

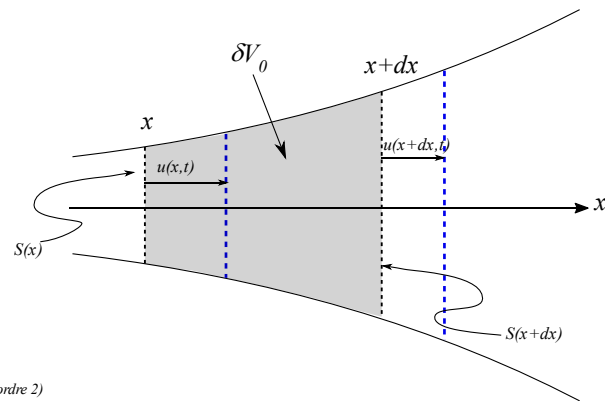
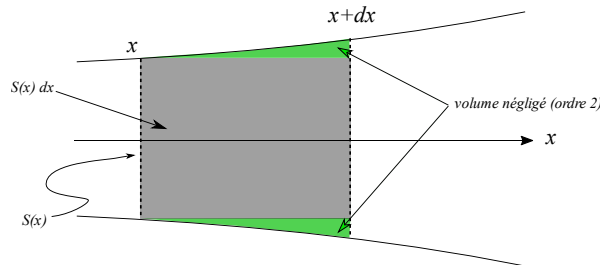
1 page 40 (en haut) Pavillon sonore-

1°) Considérons le fluide (système fermé, de masse δm_0) situé au repos entre x et $x + dx$.

Son volume est environ (à l'ordre 1 en dx) :

$$\delta V_0 = S dx.$$

Le dessin ci-contre montre l'erreur qu'on fait en restant à l'ordre 1 en dx



Sous l'effet d'une onde sonore, la paroi fictive qui était en x se déplace de $u(x, t)$ et la paroi fictive de droite se déplace de $u(x + dx, t)$.

La variation du volume du système est donc :

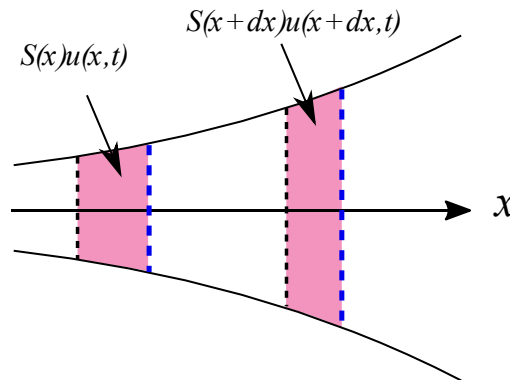
$$\delta V - \delta V_0 = S(x + dx) u(x + dx, t) - S(x) u(x, t),$$

$$= f(x + dx, t) - f(x, t)$$

avec $f(x, t) = S(x) \times u(x, t)$

$$\delta V - \delta V_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dx$$

$$\text{Soit encore } \delta V - \delta V_0 = \frac{\partial(Su)}{\partial x}(x, t) dx.$$



La variation relative de volume est $\frac{\delta V - \delta V_0}{\delta V_0} = \frac{1}{S} \frac{\partial(Su)}{\partial x}$

Autre méthode (plus compliquée) : on peut calculer δV puis faire la différence avec δV_0 :

$$\begin{aligned} \delta V &= S(x + u(x, t)) \times (x + dx + u(x + dx, t) - x - u(x, t)) \\ &= S(x + u(x, t)) \times (dx + u(x + dx, t) - u(x, t)) \\ &= S(x + u(x, t)) \times \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx\right) \\ &= S(x + u(x, t)) \times dx \times \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right) \\ &= \left[S(x) + \frac{dS}{dx}(x) \times u(x, t)\right] \times \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx\right) \\ &= S(x) dx + S(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx + \frac{dS}{dx}(x) \times u(x, t) dx + \\ &\quad \frac{dS}{dx}(x) \times u(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx \end{aligned}$$

$$\text{Ou, plus simplement, } \delta V = S dx + S \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{dS}{dx} u dx + \frac{dS}{dx} u \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

$$\text{C'est-à-dire } \delta V = \delta V_0 + S \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{dS}{dx} u dx + \frac{dS}{dx} u \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

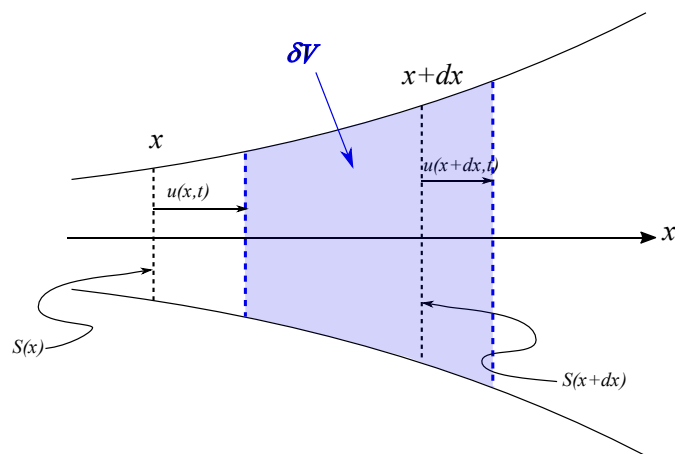
Or, dx est un infiniment petit d'ordre 1, et, dans le cadre de l'approximation acoustique, u aussi. Pointons les ordres en infiniment

$$\begin{array}{ccccccc} \text{petits : } \delta V &= & \delta V_0 &+ & S \frac{\partial u}{\partial x} dx &+ & \frac{dS}{dx} u dx &+ & \frac{dS}{dx} u \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ & & 1 & & 1 & & \underbrace{0 \ 1 \ 1}_{2} & & \underbrace{0 \ 1 \ 1}_{2} & & \underbrace{0 \ 1 \ 1 \ 1}_{3} \end{array}$$

En effet,

S et $\frac{dS}{dx}$ sont d'ordre 0,

$u, \frac{\partial u}{\partial x}, dx$ sont chacun d'ordre 1 $\frac{\partial u}{\partial x}$ d'ordre 1 car petite variation de u (d'ordre 2) sur petite variation de x (d'ordre 1)



Donc si on ne garde à droite que l'ordre 2 (et il faut garder l'ordre 2, car en faisant la différence entre δV et δV_0 , qui sont chacun d'ordre 1, mais très proches l'un de l'autre, on va tomber sur un ordre supérieur à 1, en l'occurrence un ordre 2 :

$$\delta V = \delta V_0 + S \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{ds}{dx} u dx$$

$$\text{Soit encore } \delta V = \delta V_0 + \frac{\partial(Su)}{\partial x} dx$$

2°) En appliquant le théorème de la résultante dynamique au système de la question 1, on a, comme dans le cours, en se limitant dans les calculs à l'ordre 1 en dx , puis en divisant par $S dx$:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1).$$

Le coefficient de compressibilité s'écrit, à entropie constante :

$$\chi_S = -\frac{1}{\delta V_0} \frac{\delta V - \delta V_0}{P - P_0} = -\frac{1}{pS} \frac{\partial(Su)}{\partial x} \quad (2), \text{ ce qui est bien conforme à la relation de l'énoncé.}$$

$$\begin{aligned} 3^\circ) (2) \text{ entraîne : } \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{1}{S\chi_S} \frac{\partial}{\partial t} \left(u \frac{dS}{dx} + S \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u}{S} \frac{dS}{dx} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial}{\partial t} \left(u \frac{d(\ln S)}{dx} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{1}{\chi_S} \left(v \frac{d(\ln S)}{dx} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

la dernière transformation se faisant en utilisant le fait que la fonction $u(x, t)$ est supposée de classe au moins C^2 .

$$\text{En résumé, } \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_S} \left(v \frac{d(\ln S)}{dx} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (3).$$

Si on dérive (3) par rapport à x , on obtient :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\chi_S} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{d(\ln S)}{dx} + v \frac{d^2(\ln S)}{dx^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (4).$$

Si on dérive (1) par rapport au temps, on a :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (5).$$

Avec (4), (5) et le théorème de Schwarz, il vient :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0 \chi_S} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{d(\ln S)}{dx} + v \frac{d^2(\ln S)}{dx^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = c^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{d(\ln S)}{dx} + v \frac{d^2(\ln S)}{dx^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (6).$$

Si on dérive (3) par rapport à t , on obtient :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_S} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \frac{d(\ln S)}{dx} + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \right) \quad (7),$$

$$\text{ce qui donne, avec (1) : } \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_S} \left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{d(\ln S)}{dx} + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \right) \quad (8).$$

Si on dérive (1) par rapport à x , on a :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \quad (9).$$

$$(8) \text{ et } (9) \text{ conduisent à : } \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0 \chi_S} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{d(\ln S)}{dx} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) = c^2 \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{d(\ln S)}{dx} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) \quad (10).$$

En résumé,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{d(\ln S)}{dx} + v \frac{d^2(\ln S)}{dx^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (6).$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{d(\ln S)}{dx} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) \quad (10).$$

4°) Le modèle utilisé est tel que : $S(x) = S_0 e^{2mx}$ où S_0 est la section en $x = 0$ et m un réel positif.

Il vient $\ln S = \ln S_0 + 2m x$, et $\frac{d(\ln S)}{dx} = 2m$ et $\frac{d^2(\ln S)}{dx^2} = 0$.

(6) devient $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = c^2 \left(2m \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)$ (11)

et (10) devient $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = c^2 \left(2m \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right)$ (12).

Ces équations aux dérivées partielles sont bien les mêmes.

5°) On remplace dans (11) l'expression de la vitesse complexe fournie :

$$-\omega^2 \underline{v} = c^2 (-2mk \underline{v} - \underline{k}^2 \underline{v}), \text{ d'où la relation de dispersion : } \underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j2mk.$$

6°) On doit alors poser $\underline{k} = k' + jk''$ avec k' réel positif et k'' réel.

L'équation complexe donne 2 équations réelles :

$$k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + 2mk'' \quad \text{et} \quad 2k'k'' = -2mk'$$

Pour la seconde, la solution $k' = 0$ est sans intérêt (pas de propagation).

On a donc $k'' = -m$ et $k'^2 = m^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - 2m^2$,

soit encore $k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - m^2$.

On voit que si $\omega < \omega_c$, avec $\omega_c = mc$, k' devient imaginaire pur, ce qui est impossible, puisque, par hypothèse, c'est la partie réelle de $\underline{k}$. On ne peut avoir propagation d'onde, avec k' réel, que pour des pulsations suffisamment importantes. La pulsation ω_c joue bien le rôle de pulsation de coupure basse.

Numériquement, $\omega_c = 3,4.10^2 \text{ rad.s}^{-1}$.

7°) Au-dessus de la pulsation de coupure, on a $\underline{v} = V_0 e^{-mx} e^{j(\omega t - k'x)}$.

Cela représente une onde plane progressive qui s'atténue en se propageant.

8°) La relation de dispersion conduit à $k'^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}$, et puisqu'on s'intéresse à l'onde qui se propage selon x croissant,

$k' = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c}$. La vitesse de phase est $c_\phi = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$.

La vitesse de groupe est $c_g = \frac{d\omega}{dk'}$. Or, $\omega = \sqrt{k'^2 c^2 + \omega_c^2}$, donc $\frac{d\omega}{dk'} = \frac{2c^2 k'}{2\sqrt{k'^2 c^2 + \omega_c^2}} = \frac{c^2 k'}{\omega}$, d'où $c_g = c \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{\omega} = \frac{c^2}{c_\phi}$.

