Page 39 n°5 en 19-20

Soit (Ox) l'axe du tuyau. Pour toutes les ondes, on note v le champ des vitesses projeté selon $\overrightarrow{u_x}$, et $\underline{v}$ en notation complexe.

On se donne une onde incidente, OPPH, se propageant selon x croissant :

- Son champ des vitesses, complexe, est $\underline{v}_i(x,t) = \underline{a}_i \exp\big(j(\omega t - k_1 x)\big)$;
- Son champ de surpression est donc $\underline{p}_i(x,t) = \rho_1 c_1 \, \underline{a}_i \exp\big(j(\omega t - k_1 x)\big)$.

On se donne une onde transmise, OPPH, se propageant selon x croissant :

- Son champ des vitesses, complexe, est $\underline{v}_t(x,t) = \underline{a}_t \exp\big(j(\omega t - k_2 x)\big)$;
- Son champ de surpression est donc $\underline{p}_t(x,t) = \rho_2 c_2 \, \underline{a}_t \exp\big(j(\omega t - k_2 x)\big)$.

On se donne une onde réfléchie, OPPH, se propageant selon x décroissant :

- Son champ des vitesses, complexe, est $\underline{v}_r(x,t) = \underline{a}_r \exp\big(j(\omega t + k_1 x)\big)$;
- Son champ de surpression est donc $\underline{p}_r(x,t) = -\rho_1 c_1 \underline{a}_r \exp\big(j(\omega t + k_1 x)\big)$.

Première condition de raccordement (condition aux limites) en $x = 0$: continuité du champ des vitesses total (la vitesse dans le fluide 1 contre la membrane à gauche est la même que celle dans le fluide 2 contre la membrane à droite, et aussi la même que la vitesse de la membrane. Sinon, un des fluides traverserait la membrane, ou bien une poche de vide se créerait entre un des fluides et la membrane).

$\underline{v}_{tot}(0^-,t) = \underline{v}_{tot}(0^+,t)$;
C'est-à-dire $\underline{v}_i(0^-,t) + \underline{v}_r(0^-,t) = \underline{v}_t(0^+,t)$;
D'où $\underline{a}_i \exp\big(j(\omega t - 0)\big) + \underline{a}_r \exp\big(j(\omega t + 0)\big) = \underline{a}_t \exp\big(j(\omega t - 0)\big)$,

Soit : $\underline{a}_i + \underline{a}_r = \underline{a}_t$ (Eq1)

Et si on a besoin d'exprimer la vitesse de la membrane, on peut aussi bien utiliser $\underline{v}_{tot}(0^-,t)$ que $\underline{v}_{tot}(0^+,t)$. Le plus simple est $\underline{v}_{tot}(0^+,t)$, puisqu'il n'y a qu'une seule onde.
Ainsi, la vitesse complexe de la membrane est : $\underline{v}(t) = \underline{a}_t \exp(j\omega t)$.

Seconde condition de raccordement (condition aux limites) en $x = 0$: équation du mouvement de la membrane. À cause de cette membrane, de masse non nulle, il n'y a plus continuité du champ de pression totale.
On isole la membrane, de masse $m = \sigma S$, et de vitesse $\vec{v} = v\,\overrightarrow{u_x}$, et on lui applique le théorème de la résultante dynamique, dans le référentiel terrestre, supposé galiléen : $m\frac{d\,v}{dt}\overrightarrow{u_x} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$

Elle est soumise à :

- Son poids ;
- L'action (les physiciens disent « réaction ») du tuyau, orthogonale au tuyau puisqu'il n'y a pas de frottements ;
- Les forces de pression côté gauche : $S\left(P_0 + \underline{p}_{tot}(0^-,t)\right)\overrightarrow{u_x}$;
- Les forces de pression côté droit : $-S\left(P_0 + \underline{p}_{tot}(0^+,t)\right)\overrightarrow{u_x}$.

Le tuyau étant horizontal, les deux premières forces sont verticales.
En projetant le TRD sur l'axe $(0x)$ on obtient :

$m\frac{d\,\underline{v}}{dt} = S\left(P_0 + \underline{p}_{tot}(0^-,t) - P_0 - \underline{p}_{tot}(0^+,t)\right)$,

D'où $mj\omega\,\underline{a}_t \exp(j\omega t) = S\left(\underline{p}_{tot}(0^-,t) - \underline{p}_{tot}(0^+,t)\right)$
Puis $\frac{mj\omega}{S}\,\underline{a}_t \exp(j\omega t) = \underline{p}_i(0^-,t) + \underline{p}_r(0^-,t) - \underline{p}_t(0^+,t)$
Soit $\frac{\sigma S j\omega}{S}\,\underline{a}_t \exp(j\omega t) = \rho_1 c_1\,\underline{a}_i \exp\big(j(\omega t)\big) - \rho_1 c_1 \underline{a}_r \exp\big(j(\omega t)\big) - \rho_2 c_2\,\underline{a}_t \exp\big(j(\omega t)\big)$

Et, après simplification,

$$\sigma j\omega\, \underline{a}_t = \rho_1 c_1\, \underline{a}_i - \rho_1 c_1 \underline{a}_r - \rho_2 c_2\, \underline{a}_t$$

Ou encore $\underline{a}_i - \underline{a}_r = \frac{\rho_2 c_2 + j\omega\sigma}{\rho_1 c_1} \underline{a}_t$ (Eq2)

On cherche les ondes transmise et réfléchie. Il faut donc qu'on détermine leurs amplitudes complexes, $\underline{a}_t$ et $\underline{a}_r$.
Il ne reste donc qu'à résoudre le système de deux équations : (Eq1) et (Eq2).

La somme donne $2\underline{a}_i = \left(1 + \frac{\rho_2 c_2 + j\omega\sigma}{\rho_1 c_1}\right) \underline{a}_t$, d'où $\boxed{\underline{a}_t = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2 + j\omega\sigma} \underline{a}_i}$

Et si on reporte dans (Eq1) : $\underline{a}_r = \left(\frac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2 + j\omega\sigma} - 1\right) \underline{a}_i$, d'où $\boxed{\underline{a}_r = \left(\frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2 - j\omega\sigma}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2 + j\omega\sigma}\right) \underline{a}_i}$

Exploitations qualitatives :

- Retrouve-t-on le cas vu en cours (pas de membrane) ? oui, en faisant $\sigma = 0$
- Les fonctions de transfert obtenues pour la transmission et pour la réflexion, sont de quelle nature ?
  Pour $\underline{H}_t = \frac{\underline{a}_t}{\underline{a}_i}$, la forme est la même que celle d'un filtre passe-bas d'ordre 1
  Pour $\underline{H}_r = \frac{\underline{a}_r}{\underline{a}_i}$, la forme est presque la même que celle d'un déphaseur passe-tout d'ordre 1
- Que peut-on en conclure sur la transmission de sons à travers les parois d'un appartement ?
  Que les basses passent mieux à travers les murs que les aigus ; on s'en rend compte quand le voisin met sa sono à fond, ou quand on passe à côté d'une boîte de nuit (surtout quand Justin Simpson est dans la boîte de nuit).