31 Ondes électromagnétiques

1 Somme de 2 ondes : Deux ondes planes progressives monochromatiques polarisées rectilignement se propagent, dans le vide, dans la même direction et le même sens (vecteur unitaire $\vec{u}$). $\vec{E}_{10}$ et $\vec{E}_{20}$ font entre eux un angle α .

A l'endroit où on se trouve, le champ électrique de la première s'écrit $\vec{E}_1 = \vec{E}_{10}\,cos(\omega_1 t)$ et celui de la seconde $\vec{E}_2 = \vec{E}_{20}\cos(\omega_2 t+\theta)$. Les 2 pulsations sont positives.

1°) Cherchons déjà les vecteurs de Poynting :

Même si ce n'est pas demandé, pour y voir bien clair, on peut écrire les champs partout : en posant $\vec{k}_1 = \frac{\omega_1}{c}\,\vec{u}$ et $\vec{k}_2 = \frac{\omega_2}{c}\,\vec{u}$, on a :

$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{10}\,cos\big(\omega_1 t - \vec{k}_1\cdot\vec{r} + \varphi_1\big)$;
$\vec{B}_1(\vec{r},t) = \frac{\vec{u}\wedge\vec{E}_{10}}{c} cos\big(\omega_1 t - \vec{k}_1\cdot\vec{r} + \varphi_1\big)$;
$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_{20}\,cos\big(\omega_2 t - \vec{k}_2\cdot\vec{r} + \varphi_2\big)$;
$\vec{B}_2(\vec{r},t) = \frac{\vec{u}\wedge\vec{E}_{20}}{c} cos\big(\omega_2 t - \vec{k}_2\cdot\vec{r} + \varphi_2\big)$;

On peut choisir $\vec{u} = \vec{u}_x$, d'où :

$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{10}\,cos\left(\omega_1 t - \frac{\omega_1}{c}x + \varphi_1\right)$;
$\vec{B}_1(\vec{r},t) = \frac{\vec{u}_x\wedge\vec{E}_{10}}{c} cos\left(\omega_1 t - \frac{\omega_1}{c}x + \varphi_1\right)$;
$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_{20}\,cos\left(\omega_2 t - \frac{\omega_2}{c}x + \varphi_2\right)$;
$\vec{B}_2(\vec{r},t) = \frac{\vec{u}_x\wedge\vec{E}_{20}}{c} cos\left(\omega_2 t - \frac{\omega_2}{c}x + \varphi_2\right)$;

Et on se place en un x_0 tel que $-\frac{\omega_1}{c}x_0 + \varphi_1 = 0$ et $-\frac{\omega_2}{c}x_0 + \varphi_2 = \theta$.

D'où

$\vec{E}_1(\vec{r_0},t) = \vec{E}_{10}\,cos(\omega_1 t)$;
$\vec{B}_1(\vec{r_0},t) = \frac{\vec{u}_x\wedge\vec{E}_{10}}{c} cos(\omega_1 t)$;
$\vec{E}_2(\vec{r_0},t) = \vec{E}_{20}\,cos(\omega_2 t + \theta)$;
$\vec{B}_2(\vec{r_0},t) = \frac{\vec{u}_x\wedge\vec{E}_{20}}{c} cos(\omega_2 t + \theta)$;

$\vec{\pi}_1(\vec{r_0},t) = \frac{\vec{E}_1(\vec{r_0},t)\wedge\vec{B}_1(\vec{r_0},t)}{\mu_0} = \frac{\|\vec{E}_{10}\|^2}{\mu_0 c} cos^2(\omega_1 t)\ \vec{u}_x$

$\vec{\pi}_2(\vec{r_0},t) = \frac{\vec{E}_2(\vec{r_0},t)\wedge\vec{B}_2(\vec{r_0},t)}{\mu_0} = \frac{\|\vec{E}_{20}\|^2}{\mu_0 c} cos^2(\omega_2 t + \theta)\ \vec{u}_x$

Et pour les valeurs moyennes :

$\langle\vec{\pi}_1\rangle = \frac{\|\vec{E}_{10}\|^2}{2\mu_0 c}\ \vec{u}_x$

et $\langle\vec{\pi}_2\rangle = \frac{\|\vec{E}_{20}\|^2}{2\mu_0 c}\ \vec{u}_x$.

2°) Calculons maintenant le vecteur de Poynting total : $\vec{\pi}(\vec{r_0},t) = \frac{\vec{E}_{tot}(\vec{r_0},t)\wedge\vec{B}_{tot}(\vec{r_0},t)}{\mu_0}$.

$\vec{E}_{tot}(\vec{r_0},t) = \vec{E}_{10}\,cos(\omega_1 t) + \vec{E}_{20}\,cos(\omega_2 t + \theta)$, les deux vecteurs faisant entre eux un angle α.

$\vec{B}_{tot}(\vec{r_0},t) = \vec{B}_1(\vec{r_0},t) + \vec{B}_2(\vec{r_0},t)$, $\vec{B}_1(\vec{r_0},t)$ et $\vec{B}_2(\vec{r_0},t)$ faisant également entre eux un angle α.

$\vec{\pi}(\vec{r_0},t) = \frac{\vec{E}_1(\vec{r_0},t)\wedge\vec{B}_1(\vec{r_0},t)}{\mu_0} + \frac{\vec{E}_2(\vec{r_0},t)\wedge\vec{B}_2(\vec{r_0},t)}{\mu_0} + \frac{\vec{E}_1(\vec{r_0},t)\wedge\vec{B}_2(\vec{r_0},t)}{\mu_0} + \frac{\vec{E}_2(\vec{r_0},t)\wedge\vec{B}_1(\vec{r_0},t)}{\mu_0}$

$$\vec{\pi}(\vec{r_0},t) = \vec{\pi}_1(\vec{r_0},t) + \vec{\pi}_2(\vec{r_0},t) + \frac{\vec{E}_{10}\,cos(\omega_1 t)\wedge\left(\frac{\vec{u}_x\wedge\vec{E}_{20}}{c}cos(\omega_2 t+\theta)\right)}{\mu_0} + \frac{\vec{E}_{20}\,cos(\omega_2 t+\theta)\wedge\left(\frac{\vec{u}_x\wedge\vec{E}_{10}}{c}cos(\omega_1 t)\right)}{\mu_0}$$

$$\vec{\pi}(\vec{r_0},t) = \vec{\pi}_1(\vec{r_0},t) + \vec{\pi}_2(\vec{r_0},t) + \frac{\vec{E}_{10}\cdot\vec{E}_{20}\,cos(\omega_1 t)\,cos(\omega_2 t+\theta)}{\mu_0 c}\,\vec{u}_x + \frac{\vec{E}_{20}\cdot\vec{E}_{10}\,cos(\omega_2 t+\theta)\,cos(\omega_1 t)}{\mu_0 c}\vec{u}_x$$

$$\vec{\pi}(\vec{r_0},t) = \vec{\pi}_1(\vec{r_0},t) + \vec{\pi}_2(\vec{r_0},t) + 2\,cos(\omega_1 t)\,cos(\omega_2 t + \theta)\frac{\vec{E}_{10}\cdot\vec{E}_{20}}{\mu_0 c}\vec{u}_x$$

$$\vec{\pi}(\vec{r_0},t) = \vec{\pi}_1(\vec{r_0},t) + \vec{\pi}_2(\vec{r_0},t) + 2\,cos(\omega_1 t)\,cos(\omega_2 t + \theta)\frac{\|\vec{E}_{10}\|\cdot\|\vec{E}_{20}\|\cos\alpha}{\mu_0 c}\vec{u}_x$$

$$\vec{\pi}(\vec{r_0},t) = \vec{\pi}_1(\vec{r_0},t) + \vec{\pi}_2(\vec{r_0},t) + \big[cos\big((\omega_1+\omega_2)t+\theta\big) + cos\big((\omega_1-\omega_2)t-\theta\big)\big]\frac{\|\vec{E}_{10}\|\cdot\|\vec{E}_{20}\|\cos\alpha}{\mu_0 c}\vec{u}_x$$

$$<\vec{\pi}(\vec{r_0},t)> = \frac{\|\vec{E}_{10}\|^2}{2\mu_0 c}\,\vec{u}_x + \frac{\|\vec{E}_{20}\|^2}{2\mu_0 c}\,\vec{u}_x + < cos\big((\omega_1+\omega_2)t+\theta\big) > \frac{\|\vec{E}_{10}\|\cdot\|\vec{E}_{20}\|\cos\alpha}{\mu_0 c} + < cos\big((\omega_1-\omega_2)t-\theta\big) > \frac{\|\vec{E}_{10}\|\cdot\|\vec{E}_{20}\|\cos\alpha}{\mu_0 c}\vec{u}_x$$

$$<\vec{\pi}(\vec{r_0},t)> = \frac{\|\vec{E}_{10}\|^2}{2\mu_0 c}\,\vec{u}_x + \frac{\|\vec{E}_{20}\|^2}{2\mu_0 c}\,\vec{u}_x + < cos\big((\omega_1-\omega_2)t-\theta\big) > \frac{\|\vec{E}_{10}\|\cdot\|\vec{E}_{20}\|\cos\alpha}{\mu_0 c}\vec{u}_x\ .$$

- Si $\omega_1 \neq \omega_2$, $\langle\vec{\pi}\rangle = \langle\vec{\pi}_1\rangle + \langle\vec{\pi}_2\rangle$

- Si $\omega_1 = \omega_2$, $<\vec{\pi}(\overrightarrow{r_0}, t) >= \langle\vec{\pi}_1\rangle + \langle\vec{\pi}_2\rangle + \frac{\|\vec{E}_{10}\|\cdot\|\vec{E}_{20}\| \cos\theta \cos\alpha}{\mu_0 c}\vec{u}_x$, c'est-à-dire $\langle\vec{\pi}\rangle \neq \langle\vec{\pi}_1\rangle + \langle\vec{\pi}_2\rangle$. On est en présence $\boxed{\text{d'interférences}}$. Celles-ci ne se produisent que pour deux ondes de même fréquence. Il faut même qu'elles soient « cohérentes ».