2 Soit une « cellule de Kerr » au sein de laquelle règne un champ électrique constant E' dirigé selon Oy. Une telle cellule, d'épaisseur $e$, lorsqu'elle est traversée par une onde électromagnétique se propageant selon (Oz), se comporte de la façon suivante :

- elle est équivalente au vide si l'onde incidente est une OPPH polarisée parallèlement à Ox ;
- elle introduit un retard de phase $\Delta\phi$ si l'onde incidente est une OPPH polarisée selon Oy,

On donne : $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} BE'^2 e$, où B est une constante.

1°) Soit une onde plane progressive harmonique se propageant dans le vide selon $Oz$ et polarisée selon un vecteur unitaire $\vec{u}$, décalé angulairement de $+\alpha$ par rapport à $\vec{u_x}$. Montrer qu'on peut la décomposer en deux ondes planes progressives harmoniques se propageant selon $Oz$ et polarisées rectilignement, l'une selon $\vec{u_x}$, l'autre selon $\vec{u_y}$.

On peut écrire le champ électrique de l'onde, soit en notation complexe, soit en notation réelle. Prenons par exemple la notation réelle :

$\vec{E}(M,t) = E_0\,\vec{u}\cos(\omega t - k_0 z)$ , avec $k_0 = \frac{\omega}{c}$ puisqu'on est dans le vide.

Et puisque $\vec{u} = \cos(\alpha)\,\vec{u}_x + \sin(\alpha)\,\vec{u}_y$ ,

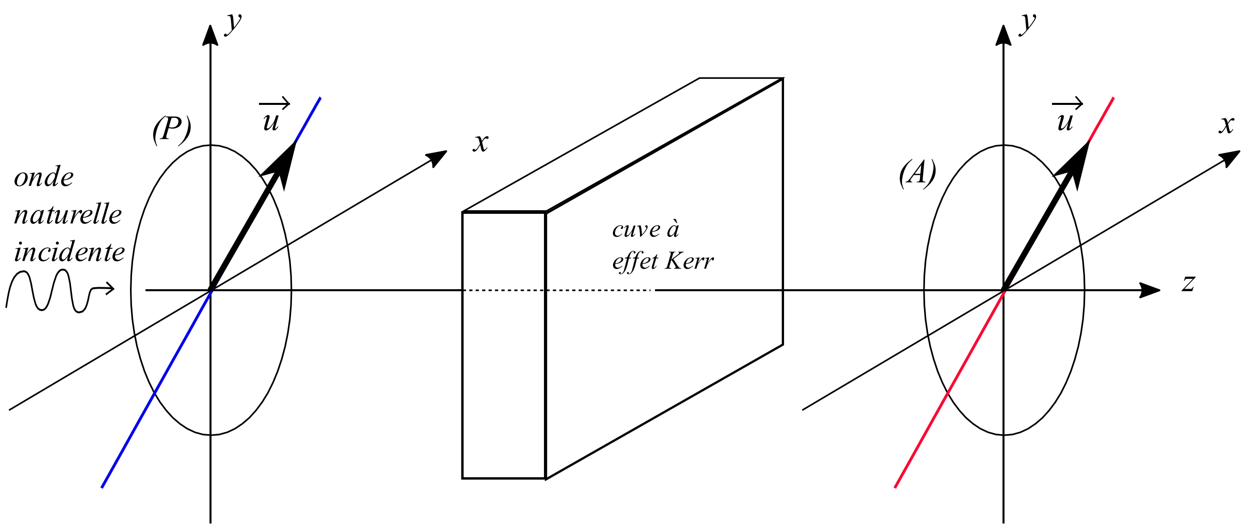
$\vec{E}(M,t) = E_0\cos(\alpha)\,\vec{u}_x\cos(\omega t - k_0 z) + E_0\sin(\alpha)\,\vec{u}_y\cos(\omega t - k_0 z)$.

Le premier terme est une OPPH polarisée rectilignement selon $(Ox)$ se propageant selon $(Oz)$

Le second terme est une OPPH polarisée rectilignement selon $(Oy)$ se propageant selon $(Oz)$

2°) Sur un banc d'optique, on a placé une cuve à effet Kerr entre un polariseur (P) et un analyseur (A). Le polariseur et l'analyseur sont des dispositifs qui ne laissent passer que les ondes polarisées rectilignement selon la première bissectrice des axes $Ox$ et $Oy$. On suppose que (P) et (A) laissent entièrement passer la lumière polarisée selon leur axe, sans l'atténuer.

Une OPPH de lumière naturelle ($\lambda_0$), d'éclairement $\mathcal{E}_0$, arrive en incidence normale sur le polariseur (P). On assimile l'éclairement à la valeur moyenne de la norme du vecteur de Poynting. Quel éclairement $\mathcal{E}$ observe-t-on en sortie de l'analyseur (A) ? Pour quelle valeur minimale et non nulle $E'_m$ de E' l'éclairement $\mathcal{E}$ est-il maximal ?




La lumière naturelle, plane progressive harmonique, se propage selon $(Oz)$. Elle se décompose en ondes OPPH, se propageant selon $(Oz)$, polarisées selon les différentes directions du plan $(xOy)$. Le polariseur (P) ne laisse passer que celles polarisées rectilignement selon la première bissectrice des axes $(Ox)$ et $(Oy)$.

Notons avec un indice 1 le champ électrique de l'onde après le polariseur (P).

Conformément à ce qu'on a vu à la question 1°), on peut décomposer $\vec{E}_1(M,t)$ en deux ondes OPPH PR selon $(Ox)$ et $(Oy)$ :

En décomposant dans la base des coordonnées cartésiennes :

$\vec{E}_1(M,t) = \begin{pmatrix} E_0\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(\omega t - k_0 z) \\ E_0\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(\omega t - k_0 z) \\ 0 \end{pmatrix}$. Ou encore $\vec{E}_1(M,t) = \begin{pmatrix} E_0\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\omega t - k_0 z) \\ E_0\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\omega t - k_0 z) \\ 0 \end{pmatrix}$

Notons avec un indice 2 le champ électrique de l'onde après la cuve à effet Kerr (K) :

Puisque la lame se comporte comme le vide pour les ondes polarisées rectilignement selon $(Ox)$, et qu'elle introduit un retard de phase $\Delta\phi$ pour les ondes polarisées rectilignement selon $(Oy)$, on peut écrire le champ $\vec{E}_2(M,t)$ après la lame :

$$\vec{E}_2(M,t) = \begin{pmatrix} E_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\omega t - k_0 z) \\ E_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\omega t - k_0 z - \Delta\phi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$ C'est-à-dire $$\vec{E}_2(M,t) = \begin{pmatrix} E_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\omega t - k_0 z) \\ E_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\omega t - k_0 z - \frac{2\pi e}{\lambda_0} BE'^2\right) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cette onde n'est plus polarisée rectilignement, à cause du déphasage entre les deux composantes du champ électrique. Elle est, *a priori*, polarisée elliptiquement.
Mais après l'analyseur (A), on aura à nouveau une OPPH polarisée rectilignement (OPPH PR).
Notons $\vec{u}_{xy}$ le vecteur unitaire du plan $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ faisant un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec $\vec{u}_x$. Ce vecteur $\vec{u}_{xy}$ est donc selon la première bissectrice des axes $(Ox)$ et $(Oy)$, c'est-à-dire selon la direction de polarisation unique que laisse passer l'analyseur (A).

Projetons le champ $\vec{E}_2(M,t)$ selon ce vecteur unitaire :

$$\vec{E}_{2xy}(M,t) = \left(\vec{E}_2(M,t) \cdot \vec{u}_{xy}\right)\vec{u}_{xy}$$

$$\vec{E}_{2xy}(M,t) = \left(E_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\omega t - k_0 z) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + E_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\omega t - k_0 z - \frac{2\pi e}{\lambda_0} BE'^2\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \vec{u}_{xy}$$

$$\vec{E}_{2xy}(M,t) = \left(\frac{E_0}{2} \cos(\omega t - k_0 z) + \frac{E_0}{2} \cos\left(\omega t - k_0 z - \frac{2\pi e}{\lambda_0} BE'^2\right)\right) \vec{u}_{xy}$$
$$\vec{E}_{2xy}(M,t) = \frac{E_0}{2}\left( \cos(\omega t - k_0 z) + \cos\left(\omega t - k_0 z - \frac{2\pi e}{\lambda_0} BE'^2\right)\right) \vec{u}_{xy}$$

Notons avec un indice 3 le champ électrique de l'onde après l'analyseur (A) :

$$\vec{E}_3(M,t) = \frac{E_0}{2}\left( \cos(\omega t - k_0 z) + \cos\left(\omega t - k_0 z - \frac{2\pi e}{\lambda_0} BE'^2\right)\right) \vec{u}_{xy} .$$

$$\vec{E}_3(M,t) = E_0 \cos\left(\frac{\pi e}{\lambda_0} BE'^2\right) \cos\left(\omega t - k_0 z - \frac{\pi e}{\lambda_0} BE'^2\right) \vec{u}_{xy} .$$

Puisque cette onde après l'analyseur est une OPPH PR, se propageant dans le vide selon $\vec{u}_z$, son vecteur de Poynting est $\vec{\Pi}_3(M,t) = \frac{\left(E_0 \cos\left(\frac{\pi e}{\lambda_0} BE'^2\right)\right)^2}{\mu_0 c} \cos^2\left(\omega t - k_0 z - \frac{\pi e}{\lambda_0} BE'^2\right) \vec{u}_z$ .

Sa norme est $\left\|\vec{\Pi}_3(M,t)\right\| = \frac{\left(E_0 \cos\left(\frac{\pi e}{\lambda_0} BE'^2\right)\right)^2}{\mu_0 c} \cos^2\left(\omega t - k_0 z - \frac{\pi e}{\lambda_0} BE'^2\right)$

Et donc l'éclairement est $\mathcal{E} = < \left\|\vec{\Pi}_3(M,t)\right\| > = \frac{\left(E_0 \cos\left(\frac{\pi e}{\lambda_0} BE'^2\right)\right)^2}{2\mu_0 c}$

D'où $\boxed{\mathcal{E} = \frac{(E_0)^2}{2\mu_0 c} \cos^2\left(\frac{\pi e}{\lambda_0} BE'^2\right)}$

On voit que cet éclairement est maximal pour $\cos^2\left(\frac{\pi e}{\lambda_0} BE'^2\right) = 1$,
c'est-à-dire $\frac{\pi e}{\lambda_0} BE'^2 = 0 + m\pi$, avec $m$ entier.

C'est-à-dire $E' = \sqrt{\frac{m\lambda_0}{eB}}$

La première valeur non nulle correspond à $m = 1$, d'où $\boxed{E' = \sqrt{\frac{\lambda_0}{eB}}}$.