Page 39 n°4 en 19-20

1°) Le fluide étant parfait, l'équation de propagation est celle de d'Alembert, donc la relation de dispersion est $\boxed{k = \frac{\omega}{c_a}}$.

Dans la suite de cette question, on adoptera un indice « inc », puisque l'on s'intéresse à une onde « incidente ».

L'onde étant progressive, et se propageant selon $+\vec{u}_x$, et $v_{inc}(x,t)$ étant le champ des vitesses selon $+\vec{u}_x$, on a la relation entre la surpression p_1 et la vitesse : $p_{1inc} = Z_a v_{inc}$, d'où $\boxed{p_{1inc}\ \ (x,t) = Z_a v_0 \cos(\omega t - kx)}$.

La question suivante porte sur le vecteur densité de flux de puissance sonore, $\overrightarrow{\pi_{inc}}$:

$\overrightarrow{\pi_{inc}} = p_{1inc}\, \overrightarrow{v_{inc}}$,

d'où

$\overrightarrow{\pi_{inc}} = Z_a v_0^2 \cos^2(\omega t - kx)\ \vec{u}_x$.

Et sa valeur moyenne est $< \overrightarrow{\pi_{inc}} >= \frac{Z_a v_0^2}{2}\ \vec{u}_x = \frac{\rho_0 c_a v_0^2}{2}\ \vec{u}_x$, qui est un vecteur. Ce qu'on nous demande est en fait l'intensité sonore incidente : $\boxed{I_{inc} = \frac{Z_a v_0^2}{2} = \frac{\rho_0 c_a v_0^2}{2}}$

2°) Intensité (ou niveau) sonore : $\boxed{I =< \| \vec{\pi} \| >}$.

Le fluide air et le muscle (assimilé ici à un fluide, d'impédance acoustique Z_m) sont supposés être des fluides parfaits. Donc les ondes planes s'y propagent sans s'atténuer, donc les intensités sonores peuvent être calculées en n'importe point du domaine où ces ondes existent.

Pour le champ des vitesses de l'onde transmise on a, en notant k_m le nombre d'onde dans le muscle (avec $k_m = \frac{\omega}{c_m}$) :

$\overrightarrow{v_{tr}}\ (x,t) = v_{t0} \cos(\omega t - k_m x)\ \overrightarrow{u_x}$.

Et en utilisant le coefficient de transmission τ, $v_{t0} \cos(\omega t - 0) = \tau\ v_0 \cos(\omega t - 0)$, donc $v_{t0} = \tau\ v_0$.

D'où $\overrightarrow{v_{tr}}\ (x,t) = \tau v_0 \cos(\omega t - k_m x)\ \overrightarrow{u_x}$.

Puis $p_{1tr} = Z_m v_{tr}$, d'où $p_{1tr}(x,t) = \tau Z_m v_0 \cos(\omega t - k_m x)$.

On a donc $\overrightarrow{\pi_{tr}} = p_{1tr}\ \overrightarrow{v_{tr}}$, d'où $\overrightarrow{\pi_{tr}} = \tau^2 Z_m v_0^2 \cos^2(\omega t - k_m x)\ \vec{u}_x$.

Pour le champ des vitesses de l'onde réfléchie on a : $\overrightarrow{v_r}\ (x,t) = v_{r0} \cos(\omega t + kx)\ \overrightarrow{u_x}$.

Et en utilisant le coefficient de réflexion r, $v_{r0} \cos(\omega t + 0) = r\ v_0 \cos(\omega t - 0)$, donc $v_{r0} = r\ v_0$.

D'où $\overrightarrow{v_r}\ (x,t) = r v_0 \cos(\omega t + kx)\ \overrightarrow{u_x}$.

Puis (du fait qu'on n'utilise que le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_x}$, et que v_r est la composante $\overrightarrow{v_r}$ selon ce $+\overrightarrow{u_x}$) $p_{1r} = -Z_a v_r$,

d'où $p_{1r}(x,t) = -r Z_a v_0 \cos(\omega t + kx)$.

On a donc $\overrightarrow{\pi_r} = p_{1r}\ \overrightarrow{v_r}$, d'où $\overrightarrow{\pi_r} = -r^2 Z_a v_0^2 \cos^2(\omega t + kx)\ \vec{u}_x$.

Calculons à présent les intensités acoustiques :

- En n'importe quel point d'abscisse $x \leq 0$, $I_{inc} = \frac{Z_a v_0^2}{2}$
- En n'importe quel point d'abscisse $x \geq 0$, $I_{tr} = \frac{\tau^2 Z_m v_0^2}{2}$
- En n'importe quel point d'abscisse $x \leq 0$, $I_r = \frac{r^2 Z_a v_0^2}{2}$

D'où $\boxed{R = \frac{I_r}{I_{inc}} = r^2}$ et $\boxed{T = \frac{I_{tr}}{I_{inc}} = \frac{Z_m}{Z_a}\tau^2}$

On peut rappeler (ou redémontrer) les résultats du cours, non demandés explicitement ici : $r = \frac{Z_a - Z_m}{Z_a + Z_m}$ et $\tau = \frac{2Z_a}{Z_a + Z_m}$.

3°) Avec l'animation python, on voit tout d'abord que l'onde incidente, qui arrive dans le domaine $x \leq 0$, est d'amplitude 1,0 donc $v_0 = 1{,}0\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

Une fois que l'onde réfléchie est bien en place on voit que, dans le domaine $x \leq 0$, l'onde de vitesse observée est quasiment une onde stationnaire (il y a une onde stationnaire + une onde régressive, mais on voit surtout la stationnaire)

En revanche, dans le domaine $x \geq 0$, on a une onde 100% progressive.

Or, l'onde de vitesse dans le domaine $x \geq 0$ est uniquement l'onde transmise ; son amplitude est donc $\tau\, v_0$. Et on mesure sur le graphique 2 que $\tau\, v_0 \simeq 0{,}05\ \mathrm{m.s^{-1}}$, donc on peut trouver τ.
$\tau \simeq 0{,}05$.

Cherchons à mieux comprendre ce qui se passe dans le domaine $x \leq 0$:

On a vu dans le cours que $1 + r = \tau$, donc $\mathrm{r} \simeq -0{,}95$, ce qui confirme que l'onde globale dans le domaine $x \leq 0$ est quasi stationnaire, puisque l'onde réfléchie est presque de même amplitude ($|r|$ proche de 1) que l'onde incidente.

Dans le domaine $x \leq 0$, l'onde de vitesse est $v_{tot}(x \leq 0, t) = v_0 \cos(\omega t - kx) + r v_0 \cos(\omega t + kx)$,
c'est-à-dire $v_{tot}(x \leq 0, t) = v_0(\cos(\omega t - kx) + r\cos(\omega t + kx))$.

Puisque r est proche de -1, on peut écrire $r = -1 + (r+1)$, la quantité $(r+1)$ étant petite devant (-1).
On a donc : $v_{tot}(x \leq 0, t) = v_0(\cos(\omega t - kx) + (-1 + r + 1)\cos(\omega t + kx))$,
c'est-à-dire $v_{tot}(x \leq 0, t) = v_0(\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)) + v_0(r+1)\cos(\omega t + kx)$
$= 2v_0 \sin(\omega t)\sin(kx) + v_0(r+1)\cos(\omega t + kx)$
Il y a bien un terme prépondérant (le premier, en bleu), de type onde plane stationnaire harmonique, d'amplitude $2v_0$, donc $2{,}0\ \mathrm{m.s^{-1}}$, avec un nœud en $x = 0$.
Et il y a un terme bien plus faible en amplitude (le second, en rouge), de type onde progressive, qui se propage, dans le sens x décroissant, d'amplitude $1 + r$ c'est-à-dire $\simeq 0{,}05$.

En utilisant la relation donnant t, rappelée au 2°) : $\tau = \frac{2}{1 + \frac{Z_m}{Z_a}}$, on obtient $\frac{Z_m}{Z_a} = \frac{2}{\tau} - 1$, d'où $\boxed{\frac{Z_m}{Z_a} \simeq 39}$.

On en déduit $r = \frac{1 - \frac{Z_m}{Z_a}}{1 + \frac{Z_m}{Z_a}} = -0{,}95$ et $\boxed{R = r^2 = 0{,}90}$ et $\boxed{T = \frac{Z_m}{Z_a}\tau^2 = 0{,}10}$ (on a $T = 1 - R$).

Pour trouver le rapport des célérités, on va utiliser d'autres informations présentes sur les images : les périodes spatiales des ondes dans les deux milieux. On rappelle que, grâce à la linéarité des équations régissant les ondes acoustiques dans les fluides parfaits, si l'onde incidente est purement sinusoïdale, les ondes transmise et réfléchie le sont aussi, avec la même fréquence. Mais la longueur d'onde fait intervenir la célérité, qui n'est pas la même dans les deux milieux.

Dans le milieu « air » ($x < 0$), $\lambda_a = \frac{c_a}{f}$.

Dans le milieu « muscle » ($x > 0$), $\lambda_m = \frac{c_m}{f}$.

Or on mesure sur l'image fixe générée par python que, exprimées en unités arbitraires de l'axe horizontal :

- $\lambda_a = 6{,}5\ u.a.$
- $\lambda_m = 27\ u.a.$

On en déduit $\boxed{\frac{c_m}{c_a} = \frac{27}{6{,}5} = 4{,}2}$.

4°) Remarque préliminaire : dans ce qui suit, A_g et B_g sont a priori des complexes, et devraient être soulignés, comme dans l'énoncé. Mais on verra dans les calculs qu'ils sont réels, comme a_1, donc on peut ne pas les souligner.

On écrit la continuité de la vitesse en x = 0 : $a_1 = A_g + B_g$ (1)

Continuité de la surpression en x = 0 : $Z_a a_1 = (A_g - B_g) Z_e$ (2).

Continuité de la vitesse en x = e : $A_g e^{-jk_e e} + B_g e^{jk_e e} = C_m e^{-jk_m e}$ (3).

Continuité de la surpression en x = e : $Z_e\left(A_g e^{-jk_e e} - B_g e^{jk_e e}\right) = Z_m C_m e^{-jk_m e}$ (4)

Les équations (1) et (2) donnent : $A_g = \frac{a_1}{2}\left(1 + \frac{Z_a}{Z_e}\right)$ et $B_g = \frac{a_1}{2}\left(1 - \frac{Z_a}{Z_e}\right)$.

En reportant dans (3) : $\frac{a_1}{2}\left[\left(1 + \frac{Z_a}{Z_e}\right) e^{-jk_e e} + \left(1 - \frac{Z_a}{Z_e}\right) e^{jk_e e}\right] = C_m e^{-jk_m e}$ (3')

En reportant dans (4) : $Z_e \frac{a_1}{2}\left[\left(1 + \frac{Z_a}{Z_e}\right) e^{-jk_e e} - \left(1 - \frac{Z_a}{Z_e}\right) e^{jk_e e}\right] = Z_m C_m e^{-jk_m e}$ (4')

En divisant (4') par (3') puis en multipliant en haut et en bas par Z_e : $Z_e \frac{(Z_e+Z_a)e^{-jk_e e} - (Z_e - Z_a)e^{jk_e e}}{(Z_e+Z_a)e^{-jk_e e} + (Z_e - Z_a)e^{jk_e e}} = Z_m$

D'où, en multipliant de chaque côté par $(Z_e + Z_a)e^{-jk_e e} + (Z_e - Z_a)e^{jk_e e}$ puis en passant tout à droite :

$0 = Z_m(Z_e + Z_a)e^{-jk_e e} + Z_m(Z_e - Z_a)e^{jk_e e} - Z_e(Z_e + Z_a)e^{-jk_e e} + Z_e(Z_e - Z_a)e^{jk_e e}$

Puis en multipliant par $e^{jk_e e}$ et en regroupant certains termes :

$0 = Z_m(Z_e + Z_a) - Z_e(Z_e + Z_a) + e^{j2k_e e}[Z_m(Z_e - Z_a) + Z_e(Z_e - Z_a)]$,

D'où $e^{j2k_e e}(Z_m + Z_e)(Z_a - Z_e) = (Z_m - Z_e)(Z_e + Z_a)$

Ce qui donne : $\exp(2jk_e e) = \frac{(Z_e+Z_a)(Z_m - Z_e)}{(Z_a - Z_e)(Z_m + Z_e)}$ (Eq 1).

Le terme de droite étant réel, cette relation impose que le terme de gauche le soit aussi. Puisque son module vaut 1, le membre de gauche est donc égal à +1 ou -1. Il en est donc de même pour le membre de droite.

- La solution +1 conduit à $(Z_a - Z_e)(Z_m + Z_e) = (Z_e + Z_a)(Z_m - Z_e)$

  d'où $\cancel{Z_a Z_m} - Z_e Z_m + Z_a Z_e \cancel{- Z_e^2} = Z_e Z_m \cancel{+ Z_a Z_m} \cancel{- Z_e^2} - Z_a Z_e$

  et, après simplification, $2Z_e(Z_m - Z_a) = 0$,

  ce qui ne convient pas, puisque $Z_e \neq 0$ (sinon, (2) conduit à $a_1 = 0$, donc pas d'onde incidente)

  et $Z_m \neq Z_a$ puisque les impédances acoustiques de l'air et du muscle sont très différentes (c'est pour ça qu'on met du gel).

- Donc c'était la solution -1 :

  $(Z_a - Z_e)(Z_m + Z_e) = -(Z_e + Z_a)(Z_m - Z_e)$

  d'où $Z_a Z_m \cancel{- Z_e Z_m} \cancel{+ Z_a Z_e} - Z_e^2 = \cancel{-Z_e Z_m} - Z_a Z_m + Z_e^2 \cancel{+ Z_a Z_e}$

  d'où $2Z_e^2 = 2Z_a Z_m$, puis $\boxed{Z_e = \sqrt{Z_a Z_m}}$.

Il faut donc $\exp(2jk_e e) = -1$, c'est-à-dire $\boxed{e = (2n+1)\frac{\pi}{2k_e}}$, avec n entier.