sinon comment l'améliorer ?



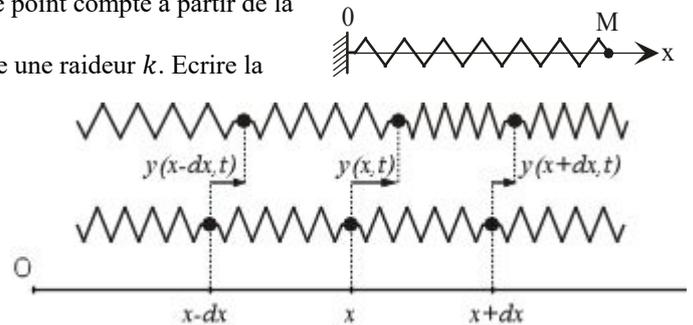
## 2 Ressort massique

Une masse  $M$  peut glisser sans frottement sur un axe horizontal. Elle est attachée à un ressort de masse linéique  $\mu$ , de raideur  $K$ , dont l'autre extrémité est fixée au point  $O$ . A l'équilibre, la longueur du ressort est  $L$ . Chaque point du ressort est alors repéré par son abscisse  $x$ , et on notera  $y(x,t)$  le déplacement de ce point compté à partir de la position  $x$  précédente.

- 1°) Soit une portion du ressort de longueur à vide  $dx$  ; on lui attribue une raideur  $k$ . Ecrire la relation entre  $k$ ,  $dx$ ,  $K$  et  $L$ .

- 2°) On désire établir l'équation du mouvement c'est-à-dire  $y(x,t)$ .

A cet effet, on modélise chaque tranche au repos de longueur  $dx$  du ressort massique par un ressort sans masse et une masse ponctuelle  $\mu dx$ , comme le montre la figure du bas. Ainsi, au repos, toutes les masses élémentaires  $\mu dx$  occupent des positions régulièrement espacées de  $dx$ . Mais lors du passage d'une onde longitudinale, chaque masse élémentaire subit un petit déplacement. Celle qui était en  $x$  au repos, subit à l'instant  $t$  un décalage algébrique  $y(x,t)$ . Déterminer les deux forces auxquelles est soumise la masse élémentaire dont le déplacement est  $y(x,t)$ . En appliquant la RFD à cette masse dans le référentiel du laboratoire, galiléen, et en effectuant un développement limité à l'ordre 2 en  $dx$ , montrer que  $y(x,t)$  obéit à une équation de d'Alembert et déterminer la célérité  $c$  des ondes.

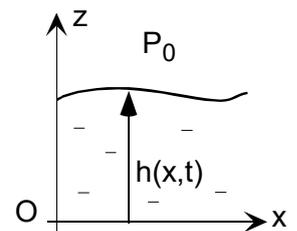


- 2°) On cherche des solutions au problème du ressort massique et de la masse  $M$  sous la forme d'ondes stationnaires :

$y(x,t) = f(x) \cos(\omega t + \varphi)$ . Montrer que les valeurs possibles de  $\omega$  constituent une suite de valeurs discrètes.

## 3 canal à surface libre

On considère un canal rempli d'eau, liquide incompressible de masse volumique  $\mu$ . Le fond du canal est dans un plan horizontal. Au repos, la hauteur de l'eau est uniforme et de valeur  $H_0$ . La pression dans l'air au-dessus du canal est considérée uniforme, de valeur  $P_0$ . On cherche à mettre en équation les ondes de gravité (vagues) qui se propagent dans le canal. On ne tient pas compte des forces de tension superficielle, ni des forces de viscosité. L'écoulement dû aux vagues est considéré comme une petite perturbation par rapport à la situation de repos. Son champ des vitesses est donné par  $\vec{v} = v(x,t)\vec{e}_x$ . En raison des vagues,



la hauteur d'eau devient une fonction  $h(x,t)$ , avec  $|h-H_0| \ll H_0$ . Le champ de pesanteur est uniforme :  $\vec{g} = -g_0\vec{e}_z$ .

- 1°) On admet que, dans le cadre de cet exercice, l'accélération d'une particule de fluide peut s'écrire  $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ .

Appliquer le PFD à une particule de fluide en l'assimilant à un point matériel.

- 2°) Par projections de l'équation, puis en primitivant, établir l'expression de la pression  $P(x,t)$  en fonction de  $P_0$ ,  $z$ ,  $g$ ,  $\mu$  et  $h(x,t)$ .

- 3°) Montrer que  $\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0$ .

- 4°) Le canal a une largeur  $L$ . Grâce à un bilan de masse (ou de volume) pour une tranche  $dx$ , établir que

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hv)}{\partial x} = 0.$$

On pose  $h(x,t) = H_0 + h_1(x,t)$ , avec  $|h_1| \ll H_0$ . Montrer qu'au prix d'une approximation qui se justifie avec les ordres de grandeur, on obtient une équation aux dérivées partielles reliant la dérivée temporelle de  $h_1$  à la dérivée spatiale de  $v$ . Puis montrer que  $h_1$  obéit à une équation de propagation de d'Alembert 1D.

5°) Calculer la célérité en km/h pour  $H_0 = 3$  km. Estimer la période temporelle pour un tsunami de longueur d'onde 150 km.

#### 4 Réflexion et transmission sur une discontinuité

On considère une corde très longue, composée de deux tronçons, l'un de masse linéique  $\mu_1$ , l'autre de masse linéique  $\mu_2$ . La tension est  $T$ . On néglige la masse du nœud en  $x = 0$ .

On suppose que du côté  $x < 0$  arrive une onde incidente :  $y_i(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v_1}\right)$

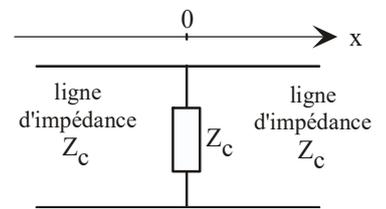
On admet qu'en plus de l'onde incidente, il existe une onde transmise  $y_t(x, t) = \tau f\left(t - \frac{x}{v_2}\right)$  du côté  $x > 0$  et une onde réfléchie  $y_r(x, t) = r f\left(t + \frac{x}{v_1}\right)$  du côté  $x < 0$ . Les coefficients  $r$  et  $\tau$  sont appelés coefficients de réflexion et de transmission en amplitude.

Exprimer deux relations satisfaites par ces ondes au point  $x = 0$  et en déduire l'expression de  $r$  et  $\tau$  (l'une traduisant que les deux cordes sont reliées en  $x = 0$ , l'autre exprimant le principe des actions réciproques). Entre quelles limites peuvent varier  $r$  et  $\tau$ ? Discuter ces cas suivant la valeur du coefficient  $\alpha = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$ .

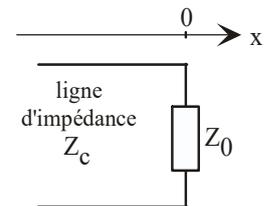
#### 5 Suppression d'une onde réfléchie dans une ligne

Une ligne électrique, sans pertes, d'impédance caractéristique  $Z_c$ , est alimentée par un générateur de tension sinusoïdale de pulsation  $\omega$ . On note  $c$  la célérité des ondes qui s'y propagent.

1°) La ligne s'étend de  $x = -\infty$  à  $x = +\infty$ . De plus, une impédance  $Z_c$  est placée en  $x = 0$ , en parallèle sur la ligne (voir première figure), et on s'intéresse aux ondes de courant et de tension dans la partie  $x < 0$  de la ligne.



a) Montrer que l'onde incidente « voit » en  $x = 0$  une impédance équivalente  $Z_0$  qui s'exprime très simplement en fonction de  $Z_c$  (C'est-à-dire montrer que, pour une onde incidente, tout se passe comme si on avait une ligne d'impédance  $Z_c$  s'étendant de  $x = -\infty$  à  $x = 0$ , avec en bout de ligne, en  $x = 0$ , une impédance  $Z_0$  comme sur la seconde figure).

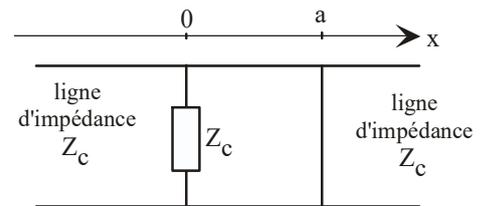


b) Définir et calculer le coefficient de réflexion  $\rho$  en courant et  $\rho'$  en tension de l'onde en  $x = 0$ .

2°) On place en outre un court-circuit en parallèle sur la ligne à l'abscisse  $x = a$ . On adoptera les notations suivantes pour les ondes de courant :

Pour  $x < 0$  :  $\underline{I}_i = \underline{a}_i e^{j(\omega t - kx)}$  et  $\underline{I}_r = \underline{a}_r e^{j(\omega t + kx)}$ ,

Pour  $0 < x < a$  :  $\underline{I}_1 = \underline{a}_1 e^{j(\omega t - kx)}$  et  $\underline{I}_2 = \underline{a}_2 e^{j(\omega t + kx)}$ ,



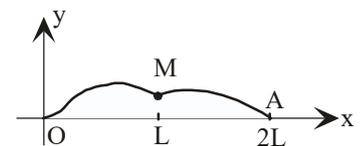
a) Etablir les expressions des tensions correspondantes dans chacun des domaines.

b) En déduire une relation entre  $\underline{a}_1$  et  $\underline{a}_2$ , puis la forme de l'onde de courant entre  $x = 0$  et  $x = a$  ?

c) Montrer qu'il existe des valeurs de  $a$  telles que le courant dans la partie positive de la ligne s'annule en  $x = 0$ . On notera  $a_0$  la plus petite de ces valeurs ( $> 0$ ). Exprimer  $a_0$  en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde de courant dans la ligne. On adopte à présent  $a = a_0$ . En déduire, dans ces conditions, le coefficient de réflexion en courant en  $x = 0$ . Conclure.

6 Une corde, sans raideur, homogène, de masse  $m$ , de longueur  $2L$ , est fixée en

ses 2 extrémités O et A. Elle est maintenue tendue par une force de tension. Par hypothèse, sa norme  $T$  reste constante quelle que soit la déformation (supposée petite) de la corde. La corde est lestée en son milieu par une masse  $M$  ponctuelle.



Les petits déplacements de la corde sont dans le plan  $xOy$  et on néglige les forces de pesanteur.  $\psi_1(x,t)$  et  $\psi_2(x,t)$  désignent respectivement les déplacements de la partie gauche ( $0 \leq x \leq L$ ) et de la partie droite ( $L \leq x \leq 2L$ ) de la corde.

1°) En considérant la masse  $M$ , écrire 2 relations liant  $\psi_1$  et  $\psi_2$  en  $L$ .

2°) En cherchant des solutions sinusoïdales stationnaires (de même pulsation pour  $\psi_1$  et  $\psi_2$ ), déterminer les pulsations  $\omega_n$  des modes propres de vibration de la corde (2 cas sont à envisager). Commenter brièvement.

7 Un câble coaxial est modélisé par une succession de cellules du type de celle dessinée ci-contre.

- 1°) Déterminer les équations aux dérivées partielles vérifiées par  $i$  et  $v$ .
- 2°) En déduire la célérité  $c$  de propagation des ondes de tension dans le câble.

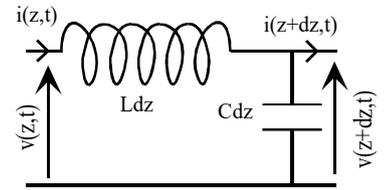
Application numérique avec  $L = 0,3 \text{ mH.km}^{-1}$  et  $C = 500 \text{ nF.km}^{-1}$ .

3°) Les solutions de l'équation de propagation pour la tension peuvent s'écrire de façon générale  $v(z,t) = v_+(z-ct) + v_-(z+ct)$ . Comment peut-on qualifier chacun des deux termes ? Montrer qu'à l'onde de tension progressive  $v_+(z-ct)$  est associée une onde de courant progressive  $i_+(z-ct) = (1/R_c) v_+(z-ct)$  et qu'à l'onde de tension régressive

$v_-(z+ct)$  est associée une onde de courant régressive  $i_-(z+ct) = -(1/R_c) v_-(z+ct)$ , et que donc l'onde de courant globale peut s'écrire :  $i(z,t) = (1/R_c)[v_+(z-ct) - v_-(z+ct)]$  avec  $R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

4°) On prend une longueur  $\ell$  d'un tel câble. On branche une tension sinusoïdale de pulsation  $\omega$  à l'entrée (en  $z = 0$ ). On utilise donc la notation complexe. On branche une impédance  $Z_\ell$  en sortie (en  $z = \ell$ ). On définit le coefficient de réflexion complexe en tension par  $\rho(z) = \frac{v_-(z+ct)}{v_+(z-ct)}$ . Exprimer  $\rho(\ell)$  en fonction de  $R_c$  et  $Z_\ell$  (pour y parvenir, on écrira

le lien entre  $v(\ell, t)$  et  $i(\ell, t)$  imposé par la présence de  $Z_\ell$ , et on utilisera la relation de la fin du 3°) en  $z = \ell$ , en notation complexe).



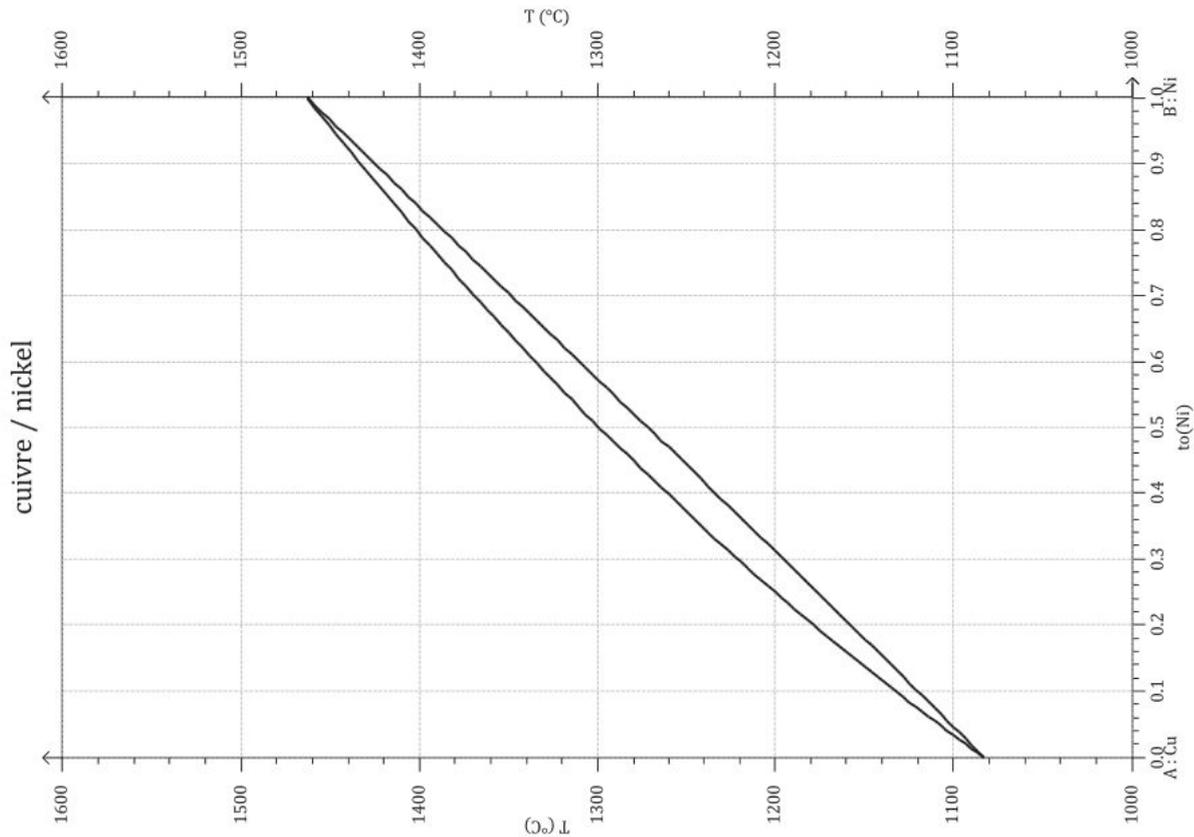
## 18 Diagrammes binaires

### Applications directes du cours :

- 1°) Calculer la variance d'un système binaire solide-liquide dont les phases liquide et solide sont totalement miscibles, avec un seul fuseau, dans chaque cas d'états physiques possibles (liquide, liquide+solide, solide).
- 2°) Calculer la variance d'un système binaire solide-liquide sans composé défini, dont la phase liquide est totalement miscible, et la phase solide a une miscibilité nulle, dans chaque cas d'états physiques possibles (on commencera par faire la liste des états physiques à envisager).
- 3°) Démontrer le théorème des moments chimiques dans le cas d'un diagramme binaire avec un seul fuseau, en utilisant les fractions molaires.

**Exercice-1 : Étude d'un mélange binaire cuivre/nickel** Le diagramme binaire isobare solide-liquide du système cuivre-nickel est donné en annexe. En abscisse figure la composition massique en nickel du mélange.

- 1°) Justifier que les solides sont miscibles, d'après la forme du diagramme.
  - 2°) Déterminer la température de fusion de ces deux métaux
  - 3°) Identifier les deux courbes, les trois domaines qu'elles définissent et la variance dans chacun d'entre eux.
  - 4°) Un mélange liquide de cuivre et nickel commence à se solidifier à  $1200^\circ\text{C}$ . En déduire :
    - a) la composition du mélange et celle du premier cristal qui apparaît ;
    - b) la composition de la dernière goutte qui disparaît.
  - 5°) Un mélange liquide de cuivre et nickel a une fraction molaire en cuivre  $x_{Cu}^\ell = 0,40$ . Déterminer :
    - a) la composition du mélange en fraction massiques ;
    - b) la température de début de solidification du mélange ;
    - c) la composition en fraction massique de la dernière goutte de liquide qui disparaît.
  - 6°) Tracer la courbe d'analyse thermique de refroidissement d'un mélange de fraction massique 0,3 en Ni.
- On donne :  $M(Cu) = 63,5 \text{ g.mol}^{-1}$  et  $M(Ni) = 58,7 \text{ g.mol}^{-1}$



### Exercice-2 : diagramme binaire solide liquide NiO/MgO

1. On étudie le système binaire liquide – solide NiO – MgO à 1,013 bar.  
 a. Construire le diagramme binaire NiO – MgO, à l'aide des données suivantes :

|          |       |       |       |       |       |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $t$ (°C) | 1 960 | 2 200 | 2 400 | 2 600 | 2 800 |
| $x_1^s$  | 0,00  | 0,35  | 0,60  | 0,83  | 1,0   |
| $x_1^l$  | 0,00  | 0,18  | 0,38  | 0,65  | 1,0   |

L'oxyde de magnésium(II), MgO, est noté 1 et l'oxyde de nickel(II), NiO, est noté 2.

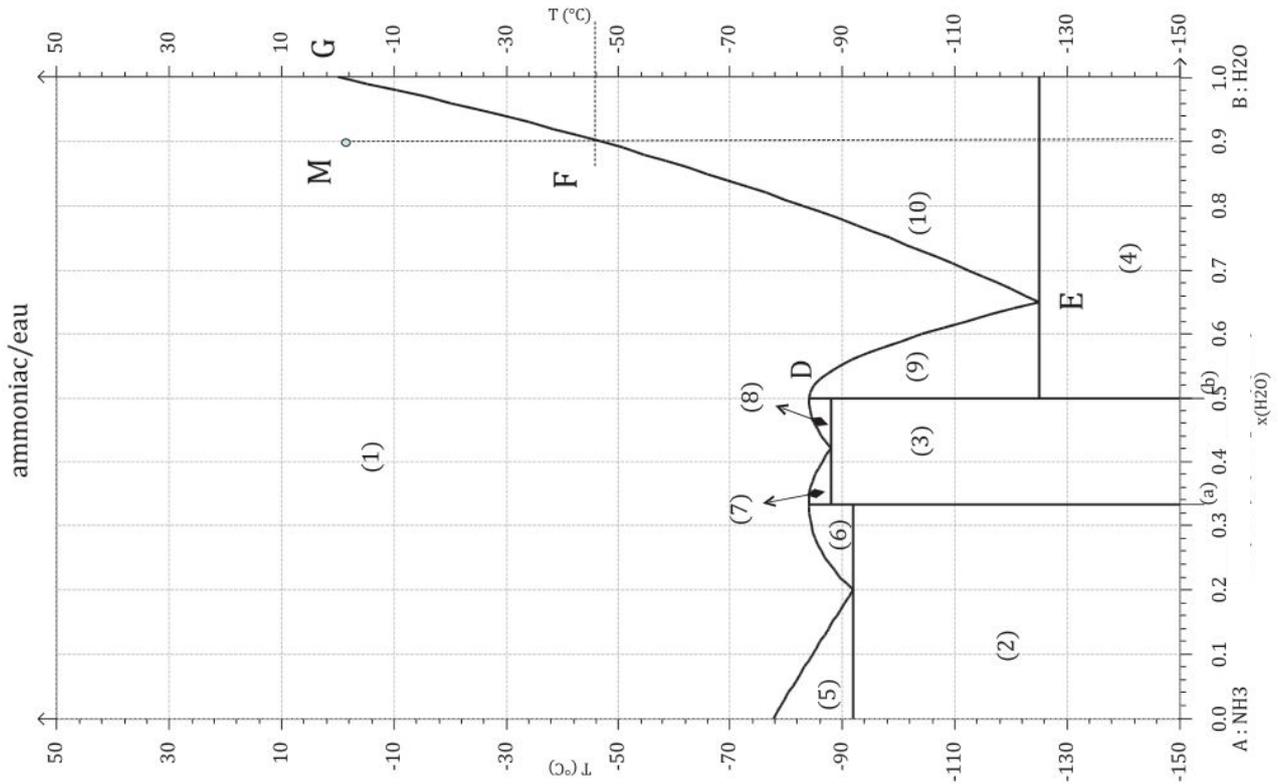
Les fractions molaires portées en abscisse sont celles de l'oxyde de magnésium(II), MgO, notées  $x_1^s$  dans la phase solide et  $x_1^l$  dans la phase liquide.

Echelles : en abscisse 1 cm  $\longleftrightarrow$  0,10 ; en ordonnée 1 cm  $\longleftrightarrow$  100°C (grader à partir de 1 800°C).

- b. Indiquer sur le diagramme le nom des courbes tracées.  
 c. Définir la variance d'un système chimique et indiquer sa valeur dans les différentes zones du graphe ainsi que sur les courbes qui délimitent ces zones.

Dans tout ce qui suit le diagramme sera complété avec les constructions et les points nécessaires à la justification des réponses données.

2. Quelle est la température de fusion de l'oxyde de nickel(II) ?  
 3. Quelle est la température de fusion commençante d'un mélange solide de composition  $x_1^s = 0,30$  ?  
 4. Quelles sont les phases en présence d'un mélange de titre global  $X_1 = 0,30$  porté à 2200°C ? Déterminer le rapport des quantités de matière des deux phases.  
 5. On se place dans le domaine liquide au point de composition.  $x_1^l = 0,70$ .  
 a. À quelle température ce liquide commence-t-il à se solidifier ? Quelle est la composition de la phase solide à cette température ?  
 b. À quelle température ce liquide achève-t-il de se solidifier ? Quelle est la composition de la phase liquide à cette température ?  
 c. Tracer la courbe de refroidissement de ce mélange, légèrer cette courbe et justifier le sens du changement de pente observé entre le début et la fin de la cristallisation.



**Exercice-3 : Binaire eau ammoniac** Le diagramme de cristallisation des mélanges eau/ammoniac est fourni ci-dessus en abscisse se trouve la fraction molaire en ammoniac. Les compositions (a) et (b) correspondent respectivement à des teneurs de 33% et 50% en quantité de matière d'eau dans le mélange.

- 1°) Quelle est la formule des composés correspondant à (a) et (b) ?
- 2°) Indiquer la nature des phases dans les domaines numérotés de 1 à 10 sur la figure.
- 3°) On plonge 1,0 kg d'une solution ammoniacale (point M) de la figure, contenant 90% d'eau en moles dans une enceinte maintenue à la température de  $-196\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Quelle sera l'allure de la courbe de refroidissement au cours du temps ? Justifier l'existence des différentes parties de la courbe. Déterminer la nature et la masse de chacun des solides présentes à  $-196\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

On donne  $M_N = 14\text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ ,  $M_H = 1,0\text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ ,  $M_O = 16\text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$

**Exercice-4 : Etude du diagramme binaire solide-liquide  $\text{SO}_3\text{-H}_2\text{SO}_4$**

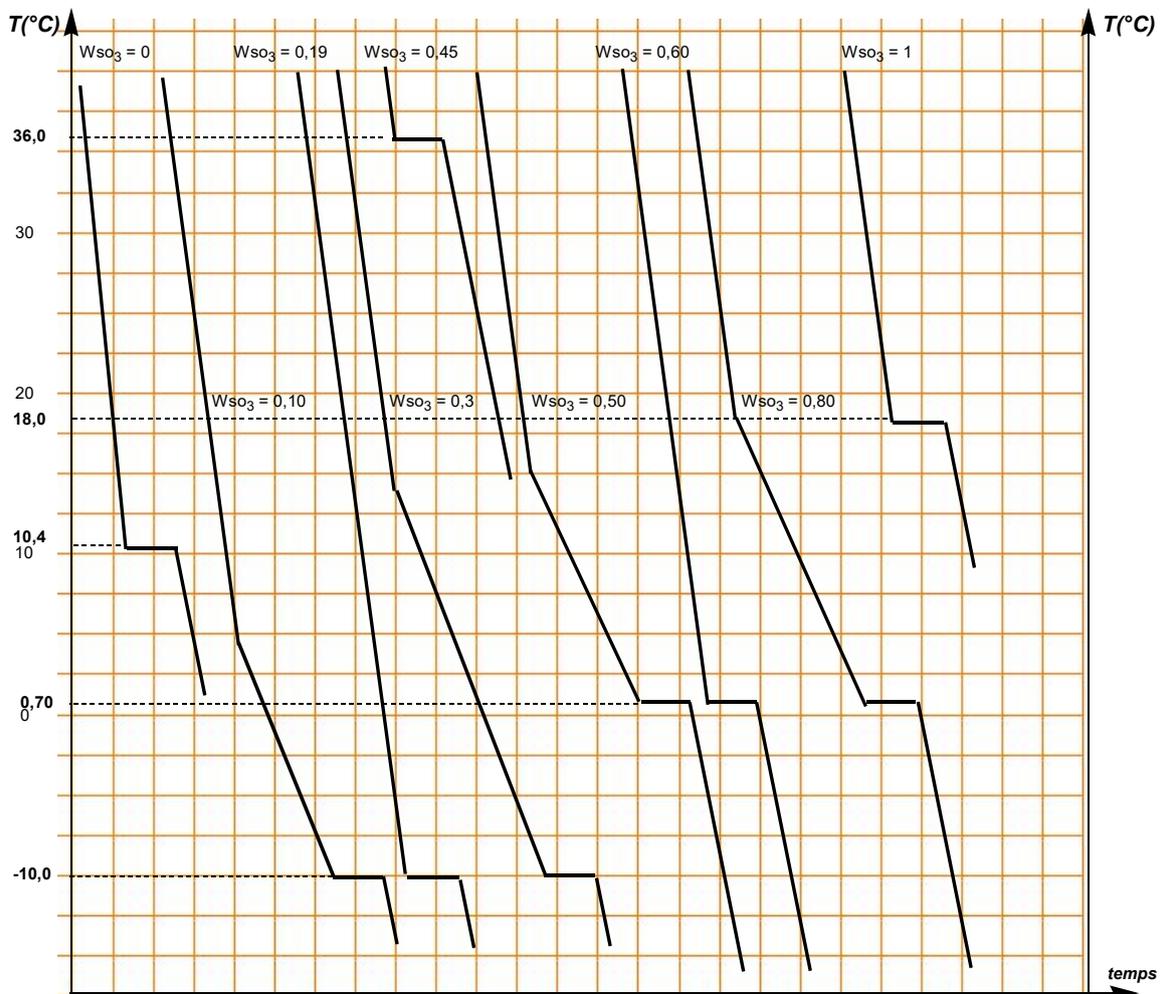
On donne  $M_{\text{SO}_3} = 80\text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$  et  $M_{\text{H}_2\text{SO}_4} = 98\text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

On souhaite construire et exploiter le diagramme binaire solide-liquide de  $\text{SO}_3\text{-H}_2\text{SO}_4$ . On présente ci-après un réseau de courbes d'analyse thermique de refroidissement isobare (9 courbes au total) permettant de suivre l'évolution de la température d'un système  $\text{SO}_3\text{-H}_2\text{SO}_4$ , de différentes fractions massiques en  $\text{SO}_3$ , indiquées à côté de la courbe correspondante. On note  $w_{\text{SO}_3}$  la fraction massique en  $\text{SO}_3$  du mélange, la pression étant fixée à 1 bar.

- 1 Justifier les ruptures de pente observées sur certaines courbes d'analyse thermique de refroidissement isobare.
- 2 Il apparaît pour les fractions massiques,  $w_{\text{SO}_3} = 0,19$  et  $0,60$ , des courbes d'analyse thermique remarquables.

Quel nom peut-on donner aux points du diagramme binaire solide-liquide de  $\text{SO}_3\text{-H}_2\text{SO}_4$  en ces deux compositions ?

- 3 Quelle propriété physique remarquable présentent les mélanges correspondants ?
- 4 Justifier, pour ces mélanges, l'existence d'un palier dans la courbe d'analyse thermique.
- 5 Mêmes questions pour la courbe d'analyse thermique de fraction massique  $w_{\text{SO}_3} = 0,45$ .
- 6 Calculer la valeur de la fraction molaire,  $x_{\text{SO}_3}$ , pour la fraction massique  $w_{\text{SO}_3} = 0,45$ , et en déduire la composition de la phase solide apparaissant pour une température inférieure à  $36\text{ }^{\circ}\text{C}$  en ce point du diagramme binaire solide-liquide.
- 7 Construire, grâce au réseau de courbes, l'allure du diagramme binaire solide-liquide isobare  $T=f(w_{\text{SO}_3})$  du mélange  $\text{SO}_3\text{-H}_2\text{SO}_4$ . Indiquer, le nombre et la nature des phases présentes dans les différents domaines du diagramme.



Courbes d'analyse thermique de refroidissement isobare

## 19 Magnétostatique

**1** Un câble coaxial est constitué d'un cylindre conducteur d'axe  $Oz$  et de rayon  $R_1$ , d'une partie isolante cylindrique, de même axe, s'étendant de  $R_1$  à  $R_2 > R_1$ , de perméabilité magnétique  $\mu_0$ , et d'un cylindre conducteur creux, d'axe  $Oz$ , s'étendant de  $R_2$  à  $R_3 > R_2$ . On suppose l'ensemble infiniment étendu selon  $Oz$ . Le cylindre intérieur est parcouru par un courant  $I$  orienté dans le sens  $+\vec{u}_z$  (avec  $I > 0$ ), et uniformément réparti (on pourra utiliser la densité de courant en volume  $\vec{j}_1 = j_1 \vec{u}_z$ , avec  $j_1$  à calculer). Le retour du courant se fait par le conducteur extérieur ; il y circule donc le courant  $I$  mais cette fois orienté dans le sens  $-\vec{u}_z$ , et uniformément réparti (on pourra utiliser la densité de courant en volume  $\vec{j}_2 = j_2 \vec{u}_z$ , avec  $j_2$  à calculer).

1°) Déterminer le champ magnétique partout dans l'espace.

2°) On cherche l'énergie magnétique  $\mathcal{E}_m(\ell)$  emmagasinée dans une tranche de longueur  $\ell$  du câble. On rappelle que la densité volumique d'énergie magnétique est  $e_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$ . Écrire la formule permettant de calculer  $\mathcal{E}_m(\ell)$  sans effectuer les calculs d'intégrales. On note  $\Lambda$  l'inductance linéique du câble coaxial. Sachant que l'énergie magnétique dans une longueur  $\ell$  du câble est  $\mathcal{E}_m(\ell) = \frac{1}{2} \Lambda I^2$ , écrire la formule permettant de déterminer  $\Lambda$ . Puis, pour simplifier, limiter le domaine d'intégration à  $[R_1, R_2]$  et calculer  $\Lambda$ .

3°) Souvent, on a  $R_3 - R_2 \ll R_2$ . On modélise alors le conducteur externe par un cylindre sans épaisseur (avec des courants qualifiés de « surfaciques », ; on parle aussi de « nappe de courant »). Reprendre le calcul du champ magnétique partout dans ces conditions (sauf pour  $r = R_2$  où il n'est pas défini), puis celui de  $\Lambda$ .

**2** On considère plusieurs cas de regroupements de 2 distributions de courant. Dire dans chaque cas si l'interaction mécanique entre les deux est attractive ou répulsive :

1°) 2 fils infinis, parallèles, parcourus par des courants de même sens.

2°) 2 faisceaux d'électrons parallèles, l'un montant, l'autre descendant.

3°) Un fil infini, parcouru par un courant ascendant, et un faisceau d'électrons, parallèle au fil, également ascendant.

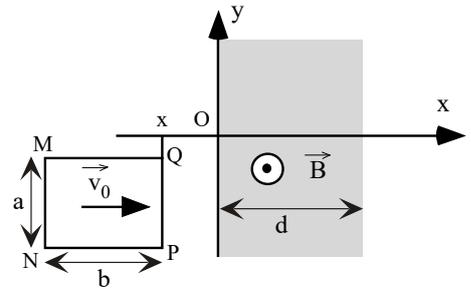
**3** On considère une nappe infinie de courant c'est-à-dire une distribution de courant infiniment étendue selon  $x$  et  $y$ , comprise entre  $z = -a$  et  $z = a$ , et à l'intérieur de laquelle le courant circule en volume avec une densité uniforme  $\vec{j} = j \vec{u}_x$ . Il n'y a pas de courants en dehors de cette zone. Déterminer le champ magnétique partout.

**4** On se place en coordonnées cylindriques. On considère un solénoïde épais, c'est-à-dire pour lequel le courant circule en volume avec une densité  $\vec{j} = j_0 \vec{u}_\theta$ , pour  $a \leq r \leq b$ , et  $\vec{j} = \vec{0}$  pour  $r < a$  et pour  $r > b$ .  $j_0$  est une constante.

Déterminer le champ magnétique partout, en admettant que le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde.

## 20 ARQS

1 Soit un cadre métallique rectangulaire, de résistance  $R$ , d'inductance négligeable, de masse  $m$ . Il glisse sans frottements sur un plan horizontal, et est initialement animé d'une vitesse  $v_0$  parallèlement à  $Ox$ . Un champ magnétique stationnaire  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$  n'existe que dans la zone  $0 \leq x \leq d$ , où il est uniforme.



1°) Décrire succinctement les phénomènes qui entrent en jeu et comment se comporte le cadre lorsqu'il entre dans la zone où existe le champ magnétique.

2°) Justifier qualitativement qu'il n'y a que les forces magnétiques qui entrent en compte.

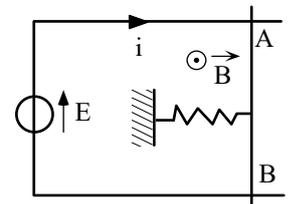
3°) Déterminer l'équation différentielle du mouvement de translation du cadre (équation en  $v(t)$ ) puis la résoudre.

4°) En déduire la fonction  $v(x)$  et montrer que c'est une fonction affine.

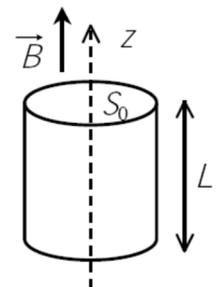
5°) Déterminer la variation de vitesse  $\Delta v_1 = v_0 - v_1$ , où  $v_1$  est la vitesse du cadre lorsqu'il commence à être entièrement dans le champ magnétique. On introduira la constante  $\alpha = \frac{mR}{B_0^2 a^2}$ .

6°) Déterminer la variation de vitesse  $\Delta v_2 = v_0 - v_2$ , où  $v_2$  est la vitesse du cadre lorsqu'il sort entièrement du champ magnétique.

2 Déterminer l'équation du mouvement de la barre AB de masse  $m$ , de longueur  $a$  en régime sinusoïdal forcé, en présence d'une force de frottements  $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$ . La résistance de la barre est  $R$ , et la raideur du ressort  $k$ . Les rails sont dans un plan horizontal. Le champ magnétique est stationnaire.



3 Un cylindre conducteur, de hauteur  $L$  selon l'axe  $Oz$ , de conductivité  $\gamma$  et de section  $S_0 = \pi R^2$ , est placé dans un champ magnétique  $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$  imposé par des sources extérieures. On suppose que le champ électrique induit dans le conducteur est de la forme  $\vec{E} = E_0(r, t) \vec{u}_\theta$ .



$$\text{En cylindrique : } \text{rot} \vec{F} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

a) Calculer le champ électrique dans le cylindre (en utilisant la formule ci-dessus, pas comme dans le cours).

b) Calculer la puissance moyenne dissipée par les courants de Foucault dans l'ensemble du cylindre.

En fait, ces courants induisent un champ magnétique  $\vec{B}_i = B_i(t) \vec{e}_z$ .

c) Pourquoi est-il légitime de négliger le courant de déplacement ? Estimer  $B_i$ . Quelle condition doit-on imposer à  $R$  pour que le champ induit soit négligeable devant le champ exciteur ?

## 21 Ferromagnétisme

### 1 Détermination des champs $\vec{B}$ et $\vec{H}$

Un circuit électrique comportant  $N$  spires parcourues par un courant stationnaire d'intensité  $I$  est enroulé autour d'un noyau ferromagnétique torique d'axe  $Oz$ . Le matériau est doux et on reste très en dessous de la saturation. Les dimensions de la section du tore étant faibles devant le rayon moyen du tore, on considère les champs uniformes sur une section.

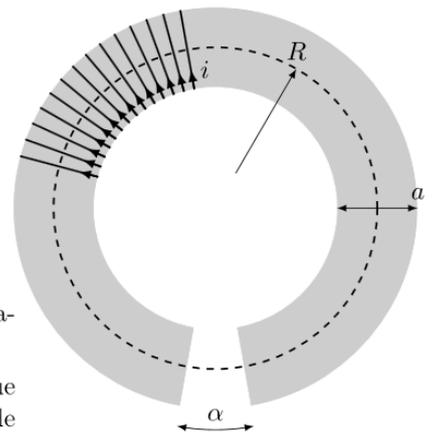
1. Donner une relation entre le champ magnétique et l'excitation magnétique dans le matériau. Proposer un ordre de grandeur.

2. Appliquer le théorème d'ampère pour exprimer l'excitation, puis le champ magnétique en fonction de  $I$ .

## 2 Electroaimant torique

On étudie le champ créé dans l'entrefer d'un électroaimant torique.

Celui-ci est constitué d'un matériau ferromagnétique LHI de perméabilité magnétique  $\mu_r$ . Tout le matériau magnétique est recouvert d'un bobinage ( $N$  spires) parcouru par un courant d'intensité  $i$ . L'entrefer a une ouverture angulaire  $\alpha$  suffisamment petite pour supposer que les lignes de champ ont la même géométrie que si l'entrefer n'existait pas. Le tore a un rayon moyen  $R$  et une section suffisamment petite pour que les rayons extérieur et intérieur soient tous les deux assimilables à  $R$  :  $a \ll R$ , et on suppose que les champs sont uniformes sur une section du tore.



1. En précisant les approximations faites, établir une relation entre les excitations magnétiques  $\vec{H}_1$  dans l'entrefer et  $\vec{H}_2$  dans le matériau magnétique.
2. Rappeler la relation de passage pour la composante normale du champ magnétique lors de la traversée d'une interface. Cette relation demeure-t-elle vraie en présence de matière aimantée? En déduire l'expression du champ magnétique  $\vec{B}_1$  dans l'entrefer de l'aimant.
3. Donner la valeur numérique de  $\|\vec{B}_1\|$  pour  $N = 800$ ,  $i = 5,0$  A,  $\mu_r = 5,0 \cdot 10^3$ ,  $\alpha = 5,0^\circ$  et  $R = 10$  cm. Commenter l'influence des différents paramètres sur l'intensité du champ magnétique dans l'entrefer. Conclure sur la géométrie la mieux adaptée pour produire un champ magnétique intense.
4. Pour réaliser un électroaimant, vaut-il mieux utiliser un matériau magnétique dur ou doux?

## 3

On considère un circuit magnétique torique, de section  $S$  et rayon moyen  $R$ , réalisé en matériau ferromagnétique doux de perméabilité  $\mu$ . Un entrefer d'épaisseur  $e$  est ménagé dans le circuit magnétique. On supposera que la largeur de l'entrefer est suffisamment faible pour que l'on puisse considérer que la géométrie des lignes de champ n'est pas modifiée. D'autre part, les champs sont considérés uniformes sur une section, leur valeur étant déterminée à la distance  $R$  de l'axe du tore.

Un circuit électrique de  $N$  spires enlace le tore, il est parcouru par un courant d'intensité  $I$ . On rappelle que l'énergie magnétique se distribue dans l'espace avec une densité volumique  $\frac{B^2}{2\mu}$  où  $B$  et  $\mu$  correspondent au champ magnétique et à la perméabilité magnétique au point considéré.

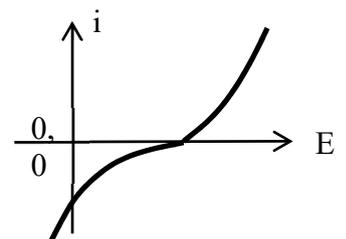
1. Exprimer l'énergie magnétique emmagasinée dans le fer, dont on notera  $L = 2\pi R$  la longueur. On mettra le résultat en fonction du flux  $\Phi$  du champ magnétique à travers une section du tore, de l'excitation magnétique  $H_f$  dans le milieu et de la longueur  $L$ .
2. Faire de même avec l'entrefer.
3. Exprimer le rapport entre ces deux énergies et commenter.
4. Pour un matériau de perméabilité relative  $\mu_r = 1000$  et un rapport  $\frac{e}{L} = 0,1$ , quelle erreur commet-on en considérant que l'énergie magnétique est totalement comprise dans l'entrefer?

## 22 Courbes courant-potentiel

1 La figure donne la courbe courant-potentiel pour une électrode de cuivre (utilisée d'abord en anode puis en cathode, afin de relever successivement les deux parties de la courbe) et une solution de sulfate de cuivre  $\text{CuSO}_4$  à  $0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Préciser les  $\frac{1}{2}$  réactions électrochimiques mises en jeu.

2°) Si on pousse le potentiel trop loin, on voit apparaître un palier sur l'une des deux branches. Laquelle? pourquoi? compléter qualitativement le diagramme.

2 1°) La figure 1 donne les potentiels d'équilibre (loi de Nernst) pour différents couples, compte tenu de leurs activités dans la solution. À l'aide de cette figure 1 (sur laquelle les échelles ne sont pas respectées, et sur laquelle les espèces présentes dans la solution électrolysée sont celles en noir),



prévoir les réactions qu'on devrait observer, d'un point de vue thermodynamique, aux deux électrodes, lors de l'électrolyse d'une solution de chlorure d'étain(II), acidifiée à pH=0 avec de l'acide chlorhydrique.

2°) On réalise une électrolyse d'une solution d'étain (II) à pH=0, avec des électrodes de graphite. On observe que, lorsqu'on fait croître la différence de potentiel  $U_{AC} = V_A - V_C$  entre l'anode et la cathode, il ne se passe rien tant qu'on n'a pas atteint une certaine valeur, à partir de laquelle il se produit un dégagement de dichlore à l'anode, et il se forme de l'étain métallique à la cathode. Interpréter ces résultats à l'aide de la figure 2.

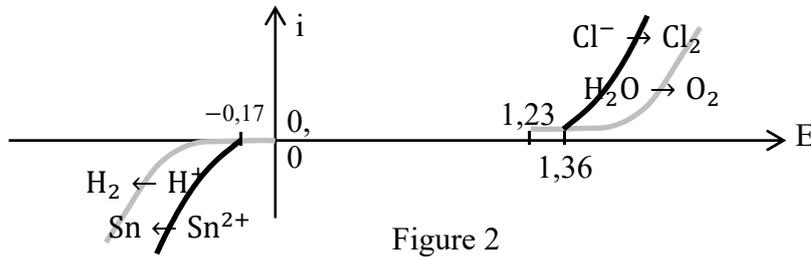


Figure 2

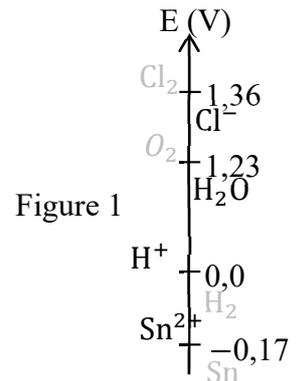


Figure 1

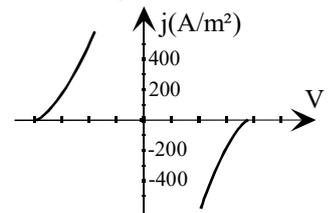
**3** On effectue l'électrolyse d'une solution de sulfate de zinc (II) acidifiée à l'acide sulfurique.

1°) L'intensité est maintenue constante et égale à 3,5 A. Quelle est la masse maximale de zinc que l'on peut obtenir au bout de 50 min. ? On donne  $M_{Zn} = 65,4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

2°) Dans la pratique, la masse de zinc obtenue est inférieure. Pour quelle raison ?

3°) On définit le « rendement faradique »  $\eta_F$  de l'électrolyseur par le rapport de l'intensité servant vraiment à l'obtention du métal à l'intensité totale. Le calculer si la masse de zinc réellement obtenue est de 3,20 g.

**4** On considère une pile formée d'une électrode en argent qui trempe dans une solution de nitrate d'argent, et d'une électrode de zinc, qui trempe dans une solution de nitrate de zinc. Les deux solutions ont une concentration de  $0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Entre les deux, on place une paroi poreuse. On donne  $E^\circ(\text{Ag}^+/\text{Ag}) = 0,80 \text{ V}$  et  $E^\circ(\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}) = -0,76 \text{ V}$ . L'ion nitrate est supposé électro-inerte.



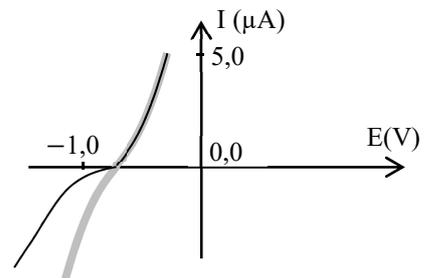
1°) Déterminer les pôles de la pile.

2°) Trouver l'équation de la réaction globale.

3°) Déterminer le potentiel de chaque électrode lorsque la pile ne débite pas et la f.é.m. de la pile à vide. Quelle est l'échelle horizontale ?

4°) On branche la pile sur une résistance, de sorte que le courant débité soit de 100 mA. Calculer la f.é.m. E aux bornes de la pile sachant que la surface de l'anode est de  $5 \text{ cm}^2$  et celle de la cathode  $2,0 \text{ cm}^2$ .

**5** Le document ci-contre donne les courbes courant-potential pour une électrode de zinc au contact d'une solution de sulfate de zinc  $\text{ZnSO}_4$  à  $0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  (courbe grise épaisse), puis d'une solution de sulfate de sodium  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  de même concentration (courbe noire fine). Leur pH est voisin de 5. On rappelle que  $\text{HSO}_4^-$  et  $\text{SO}_4^{2-}$  et  $\text{Na}^+$  ne sont pas électroactifs pour cette solution. Dans les deux cas, l'électrode est d'abord utilisée en anode puis en cathode, pour relever les deux morceaux de courbe.



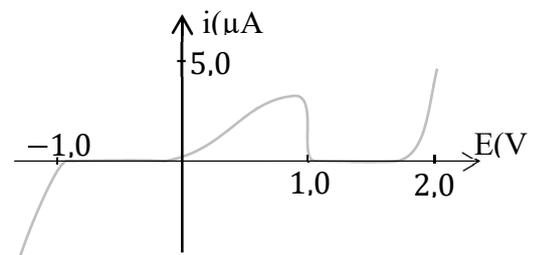
1°) Ecrire et classer toutes les demi-réactions anodiques et cathodiques envisageables dans les conditions expérimentales décrites. Donner les valeurs des potentiels d'équilibre à chaque fois. On donne  $E^\circ(\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}) = -0,76 \text{ V}$ .

2°) Préciser, en justifiant, les demi-réactions auxquelles correspondent les différentes parties des deux courbes.

3°) Si on augmente la tension, on voit apparaître un palier sur l'une des branches. Laquelle ? De quoi dépend ce palier ?

**6** Le document ci-contre présente l'allure d'une courbe courant-potential enregistrée avec une électrode de plomb comme électrode de travail et comme électrolyte, une solution d'acide sulfurique imposant un pH=0.

1°) Ecrire et classer toutes les  $\frac{1}{2}$  réactions cathodiques et anodiques envisageables, sachant que  $\text{HSO}_4^-$  et  $\text{SO}_4^{2-}$  ne sont pas électroactifs pour cette solution.



2°) Préciser, en justifiant, les demi-réactions auxquelles correspondent vraisemblablement les différentes parties de la courbe.

3°) En déduire que l'emploi d'une électrode de plomb comme anode inattaquable est rendu possible grâce à une passivation du métal, dont on précisera la nature.

4°) Donner un ordre de grandeur des surtensions au démarrage, sur le plomb, pour le dégagement de dioxygène, puis pour le dégagement de dihydrogène.

On donne les potentiels standard : 0,0 et 1,23 V pour les deux couples de l'eau à pH=0 ;  $E^\circ(Pb^{2+}/Pb) = -0,13 V$  ;  $E^\circ(PbO_2/Pb) = 0,63 V$ .

## 23 Diffusion de particules

1) Au sein d'un milieu homogène, considérons un ensemble de particules dont la concentration n'est pas uniforme. Ces particules peuvent être des molécules, des atomes ou des ions, des défauts ponctuels, des électrons libres, etc ... Dans l'hypothèse d'une diffusion unidirectionnelle, leur densité (ou concentration) particulière  $n(x,t)$  dépend de leur position le long de la direction Ox.

En 1855, dans le cadre de ses travaux sur les mélanges de gaz et de liquides, Adolf Fick proposa la loi phénoménologique de diffusion. Cette loi introduit le coefficient de diffusion (ou diffusivité) D et relie le vecteur densité volumique de particules  $\vec{j}_D$  au gradient de concentration particulière n.

1°) Citer la loi physique sur laquelle Fick s'est appuyé pour élaborer sa théorie.

2°) Rappeler la loi de Fick ; expliquer le caractère « phénoménologique » de cette loi. Justifier l'existence d'un flux de particules et son orientation relative vis à vis du gradient de concentration.

La loi de Fick ne faisant apparaître que les variations spatiales de la concentration particulière à un instant t, il convient de la compléter par une équation de bilan lorsque le flux de particules varie au cours du temps. Considérons un cylindre infiniment long, de section S constante, parallèle à la direction Ox de la diffusion.

3°) Effectuer un bilan de matière sur un volume de section S et d'épaisseur dx pour établir une relation traduisant la conservation du nombre de particules. En déduire l'équation de la diffusion :  $\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ .

4°) Par une analyse dimensionnelle, établir une relation qualitative exprimant la longueur caractéristique L du phénomène de diffusion en fonction de l'ordre de grandeur  $\tau$  de sa durée et du coefficient de diffusion D.

5°) Réécrire l'équation de la diffusion dans le cas où le coefficient D varie avec la concentration de l'espèce diffusante.

En réalité, l'écoulement des particules dans une direction donnée peut avoir deux origines : l'une est la diffusion induite par le gradient de concentration, l'autre est la convection provoquée par l'action d'une force extérieure (dite force de transport) qui déplace les particules avec une vitesse moyenne V constante.

6°) Exprimer simplement le vecteur densité volumique de particules  $\vec{j}_T$  pour la seule convection en fonction de v et n(x,t). Compléter la loi de Fick pour obtenir une nouvelle équation de la diffusion dans le cas particulier où D et v sont indépendants de la densité de particules.

Pour illustrer la diffusion, considérons la situation expérimentale du dopage d'un semi-conducteur d'arséniure de gallium (AsGa) avec du silicium. A l'instant  $t = 0$ ,  $N_0$  atomes de silicium par unité de surface sont brusquement introduits en  $x = 0$ , à la surface d'une plaquette d'AsGa considérée comme un milieu semi-infini. L'analyse du régime instationnaire montre que le nombre d'atomes de silicium  $N(x,t)$  par unité de volume à l'abscisse x et à l'instant t s'écrit :  $N(x,t) = \frac{K}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right)$ .

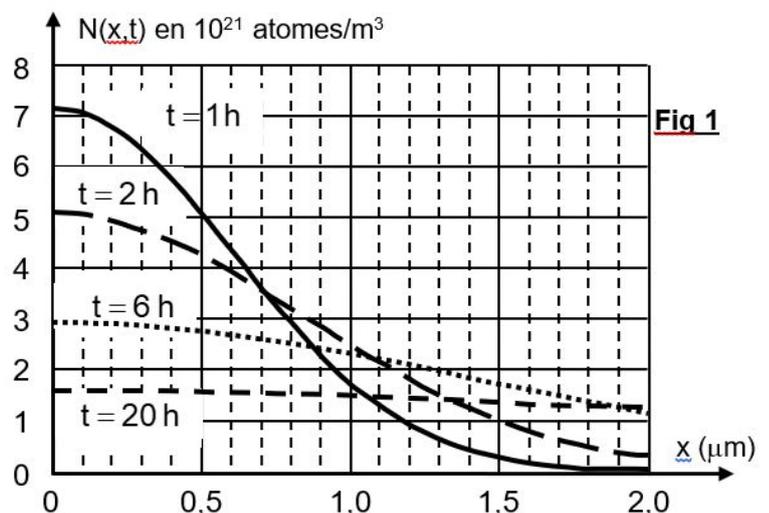
7°) Etablir la relation entre a et D, pour que la répartition d'atomes  $N(x,t)$  soit solution de l'équation de diffusion établie en 3°. Traduire la conservation du nombre d'atomes

introduits et, par le changement de variable  $u = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$  se

référant aux compléments mathématiques en fin d'épreuve, déterminer la valeur de K en fonction de  $N_0$  et D.

Le schéma (Fig. 1) traduit le résultat du dopage de la plaquette d'AsGa : l'évolution de la distribution des atomes de silicium est tracée en fonction de l'abscisse x, à différents instants.

8°) Analyser la forme des courbes obtenues. Que vaut l'aire sous chacune de ces courbes ? Déterminer, à un instant t donné (en adoptant par exemple  $t = 1$  h), la profondeur d'implantation L des atomes de silicium correspondant à une concentration moitié de la concentration en  $x = 0$  (il s'agit de la demi-largeur à mi-hauteur).



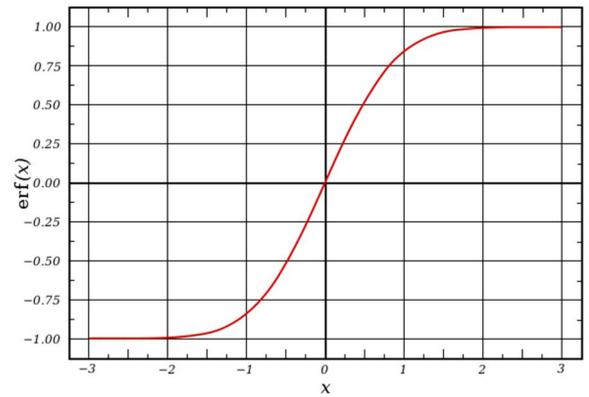
9°) Proposer un mode de détermination du coefficient de diffusion D du silicium dans AsGa. Estimer l'ordre de grandeur du coefficient de diffusion D.

**Définition de la fonction erf** :  $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-s^2) ds$

**Propriétés de erf(x)** :  $\text{erf}(x) = -\text{erf}(-x)$      $\text{erf}(0) = 0$

$\text{erf}(\pm\infty) = \pm 1$

**Représentation de la fonction erf** : ci-contre



2 On étudie la sédimentation de particules suffisamment petites pour que l'agitation thermique limite l'accumulation de particules au fond du récipient. Un tube vertical de section S, de hauteur L, contient un solvant incolore et N particules de couleur bleue. A t = 0, la solution est homogène. On note  $\rho_m$  la masse volumique des particules et  $\rho_s$  celle du solvant, avec  $\rho_m > \rho_s$ . La concentration des particules en un point M d'ordonnée z ne dépend que de z. On la note C(z).

1°) Comment va évoluer la couleur de la solution ? Justifier qualitativement en 3 lignes maximum.

2°) Chaque particule (masse m) est soumise à son poids, à la poussée d'Archimède et à une force de frottement visqueux  $\vec{F} = -\frac{\vec{v}}{\mu}$ , où  $\mu$  est une constante.

a) Préciser la dimension de  $\mu$ . En appliquant le principe fondamental de la dynamique, trouver la vitesse des particules et montrer que celle-ci tend vers une vitesse limite que l'on déterminera.

b) En déduire la densité volumique de courant de particules  $\vec{j}_g$  due à la gravitation.

3°) Il apparaît alors une hétérogénéité de concentration : C(z) donc un courant de diffusion de particules. Ecrire la densité volumique de courant de particules  $\vec{j}_d$  due à la diffusion (on notera D le coefficient de diffusion).

4°) En régime stationnaire, montrer que la concentration C(z) peut s'écrire  $C(z) = C(0)e^{-z/H}$  et donner l'expression de H.

Application numérique : les particules sont des macromolécules de masse molaire  $M = 5 \cdot 10^4 \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ .  $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .  $D/\mu = 4,1 \cdot 10^{-21} \text{ S.I.}$   $\rho_s = 1 \text{ kg}\cdot\text{dm}^{-3}$ .  $\rho_m = 1,3 \text{ kg}\cdot\text{dm}^{-3}$ . Calculer H.

Rép :  $\vec{v}_{\text{lim}} = \mu m \vec{g} \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_m}\right)$      $\vec{j}_g = C(z) \mu m \vec{g} \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_m}\right)$      $\vec{j}_d = -D \overrightarrow{\text{grad}} C$      $H = \frac{D}{\mu m g \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_m}\right)} = 2,2 \text{ cm}$

## 24 Diffusion thermique

1 On étudie un modèle destiné à expliquer pourquoi un opérateur posant sa main sur une table en bois et une en acier, à la même température, a l'impression que le bois est plus chaud que l'acier. Deux cylindres de même section S, de même axe Ox, de conductivités thermiques  $K_1$  et  $K_2$ , de longueurs  $L_1$  et  $L_2$  sont mis bout à bout, le contact s'établissant en  $x = 0$ . On maintient les extrémités  $x = -L_1$  et  $x = L_2$  des deux cylindres aux températures respectives  $T_1$  et  $T_2$ . On étudie le régime stationnaire.

1°) Etablir l'expression de T(x) dans les cylindres en fonction de  $T_1$ ,  $T_2$ , x,  $L_1$ ,  $L_2$  et de la température  $T_0$  en  $x = 0$ .

2°) En déduire que la température  $T_0$  à l'interface est un barycentre de  $T_1$  et  $T_2$ .

On prend  $T_1 = 37^\circ\text{C}$  (main) et  $T_2 = 20^\circ\text{C}$  (acier ou bois), et on suppose  $L_1 = L_2$ . On donne les conductivités thermiques de la main  $K_1 = 0,60 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ , du bois  $K_2 = 0,2 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  et de l'acier  $K_2 = 50 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

Calculer  $T_0$  pour un contact main-bois, puis pour un contact main-acier. Commenter.

2 Des panneaux pour l'isolation thermique sont constitués d'une plaque de plâtre d'épaisseur  $e_1 = 10 \text{ mm}$  associée à une plaque de polystyrène d'épaisseur  $e_2$ . Le fabricant donne la résistance thermique pour des panneaux de  $1,0 \text{ m}^2$ , selon la valeur de  $e_2$  :

|   |     |      |      |      |
|---|-----|------|------|------|
| $e_2$ (mm)  | 20  | 30   | 40   | 50   |
| R ( $\text{m}^2\cdot\text{K}\cdot\text{W}^{-1}$ ) | 0,5 | 0,73 | 0,97 | 1,21 |

1°) Déduire de ces données la conductivité thermique  $\lambda_1$  du plâtre et celle  $\lambda_2$  du polystyrène.

2°) On utilise des panneaux (10+50) pour recouvrir, à l'intérieur d'une maison, un mur de pierre. Le polystyrène est du côté du mur. La pierre est d'épaisseur  $e_0 = 30 \text{ cm}$  et de conductivité  $\lambda_0 = 0,82 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ . La température extérieure est  $T_{\text{ext}} = -5,0^\circ\text{C}$ , et la température intérieure est  $T_{\text{int}} = +20^\circ\text{C}$ . Calculer la température à chaque interface.

3°) En fait, pour tenir compte des phénomènes conducto-convectifs au niveau des contacts air/paroi, on peut utiliser la loi de Newton ou, ce qui revient au même, rajouter dans le modèle une résistance thermique, liée à la valeur du coefficient h de la loi de Newton. On donne la valeur de cette résistance, pour une surface de  $1,0 \text{ m}^2$  de l'interface air/paroi :  $R_s = 0,17 \text{ m}^2\cdot\text{K}\cdot\text{W}^{-1}$ . Comparer les pertes avec et sans isolation, en tenant compte de la conducto-convection dans les deux cas.

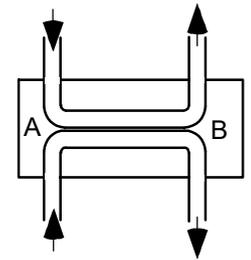
3 Soient deux sphères concentriques, de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2 > R_1$ , aux températures  $T_1$  et  $T_2$ . L'espace entre les deux sphères est rempli d'un matériau M de conductivité thermique  $\lambda$ .

- 1°) Établir l'équation de diffusion générale en 3D puis la résoudre dans le milieu conducteur en régime stationnaire (c'est-à-dire pour  $T_1$  et  $T_2$  indépendantes du temps, grâce à un système extérieur qui maintient cette différence de températures) en utilisant l'expression du laplacien en coordonnées sphériques (cf formulaire) donc avec une méthode différente de celle du cours.
- 2°) Déterminer l'expression de la résistance thermique du milieu.
- 3°) Dans cette question les températures  $T_1$  et  $T_2$  ne sont plus maintenues constantes, mais varient lentement (ARQS thermique). Les deux sphères ont la même capacité thermique  $C$  et une très grande conductivité thermique. La capacité thermique du conducteur est négligée, ce qui permet de se placer dans le cadre de l'ARQS. Déterminer les lois d'évolution  $T_1(t)$  et  $T_2(t)$ , en prenant pour valeurs initiales  $T_{10}$  et  $T_{20}$ .
- 4°) Exprimer les variations d'entropie des sphères et du milieu. Commenter.

**4** Un biberon est dans un four à micro-ondes qui fournit une puissance volumique  $\varphi_v$  au lait. Le lait occupe un cylindre de rayon  $r_1$ . La paroi de verre est de rayon extérieur  $r_2$ . On note  $e = r_2 - r_1$  et on suppose  $e \ll r_1$ . On note  $\lambda_v$  et  $\lambda_l$  les conductivités thermiques du verre et du lait. On souhaite maintenir le biberon tiède, en attendant le réveil de bébé ! Le four fonctionne donc à puissance faible et on suppose que l'on a atteint un régime de fonctionnement stationnaire de l'ensemble.

- 1°) Etablir les équations thermiques dans chaque partie, en expliquant les approximations éventuelles (pb quasi 1D dans le verre).
- 2°) Etablir les lois de température dans chaque partie, sachant que  $T(r_2) = T_{\text{ext}}$ .

**5** 2 liquides  $L_1$  (chaud) et  $L_2$  (froid) s'écoulent dans le même sens dans 2 canalisations séparées et en contact thermique. Une section est repérée par son abscisse  $x$ , comprise entre 0 (point A) et  $L$  (point B).  $L_1$ , de capacité thermique massique  $c_1$ , circule de A vers B, avec un débit massique  $D_{m1}$ . En régime stationnaire, sa température varie selon une loi  $T_1(x)$ . On définit de même  $c_2$ ,  $D_{m2}$  et  $T_2(x)$  pour  $L_2$ .  $L_1$  pénètre en A à la température  $T_{1A}$ , connue, et ressort en B à la température  $T_{1B}$ .  $L_2$  pénètre en A à la température  $T_{2A}$ , connue, et inférieure à  $T_{1A}$ , et ressort en B à la température  $T_{2B}$ .



Les échanges thermiques entre les 2 canalisations sont supposés suivre une loi linéaire : du fait des transferts thermiques conductifs dans les parois, et conducto-convectifs aux interfaces solide-liquide, la puissance thermique  $dP_{\text{th}}$  cédée par  $L_1$  à  $L_2$  au niveau d'une tranche de longueur  $dx$  est  $dP_{\text{th}} = G(T_1 - T_2) dx$ ,  $G$  étant une constante connue.

- 1°) Faire un bilan d'énergie pour un système fermé, à définir, afin de relier  $dT_1/dx$  à  $T_1(x)$  et  $T_2(x)$ . On notera que ce système fermé, en écoulement, pourra regrouper, à deux instants très proches, des sous-systèmes tous deux infinitésimaux.
- 2°) A l'aide d'une méthode analogue, relier  $dT_2/dx$  à  $T_1(x)$  et  $T_2(x)$ .
- 3°) Quelle méthode pourrait-on envisager pour résoudre le système de 2 équations différentielles couplées obtenu ?

**6** Soit une tige d'aluminium semi-infinie sur l'axe des  $x > 0$ , de section  $S$ , de rayon  $a$  et de conductivité thermique  $\lambda$ . Le problème est « quasi-unidimensionnel », c'est-à-dire qu'on considère que la température dans la tige est uniquement fonction de  $x$ , bien qu'il y ait des échanges latéraux, en plus du flux thermique principal le long de l'axe du cylindre. Le régime est stationnaire. La tige est en contact en O avec un thermostat à la température  $T_e$ , et latéralement avec un fluide de température uniforme  $T_0$ . L'échange thermique avec le fluide correspond à un flux par unité de surface :  $h(T - T_0)$ .

- 1°) Soit  $\phi(x)$  le flux thermique à travers une section droite de la tige dans le sens  $x$  croissant. Lier  $d\phi/dx$  à  $\theta(x) = T(x) - T_0$ .
- 2°) Trouver les équations différentielles vérifiées par  $\phi(x)$  et  $\theta(x)$ . Les résoudre en introduisant une longueur caractéristique  $\ell_0$ .
- 3°) Représenter  $\theta(x)$ . On utilise ce système comme ailette de refroidissement. Justifier. Est-ce nécessaire d'avoir une tige de grande longueur ? Transfert thermique obtenu grâce à l'ailette. Application ?

## 25 Puissance électrique

**1 Application directe du cours** On travaille dans cet exercice à une pulsation  $\omega = 1,0 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ .

- 1°) On considère un dipôle  $A_1B_1$  (d'impédance complexe  $\underline{Z}_1$ ), formé d'une résistance  $R_1 = 100 \Omega$  en série avec une self  $L = 0,10 \text{ H}$ .
  - a) Ce dipôle  $A_1B_1$  est traversé par un courant sinusoïdal de valeur efficace  $I_{\text{eff}} = 10 \text{ mA}$ . Calculer la valeur efficace  $U_{1\text{eff}}$  puis l'amplitude  $U_{\text{max}1}$  de la tension aux bornes du dipôle  $A_1B_1$ . Quelle est la puissance moyenne consommée par le dipôle  $A_1B_1$  ?
  - b) L'origine des temps est choisie de telle sorte que le courant dans  $A_1B_1$  s'écrive sous la forme  $i(t) = I_{\text{eff}}\sqrt{2} \cos(\omega t)$ . Déterminer la tension  $u_1(t)$  aux bornes de  $A_1B_1$  en fonction du temps.
  - c) A présent, l'origine des temps est choisie de telle sorte que  $u_1(t) = U_{1\text{eff}}\sqrt{2} \cos(\omega t)$ . Déterminer la nouvelle fonction  $i(t)$  et la nouvelle puissance moyenne consommée par le dipôle  $A_1B_1$ .

2°) On considère un dipôle  $A_2B_2$ , d'impédance complexe  $\underline{Z}_2$ , formé d'une résistance  $R_2 = 100 \Omega$  en parallèle avec un condensateur de capacité  $C = 10 \mu\text{F}$ .

Ce dipôle  $A_2B_2$  est traversé par un courant sinusoïdal de valeur efficace  $I_{\text{eff}} = 10 \text{ mA}$ . Calculer la valeur efficace  $U_{2\text{eff}}$  de la tension aux bornes du dipôle  $A_2B_2$  et la puissance moyenne consommée par celui-ci.

## 2 Application directe du cours

Soit un dipôle d'impédance complexe  $\underline{Z}$  constitué d'une association en série d'une résistance  $R$  et d'une bobine d'inductance  $L$ . Il est soumis à une tension alternative sinusoïdale d'amplitude  $U_m$  et de fréquence  $f_0$ .  $U_m = 325 \text{ V}$ .

- 1°) Donner l'expression littérale de la puissance moyenne qu'il consomme. A.N. pour  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 9,0 \text{ mH}$ , et  $f_0 = 50 \text{ Hz}$ .
- 2°) Même questions pour une association en parallèle de  $R$  et  $L$ , puis pour  $R$  en série avec  $C = 250 \text{ nF}$ , puis pour  $C$  en série avec  $L$ .

### 3 Relèvement d'un facteur de puissance

Soit un dipôle d'impédance complexe  $Z$  consommant une puissance moyenne  $P = 1,0\text{kW}$ , fonctionnant sous la tension efficace  $V = 200\text{ V}$ , et de facteur de puissance  $\cos\phi_1 = 0,60$  (l'intensité étant en retard sur la tension). La fréquence est  $f = 50\text{Hz}$ . Quelle capacité  $C$  faut-il placer aux bornes de  $Z$  pour que le facteur de puissance de l'ensemble soit de 1 ?

Rép :  $C = 0,11\text{mF}$

### 4 Installation domestique :

Un particulier (230 V, 50 Hz) dispose de plusieurs appareils ménagers :

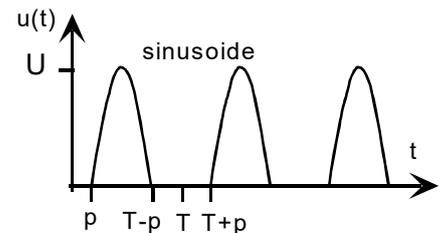
- \* Une machine-à-laver, assimilable (pour simplifier beaucoup !) à un ensemble série  $R_1, L_1$ .
- \* Une lampe halogène 1,15 kW, assimilable à une résistance  $R_2$ .
- \* Des lampes 23W, assimilables à des résistances  $R_3$ .

Lorsque la machine à laver est seule en fonctionnement, le courant efficace délivré par le réseau EDF est  $I' = 4,0\text{ A}$   
 Lorsque la machine à laver et la lampe halogène sont en fonctionnement, le courant efficace délivré est  $I'' = 8,0\text{ A}$ .

- 1°) Les différents appareils sont-ils branchés en série ? en parallèle ?
- 2°) Déterminer l'intensité efficace  $I_1$  du courant dans la machine et l'intensité efficace  $I_2$  du courant dans la lampe halogène lorsque les 2 sont en fonctionnement.
- 3°) Tous les appareils sont branchés sur une même ligne protégée par un disjoncteur 10A (valeur efficace). Combien (au maximum) l'usager peut-il allumer de lampes 55W en plus de l'halogène et de la machine-à-laver sans faire disjoncter ?
- 4°) Pourrait-on, en ajoutant un condensateur en parallèle sur les autres appareils, faire en sorte qu'il soit possible d'allumer davantage de lampes 55W par rapport à ce que l'on a trouvé au 3°) ? Si oui, quelle est la valeur de la capacité  $C$  ? et quel est le nouveau nombre maximum de lampes 55W que l'on peut allumer en plus de l'halogène et de la machine-à-laver ?

### 5

1°).a) Calculer la valeur moyenne de  $u(t)$ , sachant que chaque arche est un morceau de sinusoïde en  $U \sin(\omega t + \varphi)$ , et que  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

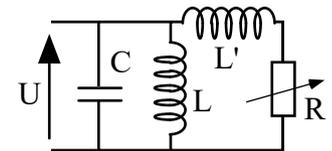


b) Déterminer la puissance moyenne  $\mathcal{P}$  reçue par une résistance de  $R$  lorsqu'elle est soumise à la tension  $u(t)$ .

2°) Exprimer la valeur efficace de  $u(t)$  en fonction de  $R$  et  $\mathcal{P}$ .

### 6 Mesure de puissance.

Le circuit représenté ci-contre est alimenté par une tension sinusoïdale de valeur efficace  $U = 230\text{ V}$  et de fréquence 50,0 Hz. La résistance  $R$  est variable. On donne  $L=1,00\text{ H}$  et on désigne par  $P$  la puissance moyenne absorbée par ce circuit. On sait que :



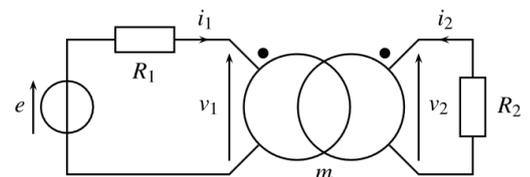
- pour  $R = R_0 = 12,0\ \Omega$ ,  $P$  est maximale et vaut  $P_{\max}$ .
- pour  $R = R_1$  ( $R_1 < 12,0\ \Omega$ ), le facteur de puissance est égal à 1,00 et  $P = 800\text{ W}$ .

Calculer  $L'$ ,  $P_{\max}$ ,  $R_1$  et  $C$ .

Rép :  $L' = 38,2\text{ mH}$   $P_{\max} = 2,02\text{ kW}$   $R_1 = 2,48\ \Omega$   $C = 265\ \mu\text{F}$

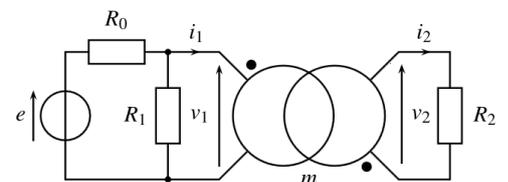
## 26 Transformateurs

1 Une source de tension alternative, de résistance interne  $R_1$ , alimente le primaire d'un transformateur, de rapport de transformation  $m$ . Quelle valeur donner à  $m$  si on veut maximiser la puissance moyenne reçue par la résistance de charge  $R_2$  ?

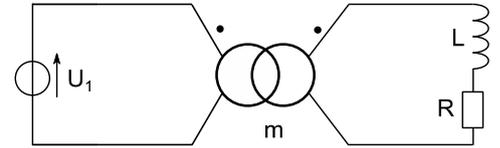


2 La source de tension  $e(t)$  est alternative sinusoïdale, de valeur efficace  $E$ .

- 1°) Exprimer  $v_2(t)$  en fonction de  $m$  et  $v_1(t)$ .
- 2°) Calculer  $v_1(t)$  en fonction de  $e(t)$ ,  $m$  et des 3 résistances.
- 3°) Déterminer  $i_2(t)$ .
- 4°) On donne  $E = 230\text{ V}$ . Les 3 résistances sont de même valeur,  $100\ \Omega$ . Déterminer la valeur efficace de  $i_2$ , pour  $m=0,500$ .
- 5°) On prend à présent  $e(t) = Cte = E_0$ . Que vaut  $v_2(t)$  ?



**3** On considère le montage ci-contre. La tension alimentant le primaire est sinusoïdale, de valeur efficace  $U_1$ . La charge est  $\{R, L\}$ .



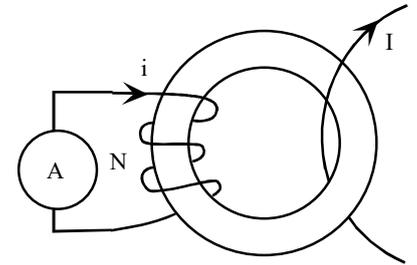
1°) Quelle est la puissance moyenne consommée par l'ensemble formé du transformateur et de sa charge ?

2°) Pour améliorer le modèle, on prend en compte les résistances des fils du primaire et du secondaire. On note  $R_1$  et  $R_2$  ces résistances. Que devient le schéma du montage ? Quelle est la nouvelle puissance moyenne consommée par l'ensemble ? Quelle est la puissance moyenne délivrée à la charge ? Quel est le rendement du transformateur ?

**4** Pince ampèremétrique

Une pince ampèremétrique est un dispositif permettant de mesurer des intensités alternatives en général intenses, sans nécessiter de dérivation du courant dans le circuit à étudier.

La pince est constituée d'un tore magnétique qui peut s'ouvrir pour laisser passer le conducteur, et d'un bobinage de  $N$  spires enroulées sur le tore. Ce bobinage est relié à un ampèremètre classique.



On suppose le circuit magnétique parfait (perméabilité relative infinie).

1°) En utilisant le théorème d'Ampère, donner la relation entre  $i$  et  $I$ . Quel doit être le nombre de spires si le calibre de l'ampèremètre est 1 A et l'intensité à mesurer est de 500 A ?

2°) Pour quelle raison ne peut-on pas appliquer ici la relation entre les tensions d'un transformateur parfait ?

**5** Une source idéale délivre une tension sinusoïdale de fréquence  $f = 50,0$  Hz et de valeur efficace  $U_1 = 230$  V. Une ligne électrique de plusieurs kilomètres sépare cette source d'une habitation. La résistance électrique de la ligne est  $2r$  ( $r$  pour chacun des deux fils), avec  $r = 2,00$   $\Omega$ .

Dans un premier temps, la source est directement reliée à la ligne, elle-même connectée à une charge électrique modélisée par une résistance  $R_u = 50,0$   $\Omega$ , comme le montre la figure 1.

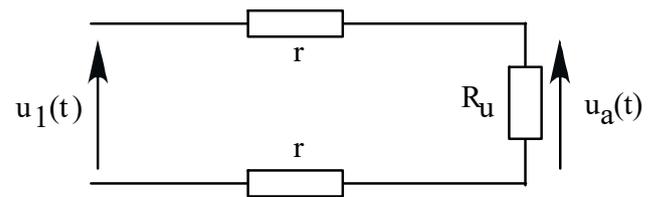


figure 1

1°) Quelle est l'expression de la tension efficace  $U_a$  aux bornes de la résistance  $R_u$ , en fonction de  $U_1$ ,  $r$  et  $R_u$  ?

2°) Dans ces conditions, quelle est la puissance moyenne  $P_a$  consommée par  $R_u$  ? App. Num.

3°) Quelle est la puissance moyenne  $P_{Ja}$  dissipée dans la ligne ? App. Num.

On insère un transformateur idéal, de rapport de transformation  $m_1 = 12,0$  entre la source et la ligne, puis un autre transformateur idéal, de rapport de transformation  $m_2 = 1/m_1$  entre la ligne et la résistance  $R_u = 50,0$   $\Omega$ , (figure 2).

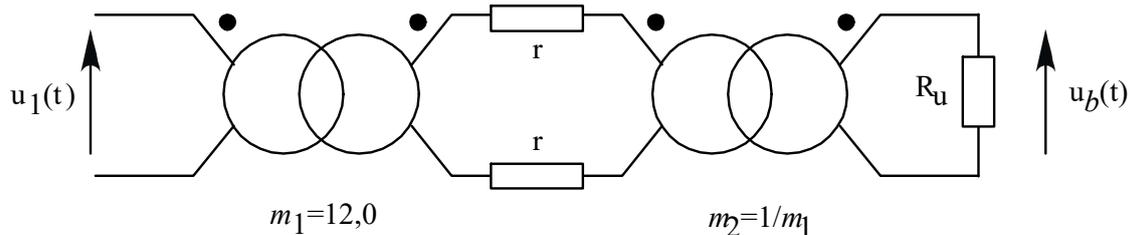


figure 2

4°) Quelle est la nouvelle tension efficace  $U_b$  aux bornes de  $R_u$  ? Quelle est la nouvelle puissance moyenne  $P_b$  consommée par  $R_u$  ?

5°) Quelle est la puissance moyenne  $P_{Jb}$  dissipée dans la ligne ? Comparer avec  $P_{Ja}$  et commenter, en s'appuyant sur un exemple concret d'installation qui utilise cette technique.

## 27 Machines synchrones

### III. — Etude de la motorisation de la foreuse du robot Philæ

Le robot Philæ avait notamment pour mission de forer le sol de la comète sur une profondeur de 40 cm. Il n'a pu réaliser pleinement cette partie de sa mission car le site sur lequel il s'est finalement posé après trois rebonds était trop incliné. Il a cependant pu faire de très nombreuses mesures dont l'analyse permettra de mieux comprendre la formation du système solaire. Dans cette partie nous allons étudier les caractéristiques techniques du moteur de sa foreuse. Il s'agit d'un moteur synchrone associé à un onduleur de tension. Cette structure permet de concevoir un dispositif robuste de forte puissance, délivrant un fort couple et présentant une bonne durée de vie, toutes ses qualités étant ici nécessaires. Afin de simplifier l'étude, les pertes mécaniques ainsi que les pertes fer de ce moteur synchrone seront négligées. Finalement, le moteur sera assimilé à une machine synchrone diphasée dont les deux enroulements statoriques sont identiques.

#### III.A. — Essais préalables

L'inducteur du moteur synchrone de la foreuse de Philæ est à aimants permanents et possède 8 pôles, soit 4 paires de pôles.

Chaque bobinage du stator possède une résistance de  $0,03 \Omega$ .

L'intensité nominale du courant dans un enroulement du stator est  $I_N = 155 \text{ A}$ . Pendant une durée limitée, elle peut atteindre la valeur maximale  $I_M = 185 \text{ A}$ .

La machine est étudiée en convention récepteur.

Le modèle équivalent à une phase de l'induit est représenté sur la figure 3. Les tensions et courants sont supposés sinusoïdaux de pulsation  $\omega = 2\pi f$ . Afin de déterminer les paramètres du modèle, divers essais ont été effectués :

- Essai n°1 : sur un banc d'essais, on a entraîné la machine synchrone à vide par l'intermédiaire d'un moteur auxiliaire à la vitesse  $n = 1500 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ . Aux bornes d'une phase, on a mesuré une tension simple de  $57 \text{ V}$ .
- Essai n°2 : avec une alimentation électrique appropriée, on a effectué un essai de la machine en moteur à  $1500 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$  pour lequel  $\psi = 0$ ,  $I = I_M = 185 \text{ A}$ , et  $V = 72 \text{ V}$ .

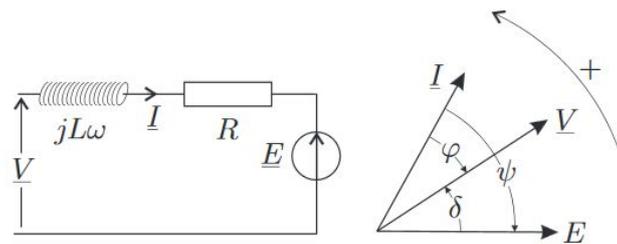
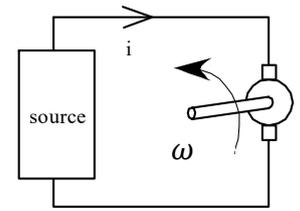


FIG. 3 — Schéma électrique et diagramme vectoriel d'une phase du moteur.

- 16 — On admet qu'en régime permanent de vitesse, la condition de synchronisme pour un moteur possédant  $p$  paires de pôles s'écrit  $\omega = p\Omega$ , où  $\Omega$  désigne la vitesse de rotation du rotor en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Déterminer la fréquence des tensions statoriques quand  $n = 1500 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ .
- 17 — Représenter le diagramme vectoriel relatif à l'essai n°2. La résistance  $R$  n'étant pas négligée, en déduire la valeur de  $L$ .
- 18 — La valeur efficace de la force contre-électromotrice  $E$  a pour expression  $E = \Phi_0\omega$ . Quelle est l'unité de la constante  $\Phi_0$ ? Que représente-t-elle? De quels paramètres de la machine dépend-elle? Montrer que  $E = A\Omega$ , où  $A$  est une constante dont on précisera l'expression et la valeur numérique. Dans toute la suite on négligera la chute de tension ohmique ainsi que les pertes par effet Joule dans les circuits statoriques.
- 19 — Tracer un diagramme vectoriel représentatif d'un point de fonctionnement quelconque dans le cas où  $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$ . En déduire une relation entre  $V$ ,  $E$ ,  $\varphi$  et  $\psi$ .
- 20 — Déterminer l'expression de la puissance électrique absorbée par le moteur  $P_a$  en fonction de  $V$ ,  $I$  et  $\varphi$  puis en fonction de  $E$ ,  $I$  et  $\psi$ . Quelle relation existe-t-il entre cette puissance électrique  $P_a$  et la puissance mécanique électromagnétique  $P_m$  reçue par le rotor?
- 21 — Exprimer le couple électromagnétique  $C$  développé par le moteur en fonction de  $A$ ,  $I$  et  $\psi$ . Pour une intensité efficace  $I$  donnée, que doit-on faire pour maximiser le couple développé par la machine? De quelle unique variable le couple dépend-il alors? A quel autre moteur ce fonctionnement fait-il penser?
- 22 — On se placera sur un point de fonctionnement à  $\psi = 0$ ,  $I = I_N$ , et  $n = 1500 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ . Que vaut le moment du couple  $C$  développé par le moteur? Représenter le diagramme vectoriel représentatif du fonctionnement. Placer les vecteurs représentatifs des complexes  $\underline{E}$ ,  $\underline{V}$ ,  $\underline{I}$ . En déduire les expressions de  $V$  et  $\varphi$ . Calculer leurs valeurs numériques correspondantes. On pourra considérer que  $\frac{1}{\sqrt{3}} \simeq \frac{1}{2}$ .

## 28 Machines à courant continu

1 On considère un moteur à courant continu, à aimants permanents, d'axe  $\Delta$ . La position angulaire du rotor est repérée par un angle  $\theta$ , de dérivée temporelle  $\omega$ . Son moment d'inertie par rapport à  $\Delta$  est noté  $J$ . Lorsque l'« induit » du moteur est parcouru par le courant  $i$  (cf schéma), les forces électromagnétiques exercent sur le rotor un couple de moment  $\Gamma_m = \phi_0 i$ , où  $\phi_0$  est une constante positive, de valeur donnée au 3°). De plus, les frottements visqueux exercent sur le rotor un couple de moment  $\Gamma_v = -f \omega$ , où  $f$  est une constante positive. Enfin, le rotor est soumis à un couple de frottements secs  $\Gamma_s$  qui s'oppose au mouvement du rotor de la façon suivante : si on appelle  $\Gamma_{app}$  la somme algébrique des moments de tous les couples appliqués au rotor (autres que le frottement sec) :



- Si  $|\Gamma_{app}| < \lambda$ , le rotor ne tourne pas.  $\lambda = 0.030 \text{ Nm}$
- Lorsque le rotor tourne dans le sens positif,  $\Gamma_s = -\lambda$ .
- Lorsque le rotor tourne dans le sens négatif,  $\Gamma_s = \lambda$ .

1°) La source est une source idéale de courant. Quel courant minimum  $i_{min}$  faut-il qu'elle délivre pour que le moteur démarre ?  
 2°) A  $t = 0$ , le courant délivré par la source passe de 0 à  $2i_{min}$ . Etablir la loi  $\omega(t)$  en faisant apparaître une constante de temps  $\tau$ . (le moteur était à l'arrêt pour  $t < 0$ ).

3°) Le moteur est modélisé par une source de tension imparfaite (fcém  $e'$ ,  $R = 10 \Omega$ ), avec  $e' = \phi_0 \omega$ . On donne  $e' = 22 \text{ V}$  pour  $\omega = 3500 \text{ tr.mn}^{-1}$ . L'induit est alimenté par une source de tension de fém notée  $E$ .

- Quelle valeur  $E_{min}$  faut-il donner à  $E$  pour que le moteur démarre ?
- On relève, en régime permanent  $\omega_1 = 500 \text{ tr.mn}^{-1}$  pour  $E_1 = 12,5 \text{ V}$ . Quelle sera la vitesse  $\omega_2$  pour  $E_2 = 25 \text{ V}$  ?

2 On désire caractériser une machine à courant continu, c'est-à-dire déterminer les valeurs numériques du modèle qu'on lui associe. Il s'agit d'une machine à aimants permanents. On modélise l'induit par un circuit  $\{R, e\}$ . On note  $J$  le moment d'inertie du rotor par rapport à l'axe de rotation, et  $\phi_0$  la « constante interne » de la machine, qui fait le lien entre la fém (ou la fcém) et la vitesse angulaire ou entre le courant et le moment du couple électromagnétique. On note  $\Gamma_v$  le moment du couple des frottements visqueux et on pose  $\Gamma_v = -f \omega$ ,  $f$  étant une constante positive. On note  $\Gamma_s$  la valeur absolue du moment du couple des frottements secs (frottements des balais). C'est une constante.

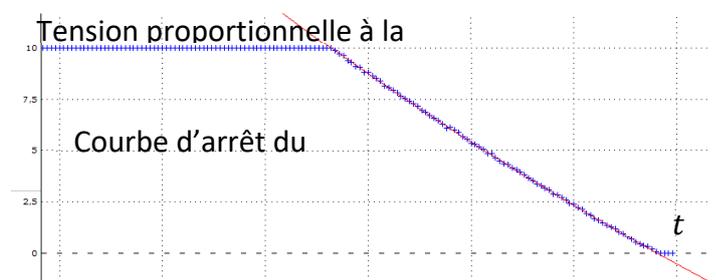
1°) On commence par mesurer la résistance de l'induit avec un ohmmètre. On effectue plusieurs mesures en prenant soin, entre deux mesures, de changer la position angulaire du rotor. On trouve une série de valeurs très différentes, la plus grande d'entre elle pouvant être jusqu'à 5 fois plus importante que la plus petite. Comment expliquer cela ? Au moyen d'une autre méthode, on trouve  $R = 4,7 \Omega$ .

2°) On entraîne la machine étudiée avec un moteur et on relève la tension aux bornes de l'induit pour différentes vitesses de rotation (mesurées grâce à un capteur de vitesse fixé sur le même arbre que le reste). On obtient le tableau de valeurs ci-contre. Quel paramètre de la machine peut-on en déduire ? Le déterminer.

| U(V)  | Omega (rd/s) |
|-------|--------------|
| 6,24  | 34,9         |
| 10,85 | 77,7         |
| 17,09 | 134,9        |
| 22,62 | 186,2        |
| 28,27 | 238,6        |
| 32    | 273,3        |
| 37,45 | 323,9        |
| 41,22 | 358,6        |
| 47    | 412,9        |

3°) On utilise la machine en moteur à vide, c'est-à-dire sans charge mécanique. On fixe pour commencer la tension d'alimentation de l'induit à  $U_1 = 5,8 \text{ V}$ . La vitesse angulaire de la machine est alors  $\omega_1 = 40 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et le courant dans l'induit  $i_1 = 0,33 \text{ A}$ . On recommence avec  $U_2 = 47 \text{ V}$ . La vitesse angulaire de la machine est alors  $\omega_2 = 420 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et le courant dans l'induit  $i_2 = 0,40 \text{ A}$ . En déduire la valeur du coefficient  $f$  et de  $\Gamma_s$ .

4°) On effectue un dernier essai : l'essai « d'arrêt » de la machine : on l'utilise en moteur, sans charge mécanique, et on l'alimente sous une tension telle qu'elle tourne à une vitesse angulaire  $\omega_0 = 174 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . À  $t = 0$ , on coupe brutalement l'alimentation du moteur (on ouvre l'interrupteur reliant l'alimentation au moteur). On enregistre l'évolution de la vitesse angulaire, depuis  $t = 0$  jusqu'à  $t = t_a$ , en notant  $t_a$  l'instant où le rotor s'arrête. On relève  $t_a = 0,80 \text{ s}$ . Etablir la loi d'évolution de la vitesse  $\omega(t)$  pour  $t$  compris entre 0 et  $t_a$  puis en déduire le moment d'inertie  $J$  de la machine.



3 Moteur universel. On considère une machine à courant continu à stator (inducteur) bobiné. On note  $I_e$  le courant dans l'inducteur. La fém de la machine est donc à la fois proportionnelle à  $I_e$  et à la vitesse angulaire  $\omega$  :  $e = K I_e \omega$ . On modélise l'induit par l'association en série de la fém  $e$  et d'une résistance  $R$ . On nomme  $A$  et  $B$  les deux bornes de l'induit. La grandeur appelée  $e$  est la fém orientée de  $B$  vers  $A$ . On note  $R_e$  la résistance de l'inducteur.

- Un essai préliminaire de la machine montre que, pour  $I_e > 0$ , quand on impose à l'induit une tension  $V_A - V_B > 0$ , la machine (fonctionnant en moteur), tourne en marche avant ( $\omega > 0$ ). Quel est le signe de la constante  $K$  ?
- Pour une même tension  $V_A - V_B > 0$ , mais avec  $I_e < 0$ , dans quel sens le moteur tourne-t-il ? Justifier.

- 3°) Pour une tension  $V_A - V_B < 0$ , avec  $I_e < 0$ , dans quel sens le moteur tourne-t-il ?
- 4°) On branche l'inducteur en série avec l'induit, le tout alimenté avec une tension alternative. Le moteur fonctionne-t-il ?
- 5°) On revient à une « excitation séparée » : l'inducteur et l'induit ne sont plus en parallèle mais sont reliés à 2 sources de tension distinctes. Ces deux sources sont à présent continues. La tension appliquée à l'inducteur est notée  $U_e$ . Elle est positive, de sorte que  $I_e > 0$ . La tension appliquée à l'induit est  $U_i = V_A - V_B > 0$ . Le moteur entraîne une charge dont le couple  $\Gamma_c < 0$  est indépendant de la vitesse de rotation. Lors de cet essai, les pertes Joule représentent 5,0% de la puissance électrique consommée par l'induit. Déterminer la vitesse angulaire du rotor,  $\omega_1$ , en régime stationnaire. Que devient-elle si on divise  $U_e$  par 2 ?

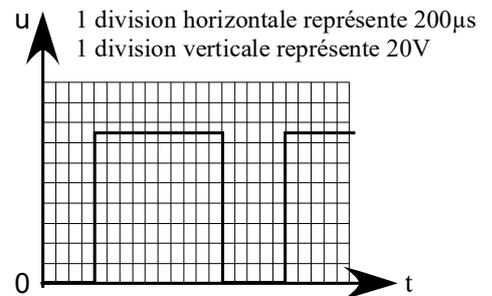
## 29 Electronique de puissance

**1** On considère un hacheur dévolteur débitant sur une charge constituée d'une inductance  $L$  en série avec l'induit d'un moteur à courant continu (à aimants permanents), modélisé par un circuit série  $e'$ ,  $R$ . Le hacheur est alimenté par une source de tension parfaite de fém  $E$ . On suppose que le courant  $i(t)$  dans le moteur ne s'annule jamais.

- 1°) Quelle est la fonction du hacheur ? À quoi sert le rapport cyclique  $\alpha$  ? À quoi sert l'inductance ? Expliquer le choix des 2 interrupteurs.
- 2°) Déterminer la tension moyenne  $U$  aux bornes de la charge, en négligeant la tension aux bornes de la résistance. On néglige  $R$  dans toute la suite.
- 3°) Trouver une relation entre  $E$  et la vitesse de rotation  $\omega$  du moteur.
- 4°) Tracer l'évolution du courant dans la charge  $i(t)$  sur une période.
- 5°) Déterminer l'ondulation de courant.

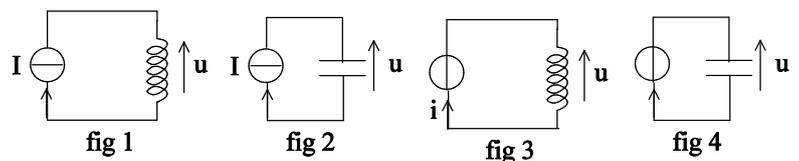
**2** La tension  $u$  délivrée par un hacheur série est donnée sur la figure ci-contre.

- 1°) Déterminer le rapport cyclique puis la valeur moyenne de la tension  $u$ .
- 2°) Donner la valeur de la pulsation fondamentale de cette tension.
- 3°) La sortie du hacheur est un ensemble série  $R$ ,  $L$ . Faire le schéma complet du montage. Quelle tension de sortie  $v(t)$  choisir pour que la charge se comporte comme un filtre passe-bas (l'entrée étant  $u$ ) ? Tracer le diagramme de Bode asymptotique de ce filtre.
- 4°) La pulsation du fondamental de  $u$  est nettement supérieure à la pulsation de coupure du filtre. Donner l'allure de la tension  $v(t)$ .
- 5°) On remplace la charge  $R$ ,  $L$  par un moteur à courant continu, modélisé par une association série  $R$ ,  $L$ ,  $e'$ , où  $e'$  est la force contre électromotrice, avec  $e = k \cdot N$ .  $N$  est la vitesse angulaire exprimée en  $\text{tr} \cdot \text{mn}^{-1}$ . On donne  $k = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ V} \cdot \text{tr}^{-1} \cdot \text{mn}$ ,  $R = 2,0 \Omega$ ,  $L = 1,0 \text{ mH}$ . En régime périodique établi, le courant dans le moteur est de 10 A. Déterminer sa vitesse de rotation.



## 3

**I** 1°) Est-il possible de se ramener sans précaution particulière, après avoir basculé des interrupteurs, à une association série d'une source type courant avec une bobine pure ? (fig 1) Même question avec un condensateur pur (fig 2), puis une source type tension et une bobine pure (fig3), puis une source type tension et un condensateur. (fig4)



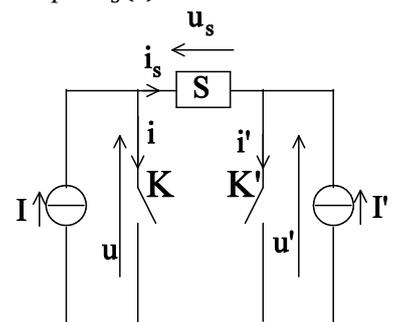
**II** Soit le hacheur suivant où  $S$  est un dipôle qui permet d'emmagasiner de l'énergie.  $I$  est une source type courant, et  $I'$  une charge type source de courant.  $I$  et  $I'$  sont supposés connus et positifs. On admet que  $u_s(t) > 0 \forall t$ .

- 1°) Quels dipôles permettent d'emmagasiner de l'énergie ? Lequel peut-on mettre en  $S$  ?
- 2°) Peut-on maintenir  $K$  et  $K'$  simultanément ouverts ? fermés ?
- Le régime est périodique et les séquences de fonctionnement des interrupteurs sont :

De 0 à  $\alpha T$ ,  $K$  est fermé et  $K'$  ouvert

De  $\alpha T$  à  $T$ ,  $K$  est ouvert et  $K'$  fermé

- 3°) Déterminer les équations différentielles vérifiées par  $i_s$  et  $u_s$ .
- 4°) Donner une relation entre  $I$ ,  $I'$  et  $\alpha$  pour que le fonctionnement soit périodique.
- 5°) Représenter  $i_s(t)$ . Représenter également  $u_s$ ,  $u$ , et  $u'$  sur le même graphe.



6°) Déterminer la puissance moyenne fournie par I, la puissance moyenne reçue par I' et l'énergie qu'accumule S au cours de la phase où il stocke de l'énergie.

#### 4

$K_1, K_2, K_3$  et  $K_4$  sont des interrupteurs dont la séquence de fonctionnement est périodique, de période  $T$ . On pose  $\theta = \omega \cdot t$ . On précise que  $\delta < \pi$ .

$\theta \in [0, \delta]$  :  $K_1$  fermé,  $K_2$  fermé,  $K_3$  ouvert,  $K_4$  ouvert

$\theta \in [\delta, \pi]$  :  $K_1$  fermé,  $K_2$  ouvert,  $K_3$  ouvert,  $K_4$  fermé

$\theta \in [\pi, \delta + \pi]$  :  $K_1$  ouvert,  $K_2$  ouvert,  $K_3$  fermé,  $K_4$  fermé

$\theta \in [\delta + \pi, 2\pi]$  :  $K_1$  ouvert,  $K_2$  fermé,  $K_3$  fermé,  $K_4$  ouvert

1°) Tracer le chronogramme de  $u_c(t)$ .

2°) En faisant le changement de variable adéquat, avec  $\theta_0 = \omega \cdot t_0$ , on montre que la tension  $u_c(t)$  peut s'écrire :  $u_c(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n(\theta - \theta_0))$ ,

avec  $a_{2k+1} = \frac{4U_0}{(2k+1)\pi} (-1)^k \cos\left(\frac{(2k+1)\delta}{2}\right)$ , et  $a_{2k} = 0$ .

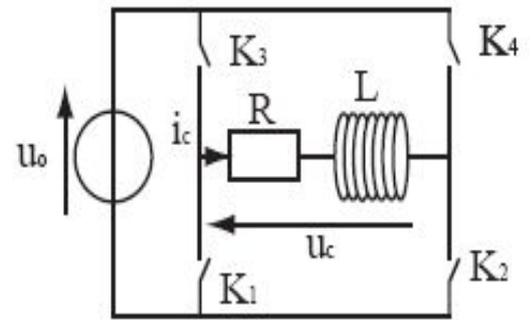
Comment choisir  $\theta_0$  ? Justifier qualitativement que  $a_{2k} = 0$ .

3°) Trouver  $\delta$  tel que  $a_3 = 0$ . On conservera cette valeur pour la suite.

4°) On choisit  $R = L\omega$ , montrer que  $i_c(t)$  peut être considéré comme quasi-sinusoïdal.

5°) Calculer la valeur efficace de  $u_c$  et la comparer avec l'amplitude de la première harmonique de  $u_c(t)$ .

6°) On veut que ces interrupteurs soient réversibles en courant, proposer une solution technologique pour ces interrupteurs.



### 30 Ondes sonores dans les fluides

1 On s'intéresse à une onde sonore plane progressive harmonique, de fréquence  $f = 1,7$  kHz, pour laquelle la surpression est donnée par :  $p_1(x, y, z, t) = 0,010 \cos(2\pi(ft - 4,0x - 3,0z))$ .

1°) Quelle est la direction de propagation de cette onde ? Quelle est sa célérité ?

2°) Le milieu dans lequel elle se propage est de l'air, assimilé à un gaz parfait, à pression (au repos)  $P_0 = 1,0$  bar.

Quelle est la température qui y règne au repos ? Quelle est la masse volumique  $\mu_0$  de cet air au repos ?

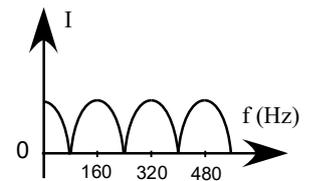
3°) Déterminer l'expression du champ des vitesses  $\vec{v}_1(x, y, z, t)$  associé à cette onde sonore. Valeur numérique de son amplitude ?

4°) Calculer l'intensité sonore  $I$  de cette onde, et son niveau en dB.

5°) Si l'amplitude de cette surpression est multipliée par 5, quelle est la nouvelle intensité sonore en dB ?

#### 2 Onde sonore et tuyau.

On prend un tuyau de longueur  $L = 1,00$  m ouvert à ses deux extrémités. A gauche on place un haut-parleur et à droite un microphone. Pour différentes valeurs de la fréquence  $f$  d'excitation du haut-parleur on mesure l'intensité reçue par le microphone. On a le graphique ci-contre donnant  $I$  en fonction de  $f$  : il y a des pics à 160 Hz, 320 Hz, 480 Hz etc



1) Interpréter le graphique.

2) Donner les conditions limites en  $x=0$  et  $x=L$  vérifiées par la surpression.

On propose  $p(x,t) = A \cos(kx) \exp(j\omega t)$  et  $p(x,t) = A \sin(kx) \exp(j\omega t)$ . Laquelle est la plus probable ? Et pour la vitesse vibratoire ?

3) Donner la relation entre  $L$  et la longueur d'onde  $\lambda$ , en déduire la célérité  $c$ .

4) On bouche le tuyau à droite, donner la relation entre  $L$  et  $\lambda$ . Que devient la fréquence du fondamental ?

5) Donner les équations qui régissent ce système et les approximations acoustiques.

6) Les linéariser et retrouver l'équation de d'Alembert et la célérité.

3 On considère un tuyau d'orgue de longueur  $L = 1,0$  m, fermé en  $x = 0$  et ouvert en  $x = L$ . L'air est assimilé à un gaz parfait avec  $\gamma = 1,4$ . La pression ambiante est  $P_0 = 1,0$  bar.

1°) Exprimer la célérité des ondes sonores en fonction de  $\gamma$ ,  $R$ ,  $T$  et  $M$ . App. Num. pour une température de  $17^\circ\text{C}$ .

2°) Quel type d'onde a-t-on dans le tuyau ? Qu'est-ce qu'une onde stationnaire ?

3°) Calculer la fréquence  $\nu_0$  du fondamental et celle,  $\nu_1$ , du premier harmonique présent.

4°) Loin du tuyau, on a une onde plane progressive harmonique. L'amplitude des déplacements de l'air à la fréquence  $\nu_1$  est  $a_1 = 2,0$  mm. Quelle est l'amplitude des variations de pression ?

5°) Le tuyau est à présent ouvert en 0 et en  $L$  : déterminer les longueurs d'ondes possibles en fonction de  $L$ . Le son est-il plus aigu ou plus grave que dans le cas précédent ?

#### 4 Interface air-muscle

L'air est considéré comme un fluide parfait. Le problème est unidimensionnel. Une onde sonore plane progressive harmonique longitudinale se propage selon  $\vec{u}_x$ .

On note  $\vec{v}(x, t) = v(x, t)\vec{u}_x = v_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_x$ . On donne l'impédance acoustique de l'air :  $Z_a = \rho_0 c_a$ .

L'interface air-muscle est le plan  $x = 0$ .

1°) Donner la relation entre  $k$  et  $\omega$ . Déterminer l'onde de surpression pour cette onde incidente. Déterminer la puissance surfacique moyenne de cette onde incidente.

2°) Rappeler la définition et exprimer l'intensité d'une onde sonore. On donne les coefficients  $r$  de réflexion, et  $t$  de transmission pour la vitesse dans le plan  $x=0$ . Déterminer les coefficients  $R$  de réflexion et  $T$  de transmission pour l'intensité.

3°) L'air occupe l'espace  $x < 0$ , et le muscle l'espace  $x > 0$ . A l'aide de l'animation python (à prendre sur hugoprepas), dire quels types d'ondes on observe dans chacun des milieux. Déterminer le rapport des célérités  $c_m/c_a$  et le rapport des impédances  $Z_m/Z_a$ . (Remarque : afin que le tracé soit exploitable, ces rapports n'ont pas les valeurs qu'ils devraient avoir réellement). En déduire des valeurs numériques pour  $R$  et  $T$ .

4°) On ajoute entre l'air et le muscle une couche de gel d'épaisseur  $e$  et d'impédance  $Z_e$ , afin de supprimer l'onde réfléchie dans l'air à l'entrée du muscle (on réalise une adaptation d'impédance). On écrira pour les ondes de vitesse :

Pour  $x < 0$ ,  $\underline{v} = a_1 e^{j(\omega t - k_a x)}$ . Pour  $0 < x < e$ ,  $\underline{v} = \underline{A}_g e^{j(\omega t - k_e x)} + \underline{B}_g e^{j(\omega t + k_e x)}$ . Pour  $x > e$ ,  $\underline{v} = \underline{C}_m e^{j(\omega t - k_m x)}$ .

Donner l'expression des surpressions associées à ces vitesses. En déduire l'expression de  $Z_e$  et les valeurs possibles de  $e$ .

**5** Dans un tuyau horizontal de section  $S$ , une membrane très mince de masse surfacique  $\sigma$  placée au repos en  $x=0$ , sépare deux fluides associés aux indices respectifs  $i=1$  et  $i=2$ . On note  $\rho_i$  et  $c_i$  les masses volumiques et les célérités des ondes. La membrane glisse sans frottement. Une onde incidente harmonique arrive sur la membrane. Déterminer les ondes transmises et réfléchies.

Indication : on se donnera une onde OPPH incidente, une onde OPPH réfléchie, une onde OPPH transmise, et on écrira deux équations de raccordement en  $x=0$ .

### 31 Ondes électromagnétiques

**1** Somme de 2 ondes : Deux ondes planes progressives monochromatiques polarisées rectilignement se propagent, dans le vide, dans la même direction et le même sens (vecteur unitaire  $\vec{u}$ ).  $\vec{E}_{10}$  et  $\vec{E}_{20}$  font entre eux un angle  $\alpha$ .

A l'endroit où on se trouve, le champ électrique de la première s'écrit  $\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} \cos(\omega_1 t)$  et celui de la seconde

$\vec{E}_2 = \vec{E}_{20} \cos(\omega_2 t + \theta)$ . Les 2 pulsations sont positives.

1°) Calculer les valeurs moyennes  $\langle \vec{\pi}_1 \rangle$  et  $\langle \vec{\pi}_2 \rangle$  des vecteurs de Poynting de chaque onde.

2°) Calculer la valeur moyenne  $\langle \vec{\pi} \rangle$  du vecteur de Poynting de l'onde résultante. Quand a-t-on  $\langle \vec{\pi}_1 \rangle + \langle \vec{\pi}_2 \rangle \neq \langle \vec{\pi} \rangle$  ? de quel phénomène s'agit-il ?

**2** Soit une « cellule de Kerr » au sein de laquelle règne un champ électrique constant  $E'$  dirigé selon  $Oy$ . Une telle cellule, d'épaisseur  $e$ , lorsqu'elle est traversée par une onde électromagnétique, se comporte de la façon suivante :

- elle est équivalente au vide si l'onde incidente est une OPPH polarisée parallèlement à  $Ox$  ;
- elle introduit un retard de phase  $\Delta\phi$  si l'onde incidente est une OPPH polarisée selon  $Oy$ ,

On donne :  $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} B E'^2 e$ , où  $B$  est une constante.

1°) Soit une onde plane progressive harmonique se propageant dans le vide selon  $Oz$  et polarisée selon un vecteur unitaire  $\vec{u}$ , décalé angulairement de  $+\alpha$  par rapport à  $\vec{u}_x$ . Montrer qu'on peut la décomposer en deux ondes planes progressives harmoniques se propageant selon  $Oz$  et polarisées rectilignement, l'une selon  $\vec{u}_x$ , l'autre selon  $\vec{u}_y$ .

2°) Sur un banc d'optique, on a placé une cuve à effet Kerr entre un polariseur (P) et un analyseur (A). Le polariseur et l'analyseur sont des dispositifs qui ne laissent passer que les ondes polarisées rectilignement selon la première bissectrice des axes  $Ox$  et  $Oy$ . On suppose que (P) et (A) laissent entièrement passer la lumière polarisée selon leur axe, sans l'atténuer.

Une OPPH de lumière naturelle ( $\lambda_0$ ), d'éclairement  $\mathcal{E}_0$ , arrive en incidence normale sur le polariseur (P). On assimile l'éclairement à la valeur moyenne de la norme du vecteur de Poynting. Quel éclairement  $\mathcal{E}$  observe-t-on en sortie de l'analyseur (A) ? Pour quelle valeur minimale et non nulle  $E'_m$  de  $E'$  l'éclairement  $\mathcal{E}$  est-il maximal ?

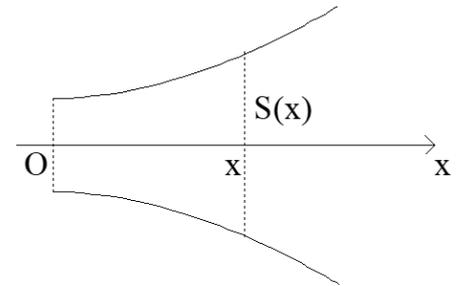
## 32 Dispersion et absorption

1-On considère un tuyau de révolution d'axe Ox, de section S(x). Au repos :

pression P<sub>0</sub> et masse volumique ρ<sub>0</sub>. On désigne par :

- u(x,t) le déplacement élémentaire de la section d'abscisse x
- v(x,t) la vitesse de déplacement de cette section selon Ox
- p(x,t) = P(x,t) - P<sub>0</sub> la surpression à l'abscisse x

1°) On considère une tranche de fluide située, au repos, entre les plans d'abscisses x et x+dx. Déterminer sa variation relative de volume lorsqu'elle est perturbée.



2°) Montrer que l'on a :  $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}$  et  $p = -\frac{1}{\chi_s S} \frac{\partial(Su)}{\partial x}$

3°) En déduire deux équations aux dérivées partielles du second ordre, reliant S, v, x et t pour l'une d'elles, et S, p, x et t pour l'autre. On posera :  $c^2 = 1/\rho_0 \chi_s$ .

4°) Le modèle utilisé est tel que :  $S(x) = S_0 e^{2mx}$  où S<sub>0</sub> est la section en x = 0 et m un réel positif. Simplifier les deux équations aux dérivées partielles obtenues au 3°) et montrer qu'elles sont du même type.

5°) On cherche à propager dans le tuyau une onde sinusoïdale décrite par la notation complexe :  $\underline{v} = V_0 e^{j(\omega t - kx)}$

Etablir la relation à laquelle satisfait k en fonction de ω, c, m et j (relation de dispersion).

6°) On doit alors poser  $\underline{k} = k' + jk''$  avec k' réel positif et k'' réel. Exprimer k'' et k'<sup>2</sup>. Montrer l'existence d'une pulsation de coupure ω<sub>c</sub> en dessous de laquelle il ne peut y avoir propagation. Calculer ω<sub>c</sub> avec c = 343 m/s et m = 1,0 m<sup>-1</sup>.

7°) Exprimer alors la grandeur v(x,t). Caractériser cette onde.

8°) Exprimer les vitesses de phase c<sub>φ</sub> et de groupe c<sub>g</sub>. Relation entre c<sub>φ</sub> et c<sub>g</sub> ? Les tracer sur un même graphe en fonction de ω.

2 Un guide d'ondes électromagnétiques G est un cylindre métallique creux illimité, d'axe Oz, et dont la section droite est le rectangle 0 < x < a, 0 < y < b ; l'intérieur du guide est rempli d'air, assimilé au vide. On adopte pour les parois le modèle du conducteur parfait, c'est-à-dire de conductivité infinie. Dans ces conditions, les champs électrique et magnétique sont nuls dans le métal.

1°) Montrer que la composante tangentielle du champ électrique et la composante normale du champ magnétique doivent s'annuler sur les parois du guide.

2°) Dans toute la suite, on cherche en notation complexe un champ électrique de la forme :  $\underline{\underline{E}} = A(x, y) e^{j(\omega t - k_g z)} \underline{u}_y$ .

a) Montrer que A(x,y) ne dépend pas de y. Ecrire l'équation différentielle dont est solution A(x), et montrer que nécessairement  $k_g^2 < \omega^2 / c^2$ . Dans toute la suite, on posera  $k_t^2 = \omega^2 / c^2 - k_g^2$ . Etablir les expressions possibles A<sub>n</sub>(x) de A(x) et la relation de dispersion k<sub>g,n</sub>(ω) correspondante, en introduisant un entier n. Dans toute la suite, on appellera mode n la solution associée à l'indice n.

b) Faire apparaître une pulsation critique ω<sub>n,c</sub>. Discuter brièvement la nature des ondes obtenues. Calculer numériquement la plus petite fréquence permettant de propager une onde dans un guide pour a = 2b = 5 cm. Pour ω > ω<sub>n,c</sub>, commenter l'expression de E<sub>n</sub> d'une part à z fixé, et d'autre part à x fixé. Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe, et commenter sachant que les principes de relativité interdisent la propagation d'une information à une vitesse supérieure à la célérité c des ondes électromagnétiques dans le vide.

3°) Calculer le champ magnétique du mode n, et vérifier qu'il satisfait aux conditions aux limites. Vérifier qu'il n'est pas transversal, et interpréter graphiquement ce fait en décomposant le mode étudié en 2 ondes OPPH se propageant dans 2 directions différentes.

## 33 Plasmas

1 Un plasma neutre est constitué d'électrons considérés comme libres et d'ions positifs supposés fixes (de par leur grande inertie), ces derniers ayant pour seul rôle d'assurer la neutralité électrique globale du milieu. Les électrons, de masse m, de charge -e sont au nombre de n<sub>0</sub> par unité de volume.

1°) En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à un électron, soumis à un champ uniforme  $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}_0 e^{-i\omega t}$ , puis en calculant la densité volumique de courant dans le plasma, montrer qu'on peut associer à celui-ci une conductivité complexe  $\underline{\underline{\gamma}}$ .

2°) On cherche à propager dans le plasma une onde plane progressive harmonique de champ électrique  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$ . Pour avoir le droit d'utiliser la conductivité complexe vue à la question précédente, il faut que le mouvement des électrons soit d'amplitude petite devant la longueur d'onde.

- Quelle condition cela entraîne-t-il sur  $\|\vec{E}_0\|$  ?
- Montrer que tout revient, dans les calculs habituels de l'onde plane dans le vide, à remplacer dans les équations de Maxwell  $\epsilon_0$  par  $\epsilon = \epsilon_0 \left(1 - \Omega^2 / \omega^2\right)$  où  $\Omega^2 = \frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0}$ .

3°) Le plasma occupe le demi-espace  $x > 0$ . Une onde incidente ( $\omega > \Omega$ ) monochromatique polarisée rectilignement se propage dans le vide et atteint le plasma sous incidence normale. On admet qu'il existe une onde plane progressive harmonique se propageant dans le plasma selon  $x$  croissant. On admet également qu'il n'y a pas de courant de surface (il n'y a pas de conducteur parfait), et on rappelle que la composante tangentielle du champ électrique est toujours continue. Calculer les coefficients  $r$  et  $t$  de réflexion et de transmission en amplitude pour le champ électrique. En déduire les pouvoirs de réflexion  $R$  et de transmission  $T$  pour les puissances.

## 2 Mines PSI 2015 Phys1 III et IV :

### Données valables dans tout le problème

- Masse de l'électron,  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  kg ;
- Charge élémentaire,  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  C ;
- Constante de Newton de la gravitation universelle,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  m<sup>3</sup> · kg<sup>-1</sup> · s<sup>2</sup> ;
- Permittivité diélectrique du vide,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  F · m<sup>-1</sup> ;
- Constante d'Avogadro,  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  mol<sup>-1</sup> ;
- Rayon de la Terre,  $R_t = 6,37 \cdot 10^3$  km ;
- Masse de la Terre,  $M_t = 5,97 \cdot 10^{24}$  kg ;
- Intensité du champ de pesanteur, à la surface de la Terre,  $g = 9,81$  m · s<sup>-2</sup> ;
- Constante de Boltzmann,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J · K<sup>-1</sup> ;
- Constante de Planck,  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  J · s ;
- Constante des gaz parfaits,  $R = 8,31$  J · K<sup>-1</sup> · mol<sup>-1</sup>.

## III.—Le moteur à plasma micro-ondes

### III.A. Principe de fonctionnement

Pour diminuer la consommation de gaz propulsif, il est nécessaire d'accélérer fortement le gaz éjecté par apport extérieur d'énergie. Cette accélération est rendue possible par l'ionisation de ce gaz (on obtient alors un plasma), les particules chargées pouvant être accélérées par un champ électrique. Le gaz propulsif utilisé est par exemple du Xénon, il est ionisé par trois types de mécanismes potentiels, on suppose que tous les ions produits sont Xe<sup>+</sup>. Ces trois mécanismes sont représentés sur la figure 2. La première source potentielle d'ion est la collision entre un atome et un électron produit par un canon à électrons (défini au début de la partie III.B). Il s'agit de la voie a. Outre l'ion produit cette voie produit deux électrons lents. L'application d'une onde électromagnétique micro-onde permet d'accélérer ces électrons afin qu'ils puissent également ioniser d'autres atomes de Xénon. Il s'agit de la voie b. Enfin, dans certaines conditions, les photons micro-onde sont également susceptibles de photo-ioniser les atomes de Xénon. Il s'agit de la voie c.

Une forte densité du plasma est assurée par la présence d'aimants permanents. Les ions Xe<sup>+</sup> sont finalement accélérés par une différence de potentiel dans une région appelée grille accélératrice. Des canons à électrons assurent une neutralisation du gaz émis. L'ensemble est schématisé sur la figure 2.

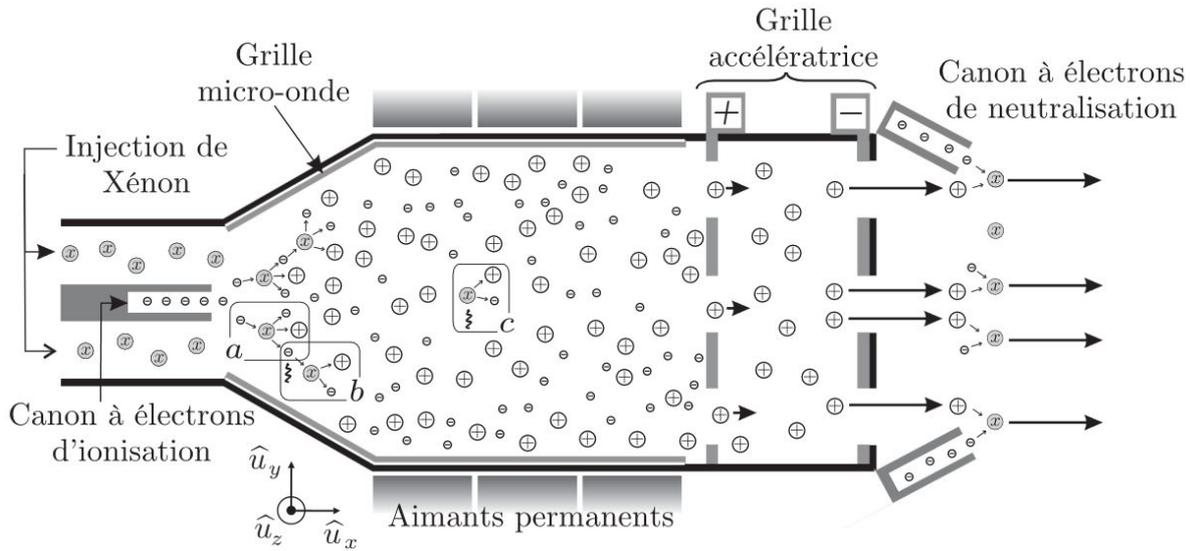


Figure 2 Représentation schématique du moteur ionique : les  $\otimes$  sont des atomes de Xénon,  $\oplus$  des ions  $\text{Xe}^+$  et  $\ominus$  des électrons.

On considère le plasma comme un milieu électriquement neutre, de permittivité  $\epsilon_0$  et de perméabilité magnétique  $\mu_0$ , qui renferme  $n$  ions par unité de volume et autant d'électrons de masse  $m_e$  et de charge  $-e$ . Au sein du plasma, les ions possèdent une vitesse caractéristique bien plus faible que celle des électrons, ils peuvent ainsi être considérés comme immobiles.

Les électrons sont dits libres pour les distinguer de ceux qui restent attachés aux ions. Le plasma étudié ici est non-collisionnel, c'est-à-dire que l'on néglige l'effet des chocs entre ions et électrons ou entre particules de même espèce. On suppose également qu'il est non relativiste ce qui signifie que la vitesse caractéristique des électrons libres est faible devant celle de la lumière  $\|\vec{v}_e\| \ll c$ . Afin d'assurer une ionisation la plus complète possible, on souhaite finalement que ce plasma soit le siège de la propagation d'un rayonnement micro-onde. L'onde électromagnétique correspondante est associée à un champ électrique dont la représentation complexe s'écrit  $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$ .

- 15 – On suppose la propagation effective. Faire l'inventaire de toutes les forces appliquées à un électron libre et préciser lesquelles sont négligeables.
- 16 – Déterminer, en régime de propagation établi, la représentation complexe  $\vec{v}_e$  de la vitesse des électrons libres et en déduire la conductivité complexe  $\underline{\sigma}$  du plasma définie par  $\vec{j} = \underline{\sigma} \vec{E}$ .
- 17 – Vérifier que dans ce régime de propagation la densité volumique de charge  $\rho$  est bien nulle puis en revenant à la notation réelle établir l'équation de propagation du champ  $\vec{E}(x, t)$ . On rappelle que  $\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$ , en déduire l'équation de dispersion dans laquelle apparaît la pulsation de plasma  $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}}$ .
- 18 – À quelle condition l'onde appliquée au plasma peut-elle s'y propager ? Sinon, que lui arrive-t-il ?

Un intense champ magnétique axial  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ , uniforme, est appliqué à l'intérieur du plasma par des aimants permanents.

- 19 – Écrire l'équation vectorielle qui décrirait le mouvement de l'électron s'il n'était soumis qu'à ce champ magnétique. Montrer que pour une vitesse initiale de l'électron contenue dans le plan perpendiculaire au champ magnétique, son mouvement serait circulaire uniforme dans ce plan, et que sa période de rotation serait indépendante de sa vitesse. Exprimer la pulsation  $\omega_c$  correspondante, appelée pulsation cyclotron, et calculer sa valeur pour un champ magnétique appliqué d'intensité  $B_0 = 0,20 \text{ T}$ .
- 20 – Montrer qualitativement que l'application du champ micro-onde  $(\vec{E}, \vec{B}_0)$  avec  $\omega \approx \omega_c$  permet d'accélérer les électrons en augmentant la norme de leur vitesse.
- 21 – D'après ce qui précède, exprimer et calculer numériquement la densité particulaire maximale que l'on peut espérer pour un champ magnétique appliqué d'intensité  $B_0 = 0,20 \text{ T}$ .

Un champ magnétique permanent intense permet donc d'obtenir une densité importante de plasma et ainsi d'augmenter le courant ionique engendré par les grilles accélératrices. Il aide par ailleurs à maintenir l'ionisation : les lignes de champ magnétique « piègent » les électrons en les forçant à décrire des cercles plutôt que de diffuser librement vers les parois ; la probabilité qu'un électron chaud ionise une molécule est accrue en raison de l'augmentation de la longueur de son trajet.

- ❑ 22 – L'énergie de première ionisation du Xénon est de l'ordre de 12,0 eV. La configuration précédente permet-elle d'envisager une réelle contribution de la photo-dissociation (voie c) ? On justifiera sa réponse par un calcul.

### III.B. Poussée

On néglige la masse  $m_e$  des électrons devant celle des ions notée  $\mu$ .

- ❑ 23 – Exprimer la relation entre l'intensité du courant électrique  $I$  dû aux ions traversant le moteur, le débit  $D_m$  de masse de gaz issu du vaisseau et des caractéristiques des ions.
- ❑ 24 – On suppose que les ions ont une vitesse caractéristique nulle à l'entrée de la grille accélératrice. On note  $V_a > 0$  la tension présente entre les deux électrodes de la grille accélératrice. Déterminer la vitesse caractéristique de sortie des ions du moteur. En déduire l'intensité  $F$  de la force de poussée du moteur (identifiée à la question 3) en fonction de  $I$ ,  $\mu$ ,  $V_a$  et  $e$ .
- ❑ 25 – La densité volumique de courant dans le moteur est liée à la tension d'accélération par la loi de Child-Langmuir que nous admettrons  $j = \frac{4\epsilon_0}{9} \sqrt{\frac{2e}{\mu}} \frac{V_a^{3/2}}{d^2}$  la distance  $d$  étant celle séparant les deux électrodes de la grille accélératrice. Exprimer  $F$  en fonction de  $V$ ,  $d$ ,  $\epsilon_0$  et du diamètre  $D$  du jet de gaz.

Soit un moteur ionique utilisant du Xénon, de masse molaire  $M = 131 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et possédant les caractéristiques suivantes :

- tension accélératrice  $V_a = 700 \text{ V}$  ;
  - distance  $d$  entre les deux électrodes de la grille accélératrice :  $d = 2,50 \text{ mm}$  ;
  - diamètre de chaque trou dans les électrodes de grille délimitant les jets élémentaires  $D = 2,00 \text{ mm}$  ;
  - nombre de trous en vis-à-vis dans chaque électrode :  $N = 2,20 \cdot 10^3$ .
- ❑ 26 – Calculer les valeurs numériques de la poussée  $F$  de ce moteur, de la vitesse de sortie des ions et de la masse de Xénon consommée sur une période de 90 jours de fonctionnement. Evaluer la puissance cinétique totale transmise au jet de gaz propulsé.
- ❑ 27 – Justifier sans calcul la nécessité de neutraliser le jet d'ions issu du moteur en lui fournissant des électrons.

### IV. – Application du moteur ionique au maintien d'un satellite en orbite basse

On considère un satellite terrestre de masse  $m_s = 250 \text{ kg}$  en orbite circulaire basse à l'altitude  $h = 300 \text{ km}$ . Cette altitude est telle que les hautes couches de l'atmosphère le freinent.

- ❑ 28 – Exprimer l'énergie cinétique  $E_c$  du satellite en fonction de son énergie mécanique  $E_m$  ; en déduire que, paradoxalement, le freinage entraîne une augmentation de la vitesse.
- ❑ 29 – Lorsque le moteur est éteint, les forces de frottement font perdre au satellite une altitude  $\Delta h = 20 \text{ m}$  à chaque révolution. Exprimer la variation d'énergie mécanique correspondante, effectuer l'application numérique.
- ❑ 30 – Le moteur ionique étudié précédemment permet-il de maintenir l'altitude de ce satellite ?

## 34 Accumulateurs et piles

### 1 Batterie d'accumulateurs pour un drone :

La batterie d'accumulateurs d'un drone quadrirotor est au Lithium-Polymère (LiPo). En toute rigueur, la « capacité »  $C_{batt}$  d'une batterie représente l'énergie électrique qu'elle va pouvoir fournir, depuis le moment où elle est totalement

chargée, jusqu'au moment où elle est totalement déchargée. La capacité est alors exprimée en  $W \cdot h$ . Afin de comparer les performances des différentes technologies d'accumulateurs (LiPo, NiCd, NiMH, Pb), on définit la capacité massique  $C_{mass}$  des batteries. En effet, pour une même quantité d'énergie emmagasinée, la batterie est plus ou moins lourde selon la technologie employée, ce qui a beaucoup d'importance dans un contexte d'engin volant. Actuellement, les batteries LiPo sont celles qui présentent les capacités massiques les plus importantes.

On note  $m'$  la masse de la batterie embarquée dans le quadrirotor.

En s'appuyant sur des études de mécanique des fluides, on peut écrire que la puissance fournie par les 4 hélices à l'air se met sous la forme  $\mathcal{P}_{air\ tot} = KF_{tot}^{(3/2)}$ ,  $F_{tot}$  représentant la force de portance totale, due aux 4 hélices. Compte tenu que les moteurs et les hélices ont des rendements inférieurs à 1, pour générer une puissance effective  $\mathcal{P}_{air\ tot}$ , il faut consommer une puissance électrique  $\mathcal{P}_{elec}$ , également proportionnelle à  $F_{tot}^{(3/2)}$ , mais supérieure à  $\mathcal{P}_{air\ tot}$ . On pose  $\mathcal{P}_{elec} = \left(\frac{F_{tot}}{K'}\right)^{(3/2)}$ , où  $K' = 0,16\ USI$ . La masse du drone est  $M = 0,90\ kg$ . On donne  $C_{mass} = 200\ W \cdot h \cdot kg^{-1}$ .

**Q1** On suppose que le drone est maintenu en vol stationnaire pendant toute la durée du vol, et que toute la puissance consommée est celle délivrée aux moteurs (les autres organes ont des consommations bien inférieures). Déterminer la durée du vol permise par la batterie.

**Q2** En réalité, les fabricants de batteries n'indiquent pas la « capacité »  $C_{batt}$  de leurs produits, mais deux autres grandeurs :

- la tension nominale, notée  $U$ , exprimée en  $V$  ;
- une grandeur qu'ils appellent improprement « capacité », que nous noterons  $C'_{batt}$ , et qu'ils expriment en  $A \cdot h$ .

Par exemple une batterie classique (technologie au plomb) de démarrage de moteur d'automobile présente les caractéristiques suivantes :  $U = 12\ V$  et  $C'_{batt} = 40\ A \cdot h$ . Quelle est sa « capacité » en  $W \cdot h$  ? Quelle énergie, en  $J$ , peut-elle délivrer en tout ?

## 2 Exemple d'une pile au Lithium (cf e3a MP 2013) :

*Les piles au lithium équipent de nombreux appareils modernes, notamment les téléphones portables et appareils photo.*

*Ce type de pile est constituée d'une borne positive en dioxyde de manganèse  $MnO_2$  et d'une borne négative en lithium ; l'électrolyte est un sel de lithium ( $LiPF_6$ ) dissout dans un solvant organique (carbonate de propylène) et concentré en ions  $Li^+$  (milieu acide). Les couples électrochimiques concernés sont respectivement  $MnO_2/MnO(OH)$  et  $Li^+/Li$ .*

1. Ecrire les réactions intervenant à chaque électrode, en précisant leur nature. En déduire la réaction globale de la pile.
2. Déterminer la quantité de matière de  $Li$  disponible, ainsi que le nombre  $n_e$  de moles d'électrons que peut transférer la pile. En déduire la quantité d'électricité  $Q$  (exprimée en  $C$  puis en  $A \cdot h$ ) qu'elle peut fournir.

**Données :** masse de l'électrode en lithium :  $2,0\ g$  ; courant débité par la pile :  $I = 0,1\ mA$ .

Masses molaires atomiques ( $g \cdot mol^{-1}$ ) :  $Li : 6,94$  ;  $Cl : 35,5$ . Constante de Faraday :  $F = 96500\ C \cdot mol^{-1}$

## 3 Les accumulateurs au plomb

On supposera dans toute cette partie que l'on peut assimiler activité et concentration et que la température est fixée à  $25^\circ C$ .

On se propose d'étudier le fonctionnement d'un accumulateur au plomb, assimilé à une pile électrochimique réversible. Celui-ci comporte deux électrodes constituées respectivement:

- d'une lame de plomb,
- d'une couche de dioxyde de plomb  $PbO_2$  déposée sur une électrode inerte de plomb.

L'électrolyte est une solution concentrée d'acide sulfurique de pH inférieur à 0,5.

*A Diagramme potentiel-pH La figure 3 en annexe donne le diagramme  $E = f(pH)$  simplifié du plomb.*

1- Indiquer sur ce diagramme les domaines de prédominance ou d'existence des espèces suivantes :  $Pb^{2+}$ ,  $Pb$ ,  $PbO$ ,  $PbO_2$ ,  $Pb_3O_4$ .

2- Déterminer le potentiel standard du couple  $PbO_2/Pb^{2+}$  d'après le diagramme potentiel-pH, sachant que le tracé est réalisé en prenant une concentration  $c_0$  en plomb égale à  $1\ mol \cdot L^{-1}$ .

3- Tracer, sur le même graphe, le diagramme potentiel-pH relatif aux couples de l'eau. On considérera que la pression partielle des espèces gazeuses est égale à 1 bar.

4-a) Que peut-on dire de la stabilité du plomb en milieu aqueux ? Ecrire l'équation-bilan de la (ou des) réaction(s) susceptible(s) de se produire.

b) Ecrire l'équation-bilan de la réaction thermodynamiquement permise entre Pb et PbO<sub>2</sub> à pH acide. Comment nomme-t-on une telle réaction ?

c) Que peut-on dire a priori de la cinétique des réactions étudiées aux questions a) et b) ? Pourquoi peut-on observer une décharge de l'accumulateur si celui-ci n'est pas utilisé pendant une durée relativement longue ?

### B Fonctionnement de l'accumulateur au plomb

5- Quelles sont les espèces majoritaires présentes dans une solution d'acide sulfurique concentrée de pH inférieur à 0,5 ?

6-a) En milieu sulfurique, les ions Pb<sup>2+</sup> sont en équilibre avec le sulfate de plomb très peu soluble. Ecrire l'équation-bilan de la réaction de formation de PbSO<sub>4</sub> en faisant intervenir les espèces prépondérantes dans le milieu dont le pH est inférieur à 0,5. Donner l'expression de sa constante d'équilibre, ainsi que la valeur numérique correspondante.

b) Montrer que la concentration en ions Pb<sup>2+</sup> est imposée dans un milieu sulfurique concentré. Quelle en est la valeur ?

7-a) Quelle est la borne positive de l'accumulateur ?

b) Exprimer sa force électromotrice  $e$  à courant nul en fonction du pH.

c) Pourquoi a-t-on intérêt à utiliser de l'acide sulfurique relativement concentré comme électrolyte ?

d) Ecrire l'équation-bilan de la réaction de décharge de l'accumulateur : on veillera à faire intervenir les espèces prépondérantes dans le milieu.

8-a) Comment recharge-t-on un tel accumulateur ? Quelles sont les réactions qui se produisent ?

b) Sachant que l'accumulateur est scellé, expliquer pourquoi il existe une limite de tension à imposer lors de la recharge.

### Données

Dans tous les calculs, les gaz seront assimilés à des gaz parfaits et les phases solides seront considérées comme non miscibles. Les indices (s) et (g) désignent respectivement les espèces en phase solide et en phase gazeuse.

#### ♦ Enthalpies standard de formation à 298 K (en kJ.mol<sup>-1</sup>) :

Ces grandeurs seront supposées constantes dans l'intervalle de température considéré.

| Espèce             | O <sub>2(g)</sub> | SO <sub>2(g)</sub> | PbS <sub>(s)</sub> | PbO <sub>(s)</sub> |
|--------------------|-------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\Delta_f H^\circ$ | 0                 | - 296,8            | - 100,4            | - 217,4            |

Constante d'acidité (à 25°C) : H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> : première acidité forte, pK<sub>A2</sub> = 1,9

Produit de solubilité (à 25°C) : pK<sub>s</sub>(PbSO<sub>4</sub>) = 7,8 ; On considérera que  $\frac{RT \ln(10)}{F} = 0,06$  à 25°C.

#### ♦ Potentiels redox standard (à pH = 0 et 25°C) :

| Couple redox | Pb <sup>2+</sup> /Pb | O <sub>2</sub> /H <sub>2</sub> O | H <sup>+</sup> /H <sub>2</sub> |
|--------------|----------------------|----------------------------------|--------------------------------|
| E° (V)       | - 0,13               | 1,23                             | 0,00                           |

# DOCUMENT ANNEXE

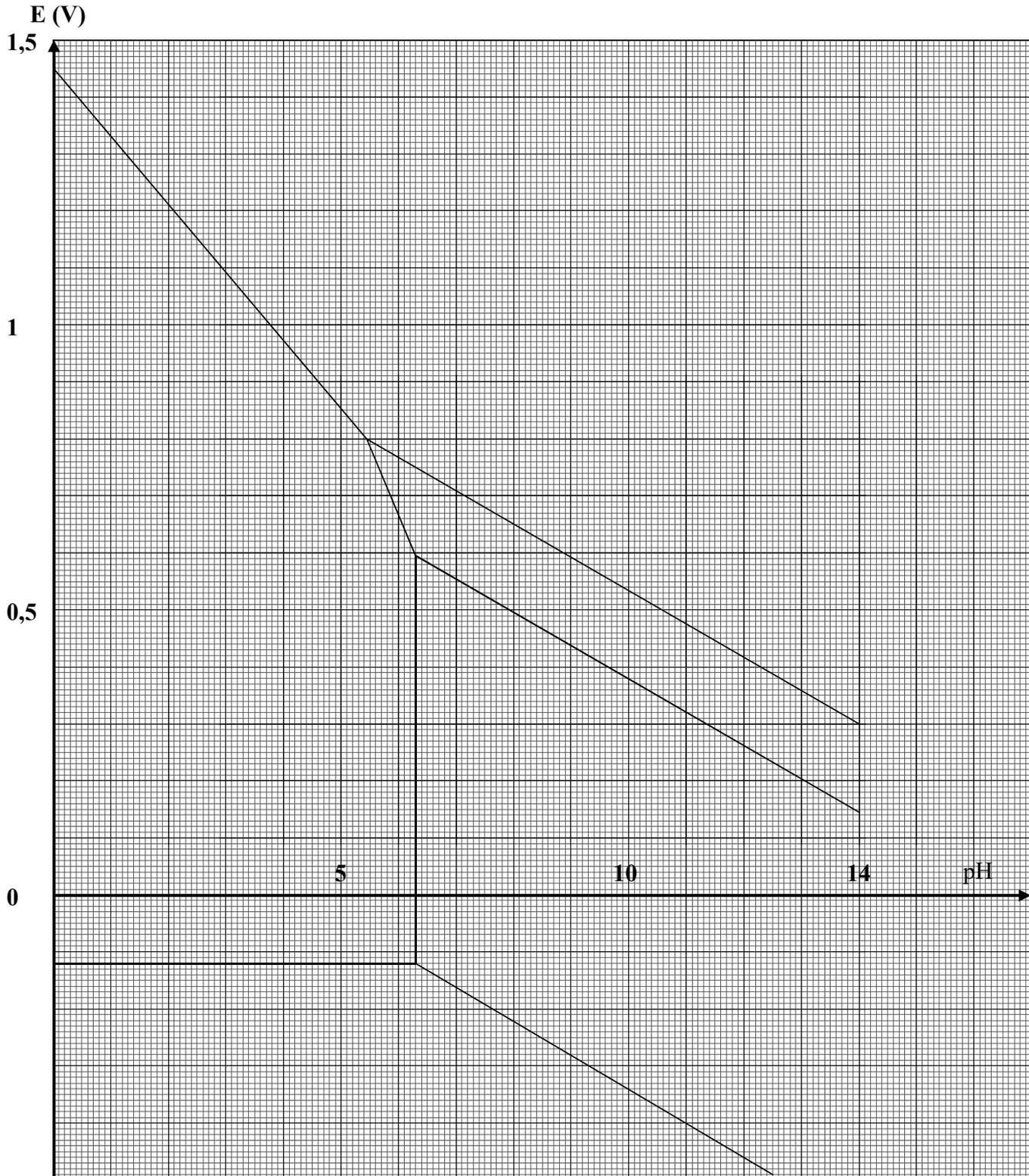


Figure 3 : Diagramme potentiel – pH simplifié de plomb

## 35 CRISTALLOGRAPHIE, ATOMISTIQUE

**1** Le cuivre cristallise dans le réseau cfc ; l'arête de la maille est  $a=360$  pm ; la masse volumique du cuivre vaut  $8,93$  g.cm<sup>-3</sup>. On donne  $M_{Cu}=63,5$  g.mol<sup>-1</sup>.

1°) Calculer le rayon atomique  $r$  du cuivre.

2°) Calculer le nombre d'Avogadro  $N_A$ .

3°) Calculer le rayon maximal des atomes qui peuvent venir s'insérer dans les 2 types de sites du réseau.

**2** Dans le diamant, les atomes de C occupent un réseau cfc et un site tétraédrique sur deux de ce réseau. Calculer la coordinence et la distance entre deux atomes de carbone voisins.  $\rho=3,51$  g.cm<sup>-3</sup>.

**3** Le composé Be<sub>2</sub>Zr cristallise dans le système hexagonal. Les atomes de zirconium et de béryllium sont répartis en couches successives.

Dans une couche, les atomes de zirconium ont une disposition type compact ; dans la suivante, les atomes de béryllium dessinent un réseau hexagonal non centré, chaque atome de béryllium étant équidistant de 3 atomes de zirconium de la couche inférieure. La structure est obtenue par répétition de ces 2 couches.

1°) Dessiner la maille élémentaire.

2°) Les paramètres de cette maille sont :  $a=0,382$ nm ;  $c=0,324$ nm. Calculer la masse volumique de ce composé. On donne  $M_{Zr}=91$ g.mol<sup>-1</sup> et  $M_{Be}=9$ g.mol<sup>-1</sup>.

3°) Calculer les distances interatomiques Be-Zr, Zr-Zr, Be-Be les plus courtes.

Les rayons atomiques étant  $r_{Zr}=0,158$ nm et  $r_{Be}=0,112$ nm, que peut-on en déduire quant au contact des atomes ?

**4** (CCP Jean-Pascal L.) La galène

Le sulfure de plomb ou la galène est utilisé dans les accumulateurs de batteries. Ce composé cristallise de la même façon que le chlorure de sodium, pour lequel les ions chlorure forment un réseau cubique à faces centrées, et les ions sodium occupent tous les sites octaédriques.

1°) Représenter la maille. Donner la formule de la galène. Déterminer les coordinences de chaque ion.

2°) On donne  $r_{Pb}/r_S = 0,652$ . L'arête de la maille est  $a = 608$  pm. Déterminer les rayons ioniques.

3°) Déterminer la masse volumique de la galène.  $M_{Pb} = 207$  g.mol<sup>-1</sup>,  $M_S = 32$  g.mol<sup>-1</sup>,  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ .

### 5- L'atome de cuivre et ses ions (Mines-Ponts épreuve de chimie)

*Le cuivre est l'élément de numéro atomique  $Z=29$ .*

1°) Donner la configuration électronique attendue, d'après les règles de Klechkowski et de Hund et le principe d'exclusion de Pauli, de l'atome de cuivre dans son état fondamental.

2°) En fait, cet atome constitue une exception à la règle de Klechkowski : le niveau 4s n'est peuplé que d'un électron. Proposer une explication.

3°) Prévoir la configuration électronique des ions Cu<sup>+</sup> et Cu<sup>2+</sup> dans leur état fondamental. Les énergies de première et de seconde ionisation du cuivre sont respectivement 7,7 eV/at et 20,2 eV/at. Commenter.

**6** (Yvan B. CCP 2008)

Zr cristallise dans le système cubique centré pour  $T > 863^\circ$ .

1°) Montrer que la compacité vaut 0,68 pour le système cubique centré.

2°) Donner, sans démonstration, la coordinence et la compacité des systèmes cubique centré et cubique faces centrées. Laquelle est la plus compacte ?

3°) Dénombrer et situer les sites interstitiels dans le réseau cubique à faces centrées.

4°) Calculer les rayons des atomes pouvant rentrer dans les différents sites, en fonction du paramètre  $a$  de la maille.

On donne les rayons des deux types de sites pour le zirconium :  $r_1 = 36,5$  pm et  $r_2 = 67,3$  pm. Les identifier.

5°) Zr réagit avec H<sub>2</sub> pour former un hydrure. On donne le rayon de l'atome d'hydrogène :  $r_H = 37$ pm. Du fait de l'encombrement, dans quel site l'hydrogène peut-il se placer a priori ?

# MF0 : Statique des fluides

Ce chapitre, qui figure au programme de première année PCSI, donnera l'occasion aux étudiants issus de cette filière, de consolider les compétences qui y sont associées ; il est aussi destiné à mettre en place des notions et des notations qui seront reprises dans l'étude des fluides en mouvement. Dans tout le chapitre, le référentiel d'étude est supposé galiléen.

## 1 Introduction

### 1.1 Les différentes échelles importantes

Un **fluide** est un milieu matériel déformable, dans lequel les particules constitutives (atomes, molécules, ions) peuvent se déplacer les unes par rapport aux autres sur de grandes distances par rapport à leur taille caractéristique  $D$ .

Un fluide est qualifié de **gaz** lorsque les distances inter-particules sont grandes devant  $D$  (sauf au moment des chocs) ; il occupe alors tout le volume mis à sa disposition.

Un fluide est qualifié de **liquide** lorsque les distances inter-particules sont comparables à  $D$ , ce qui rend leurs interactions (forces de Van der Waals) importantes ; un liquide a un volume propre.

Il existe des conditions de température et de pression (au-delà du point critique) pour lesquelles les corps purs ne peuvent plus exister sous les deux formes, liquide et gaz ; on parle alors simplement d'état fluide.

Les fluides peuvent être observés à différentes échelles :

- l'**échelle macroscopique**, dont la dimension caractéristique, notée  $L$ , est celle de la zone de fluide étudiée ;
- l'**échelle microscopique**, dont la dimension caractéristique, notée  $\ell$ , est le **libre parcours moyen**, c'est-à-dire la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux chocs ;
- l'**échelle mésoscopique**, dont la dimension caractéristique, notée  $a$ , est intermédiaire (sauf lorsque cela est impossible) entre l'échelle macroscopique et l'échelle microscopique :

$$\ell \ll a \ll L.$$

À l'échelle microscopique, le fluide est un milieu **discret**. Afin de pouvoir malgré tout le considérer comme un milieu **continu**, il est nécessaire de ne pas l'observer à cette échelle ; c'est pourquoi on introduit cette notion d'échelle mésoscopique.

#### Exemple

Deux exemples fixent les idées :

- dans l'air, à 300 K, sous une pression de 1 bar, le libre-parcours moyen d'une molécule est de l'ordre de 70 nm ( $\ell \approx 10^{-7}$  m) ; si le système fluide étudié est l'air contenu dans une salle de classe, dont la taille caractéristique est de quelques mètres ( $L \approx 1$  m), on peut prendre par exemple  $a = 0,1$  mm, ou bien  $a = 1$  mm ;
- dans un liquide, le libre-parcours moyen est comparable au diamètre des molécules, de l'ordre de quelques centaines de pm ( $\ell \approx 10^{-10}$  m) ; si le système fluide étudié est l'eau contenue dans une cuve, dont la taille caractéristique est de quelques décimètres ( $L \approx 0,1$  m), on peut prendre par exemple  $a = 0,01$  mm, ou bien  $a = 0,1$  mm.

#### Remarque

Il n'est pas toujours possible de travailler à une échelle mésoscopique. Par exemple dans les hautes couches de l'atmosphère, le libre parcours moyen  $\ell$  devient comparable à la dimension caractéristique  $L$  du système fluide étudié (par exemple le fluide entourant un engin spatial). Le fluide ne peut alors plus être modélisé comme un milieu continu.

### 1.2 Notion de particule de fluide

Une **particule de fluide** est un système fermé (donc de masse  $\delta m$  constante au cours du temps), correspondant au fluide situé à l'intérieur d'un volume  $d\tau$  de taille mésoscopique.

Un tel volume contient un très grand nombre de molécules, ce qui permet d'y définir des grandeurs intensives macroscopiques telles que la pression  $P$ , la température  $T$ .

Mais en même temps, ce volume est infinitésimal par rapport au volume macroscopique. On peut donc considérer qu'il y existe un équilibre thermodynamique local, et que les grandeurs macroscopiques intensives sont uniformes à l'échelle mésoscopique (c'est-à-dire indépendantes des coordonnées d'espace). On parle de grandeurs **locales**.  $P(M)$ ,  $T(M)$ , sont la pression et la température du fluide dans la particule de fluide située au voisinage du point  $M$ . Elles varient continument à l'échelle macroscopique.

**Masse volumique** La masse volumique d'un fluide est le rapport de la masse au volume d'une particule de fluide ; c'est une grandeur intensive :

$$\mu(M) = \frac{\delta m}{d\tau}(M) \quad \mu \text{ est en } \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}.$$

Un fluide est qualifié de **compressible** si sa masse volumique dépend des conditions ambiantes (pression et température), donc de la particule de fluide considérée :  $\mu = \mu(M)$ .

Il est qualifié d'**incompressible** si sa masse volumique  $\mu$  est une constante, caractéristique de ce fluide. Un gaz, qui occupe toujours tout le volume mis à sa disposition, est un fluide compressible. Un liquide, au sein duquel les molécules sont très proches, et interagissent fortement, est peu compressible. En première approximation, un liquide peut être considéré comme incompressible.

### Remarque

Si on tient compte de la réalité microscopique d'un fluide, une particule de fluide n'est pas un système fermé au sens strict. En effet, du fait de l'agitation thermique, il y a en permanence des molécules qui entrent dans le volume mésoscopique  $d\tau$  et d'autres qui en sortent. Mais par définition de la particule de fluide, ces flux entrant et sortant s'équilibrent, ce qui lui permet de conserver une masse  $\delta m$  constante au cours du temps. En statique des fluides, il n'y a pas d'écoulement, c'est-à-dire pas de mouvement à l'échelle macroscopique, donc les particules de fluides sont immobiles. Et si les grandeurs intensives sont invariables dans le temps, les particules de fluides conservent leur forme et leur volume au cours du temps. Il n'en sera pas de même dans l'étude des fluides en écoulement.

## 2 Forces dans un fluide au repos

### 2.1 Notations

De manière générale, on adopte les notations indiquées sur la figure 1 : un point courant à l'intérieur d'un volume  $V$  sera noté  $M$ , et un point courant sur la surface  $S$  délimitant  $V$  sera noté  $N$ . Les éléments de volume et de surface, dans les voisinages de ces deux points seront notés  $d\tau$  et  $dS$ .

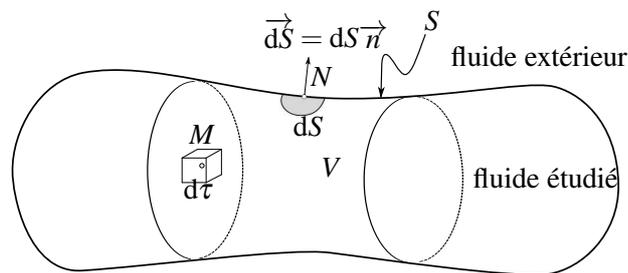


Figure 1 – Éléments de volume et de surface.

### 2.2 Forces de volume

#### a) Notion de force de volume

Les **forces de volume** correspondent aux actions mécaniques de longue portée, et agissent au cœur du fluide étudié.

En reprenant à nouveau les notations de la figure 1, on peut écrire la force élémentaire exercée en  $M$  sur le volume  $d\tau$  du fluide  $\vec{\delta F}_v(M) = \vec{\phi}(M) d\tau$ .

La **densité volumique de force** en  $M$ , ou **force volumique**, est :

$$\vec{\varphi}(M) = \frac{\vec{\delta F}_v(M)}{d\tau}.$$

En ce qui concerne l'unité dans le Système international :

$$\varphi \text{ est en } \text{N}\cdot\text{m}^{-3}.$$

b) Exemples de densités volumiques de forces

• **Densité volumique de force de pesanteur :**

$$\vec{\varphi}_{pes}(M) = \mu(M) \vec{g}(M),$$

$\mu$  étant la masse volumique ;

• **Densité volumique de force électrique :**

$$\vec{\varphi}_{elm}(M) = \rho(M) \vec{E}(M),$$

$\rho$  étant la densité volumique de charge et  $\vec{E}$  le champ électrique ; on reconnaît, dans l'expression ci-dessus, la loi de force de Lorentz, exprimée ici non pas pour une charge ponctuelle mais pour une charge répartie en volume, cette charge étant fixe dans le cadre de la statique des fluides.

### 2.3 Force de pression

La pression dans un fluide correspond à des actions de contact, c'est-à-dire des actions de courte portée : interactions répulsives liées à l'agitation moléculaire (chocs, répulsions électrostatiques à courte distance) et interactions (en général attractives) associées aux forces entre dipôles. En un point  $N$  de la surface fermée  $S$  délimitant le fluide étudié, la force de pression élémentaire exercée par le fluide extérieur sur le fluide étudié est donnée par :

$$\vec{\delta F}_{pression}(N) = -P(N) d\vec{S}(N) = -P(N) dS \vec{n}(N),$$

$d\vec{S}(N)$  étant, dans le voisinage de  $N$ , dirigé de l'intérieur de  $S$  vers l'extérieur, c'est-à-dire selon la normale sortante  $\vec{n}(N)$ , conformément aux notations de la figure 1.

La force de pression est orthogonale à la surface sur laquelle elle s'applique.

Puisque la force de pression traduit des actions de contact, elle est qualifiée de force de surface.

La **contrainte surfacique** de pression, ou **densité surfacique de force** de pression en  $N$ , ou **force surfacique**, est :

$$\vec{\tau}_s(N) = -P(N) \vec{n}(N) = \frac{\vec{\delta F}_{pression}(N)}{dS}.$$

En ce qui concerne les unités dans le Système international :

$$P \text{ est en Pa, ou en } \text{N}\cdot\text{m}^{-2}$$

$$\tau_s \text{ est en Pa, ou en } \text{N}\cdot\text{m}^{-2}.$$



La pression est une grandeur **scalaire**. Ne pas la confondre avec la force de pression qui, elle, est une grandeur **vectorielle**.

**Complément : pression et surpression** On évolue quasiment en permanence dans l'atmosphère, qui est un milieu **pressurisé**. La pression qui y règne, souvent notée  $P_0$  est **loin d'être négligeable**.

Dans les conditions dites standard,  $P_0 = 1.10^5$  Pa, et chaque  $\text{cm}^2$  de surface subit une force de pression de 10 N , donc l'équivalent du poids d'une masse d'environ 1 kg. C'est considérable !

Pourtant, au quotidien, on ne ressent pas ces forces pressantes, tout simplement parce que leurs effets se compensent quasiment toujours : l'intérieur des poumons et l'extérieur du corps ; l'intérieur et l'extérieur d'un pneu « non gonflé », etc.

C'est la raison pour laquelle il est souvent utile de ne s'intéresser qu'à la **surpression**, c'est-à-dire la différence  $\Delta P = P - P_0$  entre la pression  $P$  et la pression ambiante  $P_0$ .

Quand on « gonfle un pneu à 2 bars », cela signifie que l'on impose une surpression de 2 bars à l'intérieur, par rapport à l'extérieur. La pression qui règne à l'intérieur de la chambre est de l'ordre de 3 bars.

Quand on étudie les actions mécaniques subies par un barrage hydraulique, on doit prendre en compte les effets, non pas de la **pression**, mais de la **surpression** due à la présence de l'eau quand le barrage est rempli. En effet, en l'absence d'eau, le barrage est soumis aux forces pressantes exercées par l'atmosphère, de part et d'autre, et celles-ci se compensent.

Les effets de la pression ambiante sont toutefois à prendre en compte dans certaines situations. Par exemple lors de l'utilisation de ventouses, ou plus généralement lorsque l'on crée un vide partiel (« dépression ») dans une enceinte ou dans une zone de l'espace.

## 2.4 Équivalent volumique des actions de pression

On considère une particule de fluide mésoscopique, en forme de parallélépipède rectangle, comme le montre la figure 2.

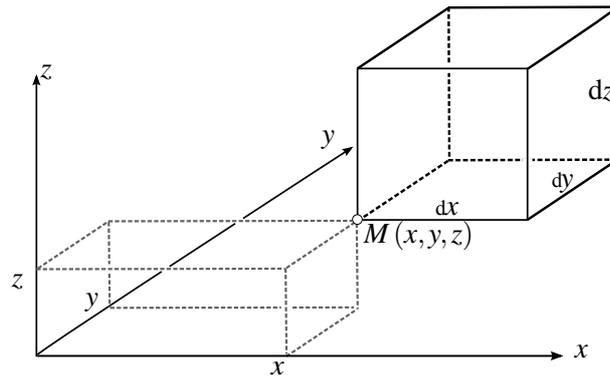


Figure 2 – Particule de fluide.

Cette particule de fluide est soumise aux forces de pression sur chacune de ses 6 faces. La résultante de ces forces est :

$$\begin{aligned} \vec{\delta F}_{\text{pression}}(x, y, z) &= (P(x, y, z) - P(x + dx, y, z)) dy dz \vec{u}_x \\ &\quad + (P(x, y, z) - P(x, y + dy, z)) dz dx \vec{u}_y \\ &\quad + (P(x, y, z) - P(x, y, z + dz)) dx dy \vec{u}_z, \end{aligned}$$

ce que l'on peut encore écrire, au premier ordre en  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  :

$$\vec{\delta F}_{\text{pression}}(x, y, z) = -\frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) dx dy dz \vec{u}_x - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) dy dz dx \vec{u}_y - \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) dz dx dy \vec{u}_z,$$

ou encore :

$$\vec{\delta F}_{\text{pression}}(x, y, z) = -\left( \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) \vec{u}_x + \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) \vec{u}_y + \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) \vec{u}_z \right) d\tau.$$

On reconnaît l'opérateur de dérivation spatiale **gradient** :

$$\vec{\delta F}_{\text{pression}} = -\vec{\text{grad}} P d\tau.$$

L'étude qui précède montre que, bien que les forces de pression soient des forces de surface, il est possible de les prendre en considération en introduisant une densité volumique de force liée au gradient du champ de pression.

La **densité volumique de force de pression** est :

$$\vec{\phi}_{\text{pression}} = -\overrightarrow{\text{grad}}P.$$

Qualitativement, le signe moins s'interprète aisément : le vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}}P$  indique la direction dans laquelle la pression augmente spatialement le plus. La résultante des forces de pression s'exerçant sur un petit domaine est au contraire dirigée des zones de forte pression vers celles de basse pression.

## 2.5 Résultante des forces de pression s'exerçant sur une surface fermée dans le cas d'une pression uniforme

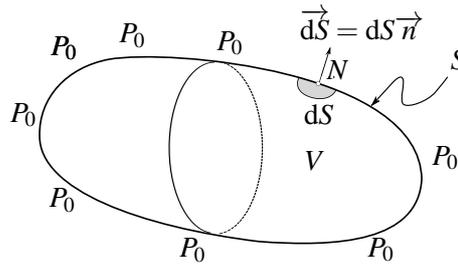


Figure 3 – Pression uniforme autour d'une surface fermée.

Soit un objet, de volume  $V$ , délimité par une surface  $S$  fermée, autour de laquelle règne une pression  $P_0$  uniforme (c'est-à-dire indépendante des coordonnées d'espace), comme le montre la figure 3. Par une expérience de pensée, on peut ôter l'objet, et remettre à sa place le même fluide que celui qui l'entoure, à la pression uniforme  $P_0$ . Dans le volume  $V$  de fluide remis en place, on a donc en tout point  $\vec{\phi} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) = \vec{0}$ . La résultante des forces de pression  $P_0$  sur l'objet est alors :

$$\vec{F}_{\text{pression } P_0} = \iiint_V -\overrightarrow{\text{grad}}(P) d\tau = \vec{0}.$$

Lorsque le champ de pression est uniforme, la résultante des forces de pression s'exerçant sur une surface **fermée** est nulle.

## 2.6 Application pratique

Sur la figure 4, la surface globale  $S$ , obtenue en réunissant  $S_1$  et  $S_2$ , est une surface fermée, le vecteur surface élémentaire étant partout orienté vers l'extérieur si on choisit  $d\vec{S}_1$  sur la partie 1 et  $d\vec{S}_2$  sur la partie 2. L'encadré du paragraphe précédent permet d'écrire  $\iint_{S_1} P_0 d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} P_0 d\vec{S}_2 = \vec{0}$ . Puisque  $d\vec{S}_1 = -d\vec{S}_2$ , on obtient :

$$\iint_{S_1} P_0 d\vec{S}_1 = \iint_{S_2} P_0 d\vec{S}_2,$$

les vecteurs  $d\vec{S}_1$  et  $d\vec{S}_2$  étant définis sur la figure ci-dessous.

Lorsque le champ de pression est uniforme, pour calculer la résultante des forces de pression s'exerçant sur une surface ouverte  $S_1$ , délimitée par un contour plan  $\Gamma$ , on peut « aplatir » cette surface pour la ramener dans le plan du contour.

Sur l'exemple de la figure 4, la résultante des forces de pression  $P_0$  s'exerçant sur l'extérieur du bonnet à deux pointes est égale à celle de pression  $P_0$  s'exerçant sur la surface plane grisée, orientée dans le sens de  $d\vec{S}_2$ . Et puisque cette surface est plane et que la pression  $P_0$  est uniforme, cette force vaut  $P_0 S_2 \vec{n}_2$ .



Ceci n'est vrai que si la pression régnant autour de la surface est **uniforme**, ou peut être considérée comme telle.

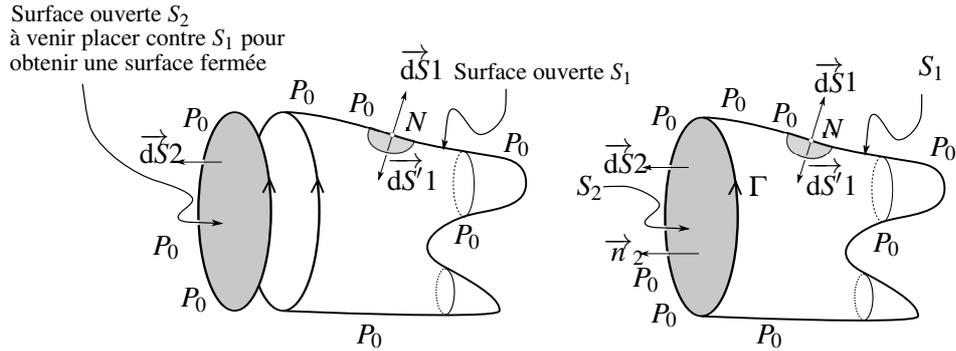


Figure 4 – Utilisation d'une surface plus simple.

### 3 Relation fondamentale de la statique des fluides

#### 3.1 Expression générale

On rappelle que dans toute le chapitre, on se place dans un référentiel galiléen.

En y appliquant le **principe fondamental de la statique** à une particule de fluide, de masse  $\delta m$ , de volume  $d\tau$ , située dans le voisinage d'un point  $M$ , soumise à  $n$  forces de volume, de densités volumiques  $\vec{\varphi}_i(M)$ , on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^n \vec{\varphi}_i(M) d\tau - \overrightarrow{\text{grad}} P(M) d\tau = \vec{0}.$$

La **relation fondamentale de la statique des fluides** est :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \sum_{i=1}^n \vec{\varphi}_i.$$

#### 3.2 Cas de la seule pesanteur

Dans le cas très fréquent où la seule force de volume réelle (en plus de l'équivalent volumique des forces de pression) est due à la pesanteur, la somme des  $\vec{\varphi}_i$  se réduit à  $\mu \vec{g}$ , et la relation fondamentale de la statique des fluides devient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \mu \vec{g}.$$

#### Remarques

- Cette loi est parfois appelée **relation fondamentale de l'hydrostatique**.
- La relation fondamentale de la statique des fluides est une loi **locale**. Elle n'est pas attachée à un système matériel.

Dans des conditions ordinaires de température et de pression, la masse volumique d'un gaz est très inférieure à celle d'un liquide :  $\frac{\mu_{\text{gaz}}}{\mu_{\text{liquide}}} \ll 1$ . Typiquement, ce rapport est de l'ordre de  $10^{-3}$ . À titre d'exemple,  $\mu_{\text{eau}} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et, dans les conditions ordinaires de température et de pression,  $\mu_{\text{air}} = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Dans une situation mettant en présence à la fois des gaz et des liquides, on pourra négliger l'évolution de la pression avec l'altitude dans le gaz, et ne la considérer que dans le liquide.

## 4 Évolution de la pression au sein d'un fluide incompressible dans un champ de pesanteur uniforme

**Obtention de la loi** On considère un fluide incompressible, c'est-à-dire dont la masse volumique  $\mu$  est constante (indépendante du temps) et uniforme (indépendante des coordonnées d'espace). On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. On adopte un système de coordonnées cartésiennes, l'axe  $(Oz)$  étant vertical **ascendant**. Le champ de pesanteur  $\vec{g}$  est supposé uniforme.

En l'absence de forces volumiques autres que celle de pesanteur, la relation fondamentale de la statique des fluides s'écrit, dans le référentiel galiléen choisi, et après projection dans la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mu g \end{pmatrix}.$$

Les deux premières lignes montrent que la pression ne dépend ni de  $x$  ni de  $y$ . C'est donc une fonction d'une seule variable,  $z$ , et la dernière équation conduit à  $\frac{dP}{dz} = -\mu g$ . L'intégration de cette équation différentielle donne :  $P(z) = -\mu gz + K$ .

La constante  $K$  se détermine grâce à la pression régnant à l'altitude  $z = 0$  :

$$P(z) = -\mu gz + P(0).$$

**!** Une erreur de signe dans la relation  $P(z)$  est facilement décelable : plus on remonte vers la surface d'un liquide, plus la pression diminue. Ne pas oublier qu'ici  $(Oz)$  est ascendant.

### Remarques

- La relation  $P(z)$  obtenue est assez bien vérifiée par les liquides, fluides très peu compressibles ;
- l'augmentation de la pression avec la profondeur est provoquée par le poids de la colonne de fluide se trouvant au-dessus ;
- il est important de noter qu'au sein d'un fluide incompressible homogène à l'équilibre, la pression ne dépend que de l'altitude. Sur la figure 5, les points  $A_1, B_1, C_1, D_1$  et  $E_1$  sont à la même pression  $P(z_1)$ . De même,  $A_2$  et  $B_2$  sont tous deux à la pression  $P(z_2) = P_0$ .

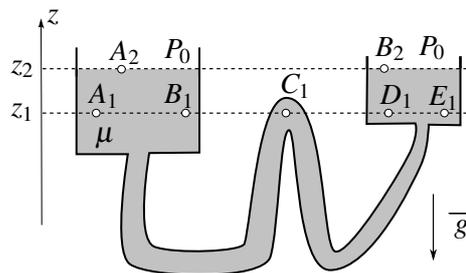


Figure 5 – Points de même pression.

### Expérience

**Application au baromètre de Toricelli** Un tube, rempli de mercure est retourné sur une cuve, contenant également du mercure, comme l'illustre la figure 6. L'atmosphère, qui exerce une pression  $P_0$  sur la surface libre du mercure dans la cuve, empêche le tube de se vider. Si le tube a une hauteur de quelques dizaines de centimètres, il est entièrement rempli de mercure. En revanche, si sa hauteur est supérieure à 76 cm, une poche de « quasi-vide » se forme dans le tube au-dessus de la colonne de mercure liquide, de hauteur  $h$ . La mesure de  $h$  donne accès à la pression  $P_0$  qui s'exerce sur la surface libre et empêche le liquide de sortir du tube.

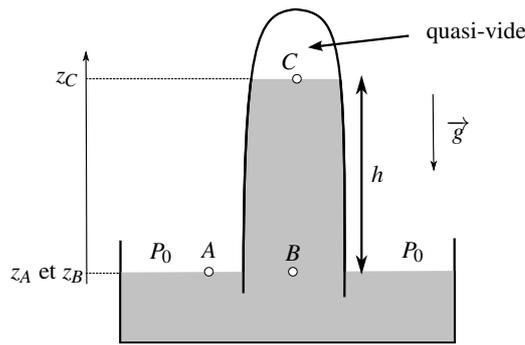


Figure 6 – Baromètre de Toricelli.

On a, d'une part  $P(z_A) = P(z_B)$ , et d'autre part  $P(z_B) - P(z_C) = -\mu g(z_B - z_C) = +\mu gh$ . Or,  $P(z_C) \simeq 0$ , puisqu'au-dessus de la colonne de mercure règne un quasi-vide (en réalité de la vapeur saturante de mercure, de pression 0,3 Pa à température ordinaire). Finalement :

$$P_0 = \mu gh.$$

Pourquoi utiliser le mercure plutôt que l'eau pour réaliser un baromètre de Toricelli ? Prenons  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ . Pour une pression  $P_0 = 1,0 \text{ bar}$ ,  $\mu_{\text{mercure}} = 13,5.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  donne  $h_{\text{mercure}} = 0,76 \text{ m}$ , tandis que  $\mu_{\text{eau}} = 1,0.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  donne  $h_{\text{eau}} \simeq 10 \text{ m}$ . Il y a donc un réel problème d'encombrement !

**Application aux circuits hydrauliques** On considère un flexible, rempli d'un liquide homogène, reliant deux réservoirs, de sections  $S_A$  et  $S_B$ . Attendu qu'au sein d'un fluide homogène en équilibre dans un champ de pesanteur uniforme, la pression ne dépend que de l'altitude, la pression est la même en A et en B sur le schéma de la figure 7 :  $P_A = P_B$ . En revanche, les forces  $\vec{F}_A$  et  $\vec{F}_B$  exercées par le liquide sur les pistons posés dessus sont différentes, si les sections  $S_A$  et  $S_B$  ne sont pas égales, puisque  $\|\vec{F}_A\| = P_A S_A$  et  $\|\vec{F}_B\| = P_B S_B$ . Schématiquement, il est ainsi possible d'assurer un équilibre de l'ensemble en plaçant une fourmi sur le piston de petite section  $S_B$ , et un éléphant sur le piston de grande section  $S_A$ .

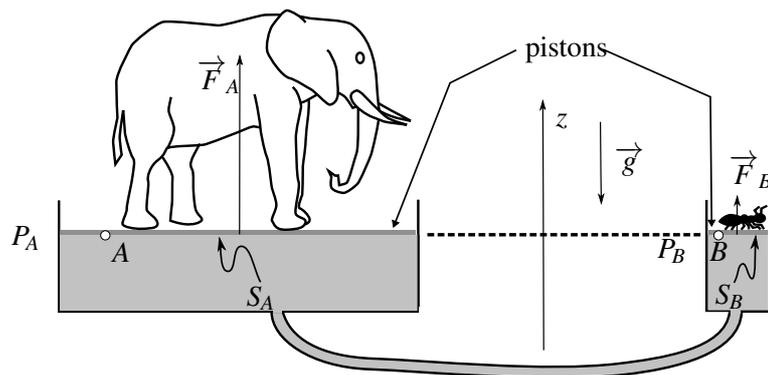


Figure 7 – Schéma de principe d'un circuit hydraulique.

On retrouve ici le principe de fonctionnement des circuits hydrauliques, qui permettent par exemple d'exercer des forces importantes sur les mâchoires d'un disque de frein de véhicule, bien que le conducteur n'exerce sur la pédale de frein qu'un effort bien moindre. Il s'agit d'une démultiplication, semblable à celle que produit un ensemble d'engrenages. Bien évidemment, si on réduit la force à appliquer, on augmente en même temps le chemin à parcourir lors d'un déplacement. Ceci se démontre par un raisonnement énergétique.

## 5 Évolution de la pression au sein d'un gaz parfait isotherme dans un champ de pesanteur uniforme

Si le modèle de fluide incompressible convient assez bien pour un liquide, il n'en est pas de même pour un gaz, dont la masse volumique peut évoluer sensiblement avec la pression et la température. On se limite ici à une atmosphère isotherme, et au

modèle du gaz parfait, dont on rappelle l'équation d'état :  $PV = nRT = \frac{m}{\mathcal{M}}RT$ ,  $\mathcal{M}$  étant sa masse molaire. Une particule de fluide de masse  $\delta m$  occupe donc un volume  $d\tau$ , avec  $Pd\tau = \frac{\delta m}{\mathcal{M}}RT$ .

La masse volumique du gaz parfait peut donc s'écrire :

$$\mu = \frac{\delta m}{d\tau} = \frac{P\mathcal{M}}{RT}.$$

En l'absence de forces volumiques autres que celle de pesanteur, la relation fondamentale de la statique des fluides conduit, comme dans le paragraphe précédent à  $\frac{dP}{dz} = -\mu g$ . En remplaçant  $\mu$  par son expression fonction de la pression, il vient  $\frac{dP}{dz} + \frac{\mathcal{M}g}{RT}P = 0$ , ce qui constitue une équation différentielle linéaire homogène, du premier ordre, à coefficients constants, que l'on peut encore écrire :

$$\frac{dP}{dz}(z) + \frac{1}{H}P(z) = 0,$$

en introduisant une distance caractéristique  $H = \frac{RT}{\mathcal{M}g}$ , appelée **hauteur d'échelle**. La solution de cette équation différentielle est :

$$P(z) = P(0) \exp\left(-\frac{z}{H}\right) = P(0) \exp\left(-\frac{\mathcal{M}gz}{RT}\right).$$

 Ce calcul n'est valable que si l'on adopte pour le gaz le modèle du gaz parfait, et si la température et le champ de pesanteur sont uniformes, avec un axe ( $Oz$ ) vertical ascendant.

### Remarques

- on pouvait également intégrer l'équation différentielle en séparant les variables :  $\frac{dP}{P} = -\frac{\mathcal{M}g}{RT}dz$  conduit à  $\ln P(z) = -\frac{\mathcal{M}gz}{RT} + \ln P(0)$ , puis au résultat obtenu plus haut ;
- dans le cas de l'air,  $\mathcal{M} = 29 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$  et  $T = 273 \text{ K}$ , donnent  $H \simeq 8 \text{ km}$ . Avec ce modèle simple d'atmosphère isotherme, à une altitude de  $3H$ , c'est-à-dire environ 3 fois la hauteur de l'Everest, la pression vaut 5% de sa valeur au niveau de la mer. Bien que la température varie avec l'altitude, ce modèle donne des ordres de grandeur intéressants jusqu'à environ 100 km d'altitude, où la pression est de l'ordre de  $10^{-2} \text{ Pa}$ . Au-delà, la pression diminue moins vite avec l'altitude.

**Facteur de Boltzmann** On rappelle que la constante de Boltzmann  $k_B$  est liée à la constante  $R$  des gaz parfaits et au nombre d'Avogadro  $\mathcal{N}_A$  par la relation  $k_B = \frac{R}{\mathcal{N}_A}$ .

Le terme  $\exp\left(-\frac{\mathcal{M}gz}{RT}\right)$  peut aussi s'écrire  $\exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)$ ,  $m$  étant la masse d'une molécule du gaz parfait. Il s'agit d'un facteur de Boltzmann. Il traduit la compétition entre deux phénomènes physiques : la pesanteur, d'énergie potentielle moléculaire  $mgz$ , qui tend à faire s'accumuler les molécules de gaz près du sol, et l'agitation thermique, d'énergie moléculaire  $k_B T$ , qui conduit les molécules de gaz à tenter d'occuper tous les niveaux d'énergie disponibles.

Le **facteur de Boltzmann** est le terme  $\exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)$ , où  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$  est la constante de Boltzmann.

## 6 Poussée d'Archimède

### 6.1 Notion

Il existe un certain nombre de grandeurs physiques, que l'on utilise fréquemment dans le langage courant, et dont on a la sensation de bien connaître le sens... jusqu'à ce qu'on soit sollicité pour en donner une définition. La poussée d'Archimède en fait certainement partie.

Pourquoi utiliser un nouveau vocabulaire pour parler des actions mécaniques dans un fluide au repos, alors que l'inventaire des forces a déjà été dressé plus haut : forces de surface (forces de pression) et forces de volume (pesanteur et électromagnétique). Que représente la poussée d'Archimède par rapport à tout cela ?

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , la **poussée d'Archimède**  $\vec{\Pi}_A$  est la résultante des forces de pression exercées sur un objet immobile dans  $\mathcal{R}$ , par l'ensemble des fluides au repos qui l'entourent.

## 6.2 Théorème d'Archimède

Comme on l'a vu dans le paragraphe 2.5, si la pression est uniforme tout autour de l'objet, délimité par une surface fermée, la résultante des forces de pression est nulle. Il n'y a donc pas de poussée d'Archimède.

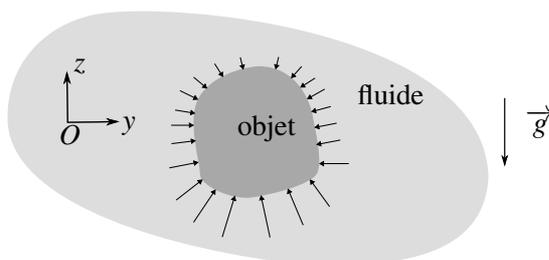


Figure 8 – Forces pressantes au sein d'un fluide en équilibre dans un champ de pesanteur.

Au sein d'un fluide en équilibre dans un champ de pesanteur, la pression n'est pas uniforme ; elle augmente à mesure que l'altitude diminue, comme on l'a vu aux paragraphes 4 et 5. Un objet placé dans le fluide subit donc des forces pressantes plus importantes sur le dessous que sur le dessus, comme le montre la figure 8.

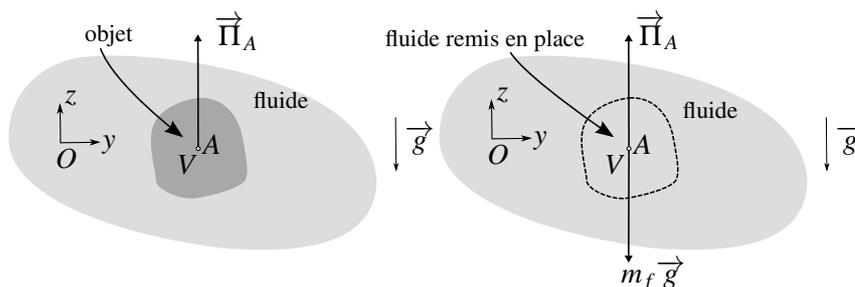


Figure 9 – Remise en place du « fluide déplacé ».

Par une expérience de pensée, retirons l'objet, de volume  $V$ , et remplaçons-le par le fluide, de même forme et de même volume  $V$ , occupant la même position, comme le montre le schéma de droite de la figure 9. Puisque l'ensemble du fluide est supposé en équilibre, la portion de fluide remise en place l'est aussi. Soit  $m_f$  la masse de ce volume  $V$  de fluide. Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire, supposé galiléen, le principe fondamentale de la statique conduit à :

$$m_f \vec{g} + \vec{\Pi}_A = \vec{0},$$

$\vec{\Pi}_A$  représentant la résultante des forces de pression s'exerçant aussi bien sur le fluide remis en place que sur l'objet, c'est-à-dire la poussée d'Archimède.

Il vient donc :

$$\vec{\Pi}_A = -m_f \vec{g}.$$

On peut alors énoncer le **théorème d'Archimède** :

Dans un référentiel galiléen, la résultante des forces de pression exercées par un fluide au repos sur un objet immobile qu'il entoure, est verticale ascendante, et égale à l'opposé du poids du fluide déplacé. On la nomme **poussée d'Archimède**.

### Formules de trigo :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

### Formules de trigo hyperbolique :

$$\operatorname{ch}(a + b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{sh}(a + b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a$$

$$\operatorname{sh}(p) + \operatorname{sh}(q) = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\operatorname{sh}(p) - \operatorname{sh}(q) = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\operatorname{ch}(2a) = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a$$

$$\operatorname{ch}^2 a = \frac{1+\operatorname{ch}(2a)}{2}$$

$$\operatorname{th}(a + b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

$$\operatorname{ch}(a - b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{sh}(a - b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a$$

$$\operatorname{ch}(p) + \operatorname{ch}(q) = 2 \operatorname{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\operatorname{ch}(p) - \operatorname{ch}(q) = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\operatorname{sh}(2a) = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a$$

$$\operatorname{sh}^2 a = \frac{-1+\operatorname{ch}(2a)}{2}$$

$$\operatorname{th}(a - b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

### Notation complexe :

$$\text{Soit } \underline{z} = a + jb.$$

$$|\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\operatorname{arg}(\underline{z}) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) [2\pi] \quad \text{si } a > 0$$

$$\operatorname{arg}(\underline{z}) = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) [2\pi] \quad \text{si } a < 0$$

$$\underline{z}^* = a - jb$$

$$|\underline{z}|^2 = \underline{z} \underline{z}^*$$

$$\operatorname{arg}(\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2) = \operatorname{arg}(\underline{z}_1) + \operatorname{arg}(\underline{z}_2)$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

### Développements limités autour de 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$\operatorname{argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

### Equations différentielles :

$$\frac{df}{dt}(t) + \frac{f(t)}{\tau} = g(t) \quad f(t) = Ke^{-t/\tau} + h(t)$$

où  $h(t)$  est une solution particulière de l'équation complète.

Si  $g(t) = Cte$ , on cherche pour  $h(t)$  une constante.

Si  $g(t)$  est une fonction de  $t$  sinusoïdale pure, on cherche pour  $h(t)$  une fonction de  $t$  sinusoïdale pure, de même fréquence. Pour être efficace, on passe en notation complexe.

$$\frac{d^2f}{dt^2}(t) + \alpha f(t) = A \quad \text{avec } \alpha > 0 \quad f(t) = a \cos(\sqrt{\alpha} t) + b \sin(\sqrt{\alpha} t) + \frac{A}{\alpha}$$

$$\frac{d^2f}{dt^2}(t) - \beta f(t) = A \quad \text{avec } \beta > 0 \quad f(t) = a' \operatorname{ch}(\sqrt{\beta} t) + b' \operatorname{sh}(\sqrt{\beta} t) - \frac{A}{\beta}$$

$$\frac{d^2f}{dt^2}(t) + \gamma \frac{df}{dt}(t) + \lambda f(t) = B \cos(\omega t + \varphi) \quad f(t) = \text{SGESSM} + \text{SPEC.}$$

Et SPEC s'obtient rapidement si on passe en notation complexe. Si on est en « régime sinusoïdal établi », ou « régime sinusoïdal forcé », on ne s'intéresse qu'à cette SPEC, la SGESSM ayant fini par disparaître si le système est stable.

### Formules vectorielles :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

$$\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} d \\ e \\ f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{vmatrix}$$

### Primitives :

| Fonction              | Primitive  |
|-----------------------|--|
| $x^m$                 | $\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$  |
| $\frac{1}{x}$         | $\ln x  + C$   |
| $\frac{1}{x^2 + a^2}$ | $\frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$                            |
| $\frac{1}{1-x^2}$     | $\frac{1}{2} \ln\left \frac{x+1}{x-1}\right  + Cte$<br>si $x \neq 1$ et $-1$ |
| $\cos x$              | $\sin x + C$   |
| $\sin x$              | $-\cos x + C$  |
| $\frac{1}{\cos^2 x}$  | $\tan x + C$   |
| $\frac{1}{\sin^2 x}$  | $-\cotan x + C$  |
| $\tan x$              | $-\ln( \cos x ) + C$   |

| Fonction                          | Primitive  |
|-----------------------------------|--|
| $\frac{1}{\sin x}$                | $\ln\left \tan\frac{x}{2}\right  + C$                              |
| $\frac{1}{\cos x}$                | $\ln\left \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right  + C$ |
| $\tan^2 x$                        | $\tan x - x + C$   |
| $\operatorname{ch} x$             | $\operatorname{sh} x + C$  |
| $\operatorname{sh} x$             | $\operatorname{ch} x + C$  |
| $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ | $\operatorname{th} x + C$  |
| $\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ | $\frac{-1}{\operatorname{th} x} + C$                               |
| $\operatorname{th} x$             | $\ln(\operatorname{ch} x) + C$                                     |

# A PROPOS DES NOTATIONS COMPLEXES EN ELECTRICITE

**Remarque préliminaire :** la notation complexe fait intervenir une pulsation  $\omega$ . Elle n'a donc de sens qu'en régime sinusoïdal pur, c'est-à-dire en régime harmonique.

## Notations

- A un courant  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ , on associe la grandeur complexe  $\underline{i} = I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$ , avec  $\underline{I}_m = I_m e^{j\varphi}$ , de telle manière que  $i(t) = \Re(\underline{i})$ .
- $I_m$  est l'amplitude du courant,  $\underline{I}_m$  son amplitude complexe,  $\varphi$  sa phase à l'origine.
- $I_m = |\underline{i}| = |\underline{I}_m|$ .
- $\varphi = \arg(\underline{i}) = \arg(\underline{I}_m)$
- On peut aussi introduire la valeur efficace. En régime sinusoïdal pur (= régime harmonique), elle est égale à l'amplitude divisée par  $\sqrt{2}$  :  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ .
- On peut aussi définir une valeur efficace complexe :  $\underline{I} = I e^{j\varphi} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi} = \frac{\underline{I}_m e^{j\varphi}}{\sqrt{2}}$ .
- On peut faire la même chose pour une tension (= différence de potentiel)  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi)$

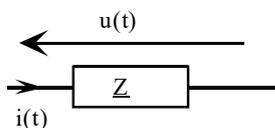
Résumé des notations, en régime sinusoïdal pur de pulsation  $\omega$

|         | Grandeur instantanée        | Grandeur complexe  | Amplitude                                   | Amplitude complexe                   | Valeur efficace            | Valeur efficace complexe   |
|---------|-----------------------------|--|---|--------------------------------------|----------------------------|--|
| courant | $i(t) = \Re(\underline{i})$ | $\underline{i} = I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$ | $I_m =  \underline{i}  =  \underline{I}_m $ | $\underline{I}_m = I_m e^{j\varphi}$ | $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ | $\underline{I} = I e^{j\varphi} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi} = \frac{\underline{I}_m e^{j\varphi}}{\sqrt{2}}$ |
| tension | $u(t) = \Re(\underline{u})$ | $\underline{u} = U_m e^{j\psi} e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t}$    | $U_m =  \underline{u}  =  \underline{U}_m $ | $\underline{U}_m = U_m e^{j\psi}$    | $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ | $\underline{U} = U e^{j\psi} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi} = \frac{\underline{U}_m e^{j\psi}}{\sqrt{2}}$          |

**NB :** pour un courant  $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ , on peut soit se ramener au problème précédent en écrivant  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi - \pi/2)$ , soit poser encore  $\underline{i} = I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$ , mais cette fois avec  $i(t) = \Im(\underline{i})$ .

## Impédances complexes

En convention récepteur :

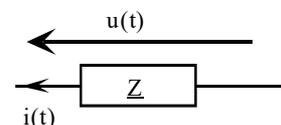


$$\underline{u} = \underline{Z} \underline{i} \quad \underline{U}_m = \underline{Z} \underline{I}_m \quad \underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$$

$$\underline{U} = -\underline{Z} \underline{I}$$

$$U_m = |\underline{Z}| I_m \quad U = |\underline{Z}| I$$

En convention générateur :



$$\underline{u} = -\underline{Z} \underline{i} \quad \underline{U}_m = -\underline{Z} \underline{I}_m$$

$$U_m = |\underline{Z}| I_m \quad U = |\underline{Z}| I$$

## Puissances reçues par un dipôle d'impédance complexe $\underline{Z}$ :

A condition de se placer en convention récepteur (schéma de gauche ci-dessus), on a :

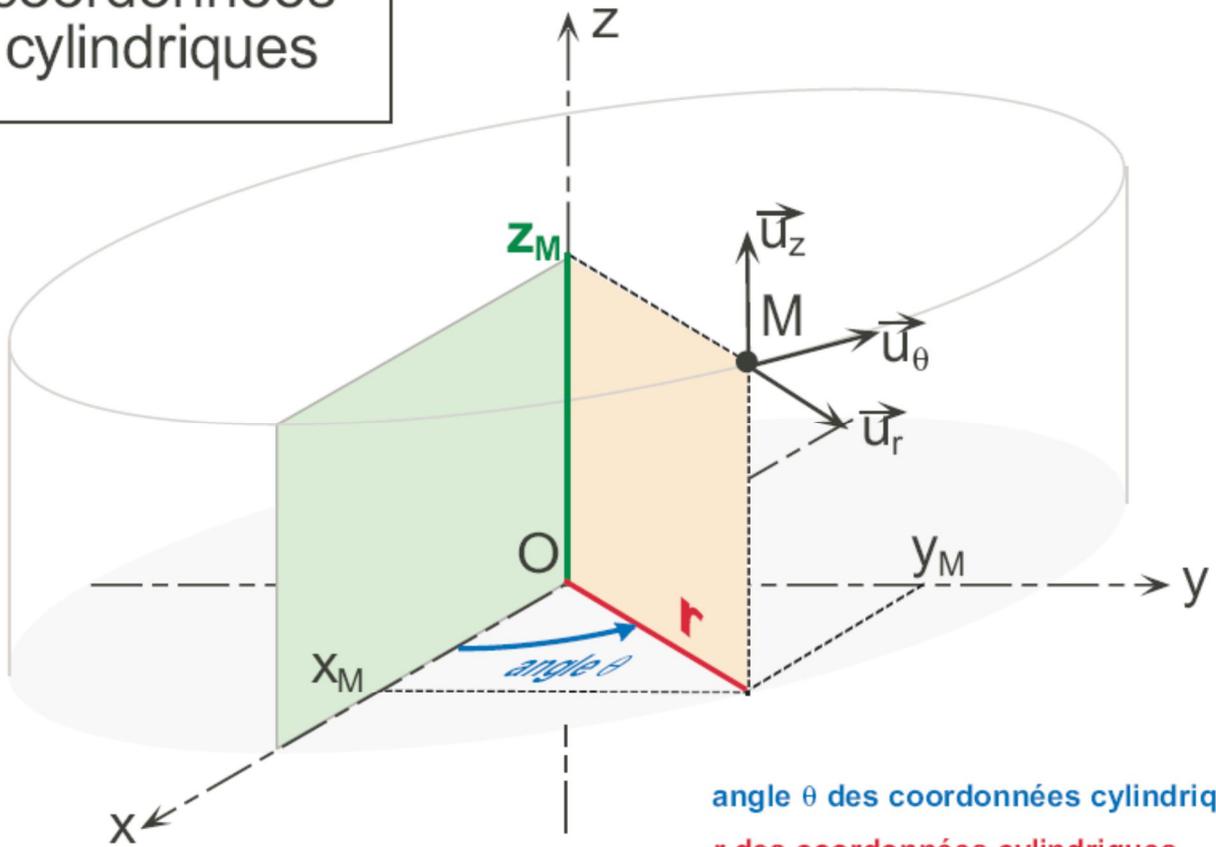
Puissance instantanée :  $P(t) = u(t) i(t)$

$$P_{\text{moy}} = \langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt = \frac{1}{2} \Re(\underline{u} \underline{i}^*) = \frac{1}{2} \Re(\underline{U}_m \underline{I}_m^*) = \Re(\underline{U} \underline{I}^*) = \Re(\underline{Z}) I^2 = U^2 \Re(\underline{Y})$$

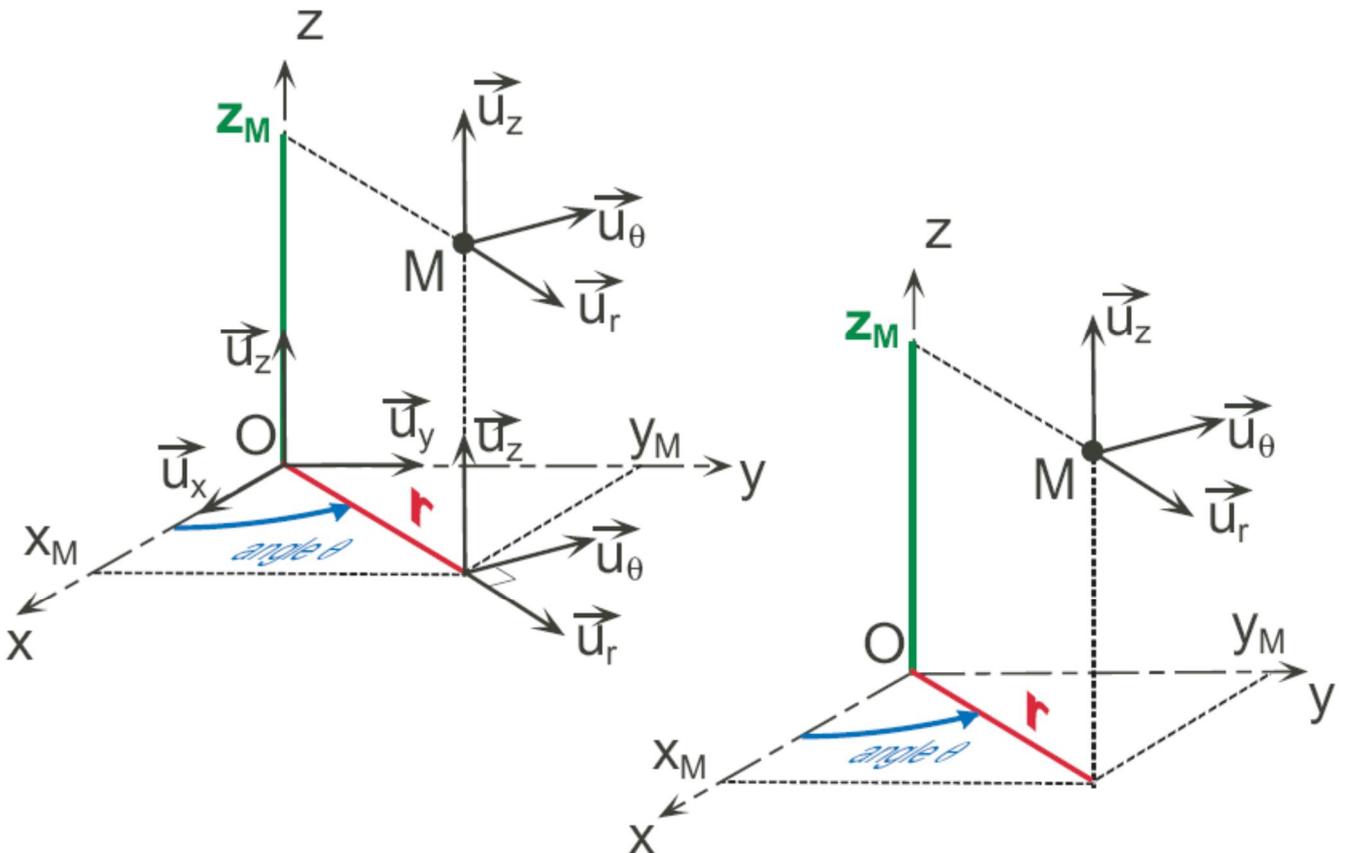
La puissance fournie par le dipôle serait l'opposé de la puissance reçue.

# SYSTEMES DE COORDONNEES

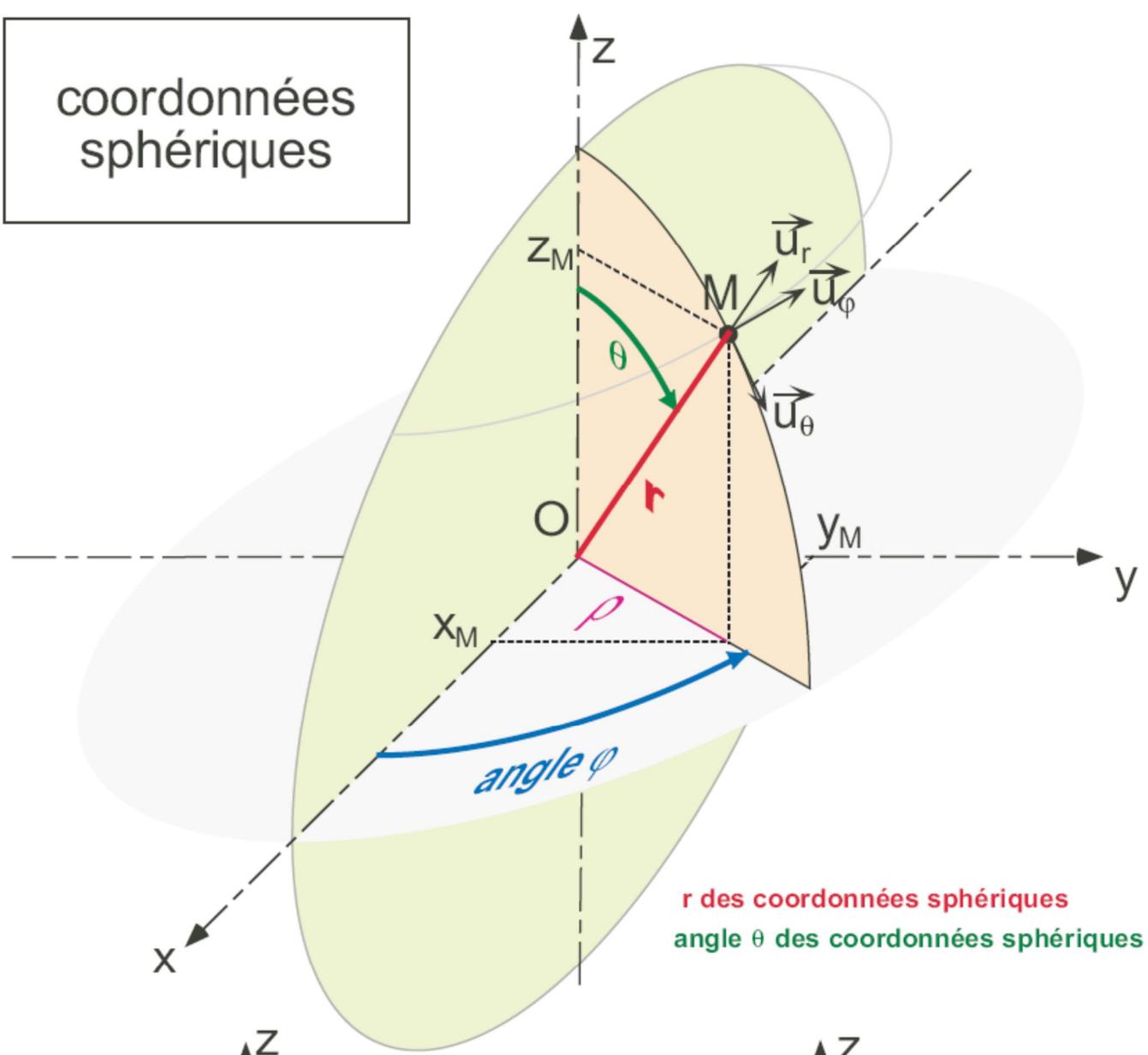
coordonnées  
cylindriques



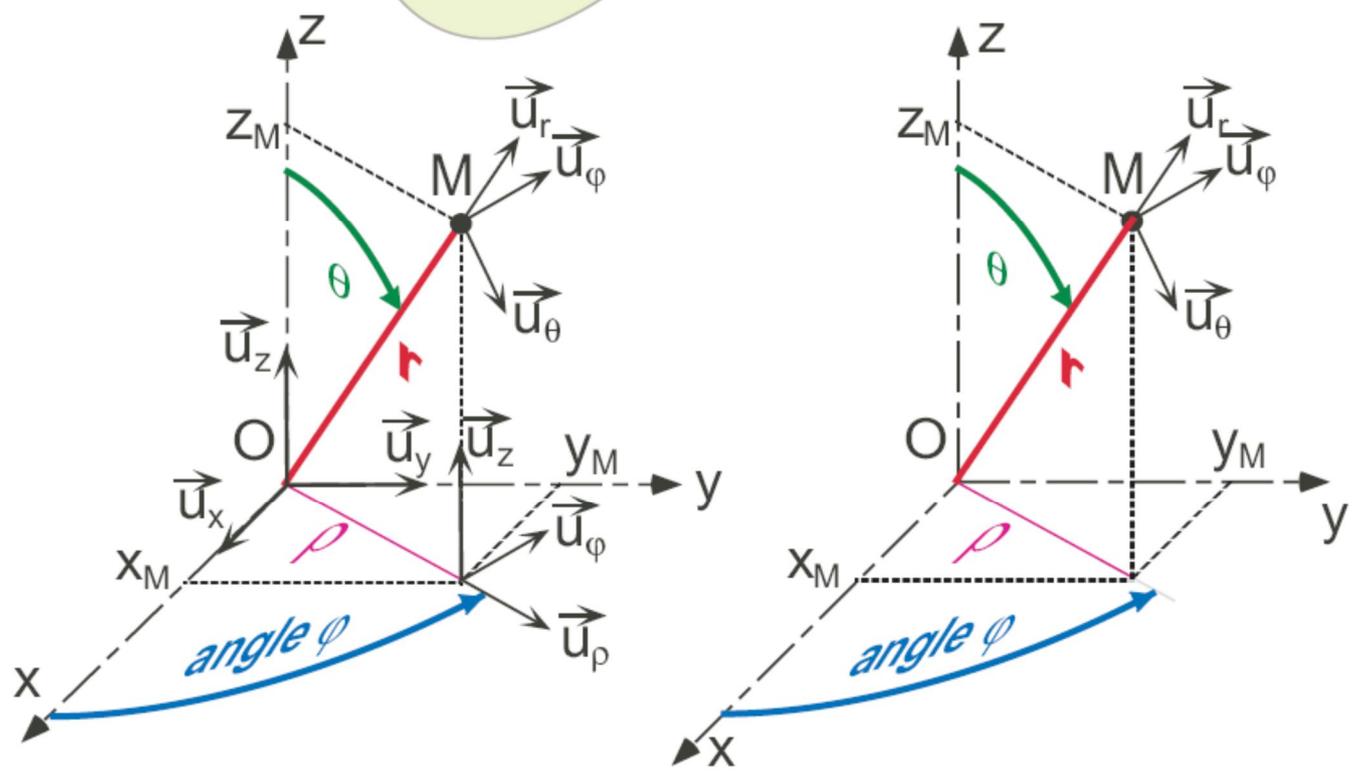
angle  $\theta$  des coordonnées cylindriques  
 $r$  des coordonnées cylindriques



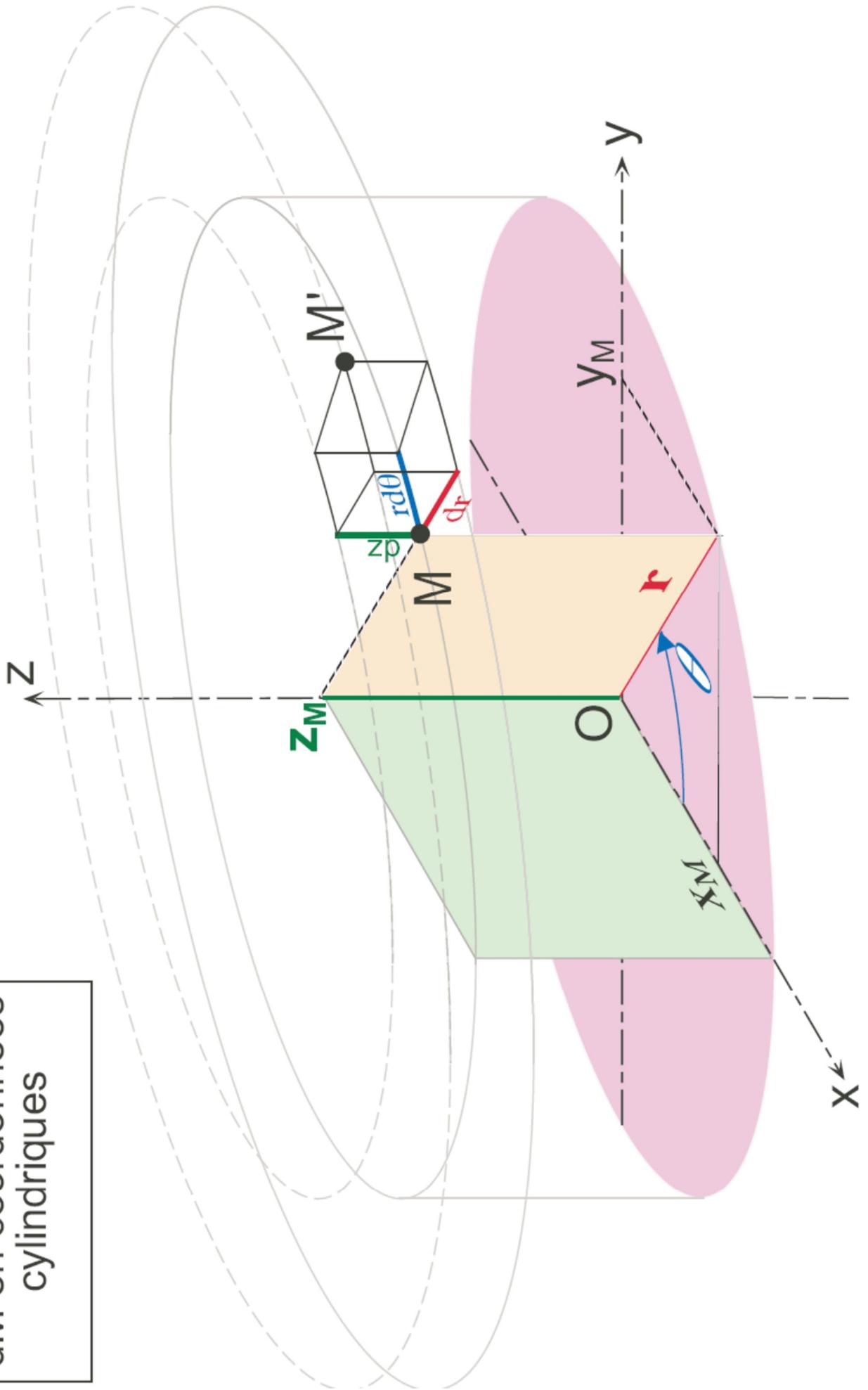
coordonnées  
sphériques



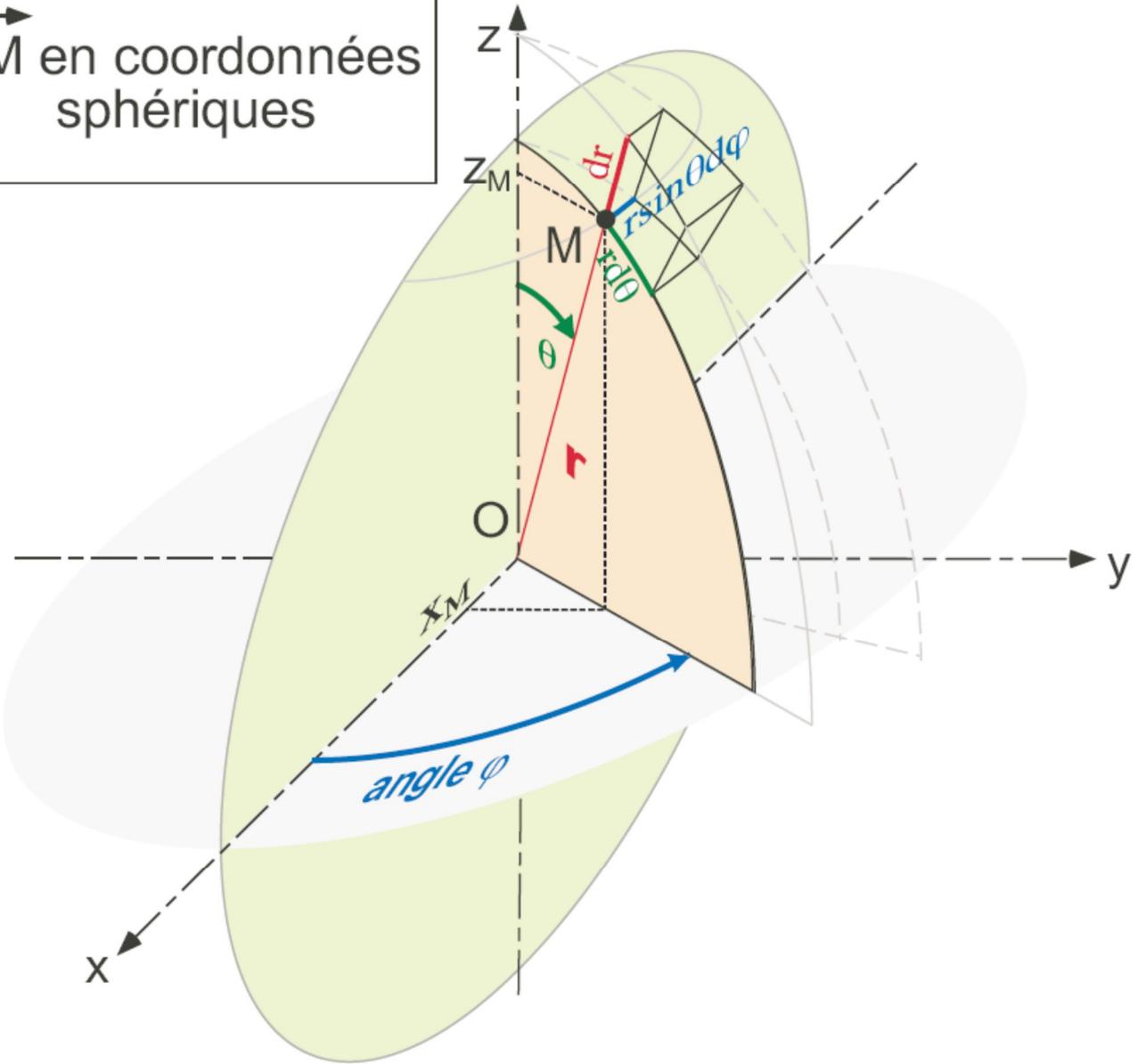
**r** des coordonnées sphériques  
angle  $\theta$  des coordonnées sphériques



$\rightarrow dM$  en coordonnées  
cylindriques



$\vec{dM}$  en coordonnées  
sphériques



## Opérateurs de dérivation spatiale :

### Vecteur déplacement élémentaire :

En coordonnées cartésiennes :  $\mathbf{M}(x,y,z)$ .  $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ .  
 $d\overrightarrow{OM} = d\vec{M} = \overrightarrow{MM'} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$

En coordonnées cylindriques :  $\mathbf{M}(r,\theta,z)$ .  $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$ .  
 $d\overrightarrow{OM} = d\vec{M} = \overrightarrow{MM'} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$

En coordonnées sphériques :  $\mathbf{M}(r,\theta,\varphi)$ .  $\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r$ .  
 $d\overrightarrow{OM} = d\vec{M} = \overrightarrow{MM'} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$

### Elément de volume :

En coordonnées cartésiennes :  $d^3\tau = dx dy dz$

En coordonnées cylindriques :  $d^3\tau = r dr d\theta dz$

En coordonnées sphériques :  $d^3\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$

**OPERATEUR NABLA :** noté  $\vec{\nabla}$ . C'est un opérateur de dérivation spatiale. Ce n'est pas un vrai vecteur, mais il se comporte de façon semblable.

On peut l'utiliser dans des formules vectorielles.

Si on veut utiliser les coordonnées de  $\vec{\nabla}$  dans une base vectorielle, on peut **mais il est sage de le faire uniquement avec la base associée aux coordonnées cartésiennes.**

On peut alors écrire, En coordonnées cartésiennes :  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$ .

### NOTION DE CHAMP (rappel) :

**champ scalaire :**  $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$  **ou encore**  $f : M \mapsto f(M)$

champ vectoriel :  $\vec{F} : (x, y, z) \mapsto \vec{F}(x, y, z)$  **ou encore**  $\vec{F} : M \mapsto \vec{F}(M)$

**OPERATEUR GRADIENT :** Il agit sur un champ scalaire. Le résultat est un champ vecteuriel.

**Notation et définition :**  $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f$ . **C'est-à-dire tout se passe comme si on faisait le produit de nabra par le scalaire f. Cette façon d'écrire les choses ne dépend pas du système de coordonnées éventuellement choisi.**

**Expression en coordonnées cartésiennes :**  $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$

soit encore  $\overrightarrow{\text{grad}} f \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$  dans  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

**Exemples :**  $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ ,  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ ,  $\vec{\varphi}_{\text{pression}} = -\overrightarrow{\text{grad}} P$

**Signification physique :** le vecteur gradient de  $f$  est orthogonal aux surfaces iso- $f$ . Il indique la direction à prendre pour que  $f$  augmente le plus vite possible spatialement, à partir du point où on le calcule.

**Relation importante :**  $df = \overrightarrow{grad}f \cdot \overrightarrow{dM}$  cette relation est toujours vraie. Elle ne dépend pas du système de coordonnées éventuellement choisi.

**OPERATEUR DIVERGENCE :** Il agit sur un champ vectoriel. Le résultat est un champ scalaire.

**Notation et définition :**  $div\vec{F} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{F}$ . C'est-à-dire tout se passe comme si on faisait le produit scalaire de nabla par le vecteur  $\vec{F}$ . Cette façon d'écrire les choses ne dépend pas du système de coordonnées éventuellement choisi.

**Expression en coordonnées cartésiennes :**

$$div\vec{F} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \text{ soit encore } div\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \text{ dans } (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$$

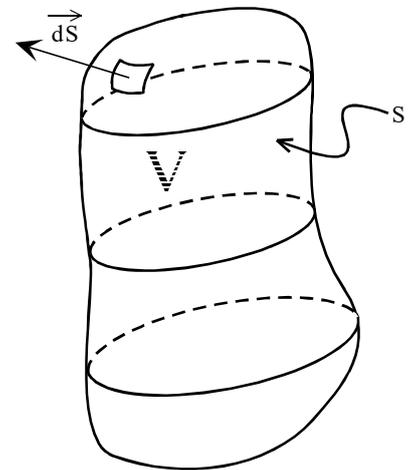
**Relation importante :** **Théorème d'Ostrogradski**

$$\oint_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_V div\vec{F} d\tau,$$

où  $S$  est une surface fermée, et  $V$  le volume délimité par cette surface.

Rappel : pour une surface fermée, le vecteur  $\overrightarrow{dS}$  est toujours orienté vers l'extérieur (pour un observateur placé dans  $V$ )

**Signification physique :** un champ dont la divergence est nulle est tel qu'à travers une surface fermée, son flux entrant est égal à son flux sortant. En revanche, si la divergence est non nulle, elle justement proportionnelle à la différence entre les flux sortant et entrant.



**OPERATEUR ROTATIONNEL :** Il agit sur un champ vectoriel. Le résultat est un champ vectoriel.

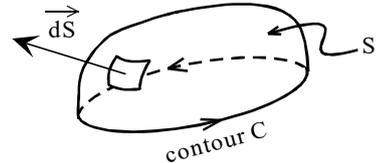
**Notation et définition :**  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}$ . **C'est-à-dire tout se passe comme si on faisait le produit vectoriel de nabla par le vecteur  $\vec{F}$ . Cette façon d'écrire les choses ne dépend pas du système de coordonnées éventuellement choisi.**

**Expression en coordonnées cartésiennes :**

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ dans la base } (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$$

**Relation importante :** **Théorème de Stokes :**  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{M} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\vec{F} \cdot d\vec{S}$ ,

Où C est un contour fermé orienté et S une surface quelconque s'appuyant sur C, orientée conformément à l'orientation de C



**Signification physique :** **Un champ vectoriel  $\vec{F}$  a tendance à tourner autour de son vecteur rotationnel  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F}$ .**

**OPERATEUR LAPLACIEN :** S'il agit sur un champ scalaire, le résultat est un champ scalaire. S'il agit sur un champ vectoriel, le résultat est un champ vectoriel.

**Laplacien scalaire :**  $\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})f$

En coordonnées cartésiennes : 
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

**Laplacien vectoriel :**  $\Delta \vec{F} = \vec{\nabla}^2 \vec{F} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{F}$

**En coordonnées cartésiennes** 
$$\Delta \vec{F} \begin{pmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \\ \Delta F_z \end{pmatrix} \text{ dans la base } (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$$

**RELATIONS ENTRE LES OPERATEURS :**

**div de rot :**  $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F}) = 0$   
**rot de grad :**  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{0}$   
**rot de rot :**  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{F}) - \Delta \vec{F}$   
**div de grad :**  $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \Delta f$

**Autres relations :**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}(fg) &= f \overrightarrow{\text{grad}}g + g \overrightarrow{\text{grad}}f & \text{div}(f \vec{G}) &= f \text{div} \vec{G} + \vec{G} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f \\ \overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{G}) &= f \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{G}) + \overrightarrow{\text{grad}}(f) \wedge \vec{G} & \text{div}(\vec{F} \wedge \vec{G}) &= \vec{G} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\vec{F} - \vec{F} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\vec{G} \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F} \wedge \vec{G}) &= \text{div}(\vec{G}) \vec{F} - (\vec{F} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{G} - \text{div}(\vec{F}) \vec{G} + (\vec{G} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{F} \\ \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{F} \cdot \vec{G}) &= \vec{F} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{G}) + (\vec{F} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{G} + \vec{G} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}) + (\vec{G} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{F} \end{aligned}$$

**OPERATEURS EXPRIMES DANS LES DIFFERENTS SYSTEMES DE COORDONNEES :**

| <i>opérateur</i><br><i>ur</i> | expression en<br>cartésiennes<br>base ( $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ )   | expression en<br>cylindriques<br>base ( $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ )  | expression en sphériques<br>base ( $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$ )   |
|-------------------------------|---|---|---|
| $\vec{\text{grad}} f$         | $\frac{\partial f}{\partial x}$<br>$\frac{\partial f}{\partial y}$<br>$\frac{\partial f}{\partial z}$   | $\frac{\partial f}{\partial r}$<br>$\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}$<br>$\frac{\partial f}{\partial z}$  | $\frac{\partial f}{\partial r}$<br>$\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}$<br>$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$  |
| $\text{div } \vec{F}$         | $\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$   | $\frac{1}{r} \frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$   | $\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(F_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(F_\varphi)}{\partial r}$  |
| $\vec{\text{rot}} \vec{F}$    | $\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$<br>$\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}$<br>$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$ | $\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}$<br>$\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}$<br>$\frac{1}{r} \frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta}$ | $\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(F_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(F_\theta)}{\partial \varphi}$<br>$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(F_r)}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(rF_\varphi)}{\partial r}$<br>$\frac{1}{r} \frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(F_r)}{\partial \theta}$ |
| $\Delta f$                    | $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$   | $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$   | $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$   |
| $\vec{\Delta} \vec{F}$        | $\Delta F_x$<br>$\Delta F_y$<br>$\Delta F_z$  | rien de simple  | rien de simple  |