

I. Oscillation de neutrinos

1. L'atome d'azote oscille du côté gauche au côté droit par effet tunnel.

2. $\Psi(x,t)$ est une combinaison linéaire des états gauche ($\varphi_G(x)$) et droit ($\varphi_D(x)$).
 C_G et C_D sont les coefficients de cette combinaison. Ils indiquent le poids respectif des états gauche et droit dans l'état quelconque $\Psi(x,t)$

Condition de normalisation: $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (C_G \varphi_G + C_D \varphi_D) (C_G^* \varphi_G^* + C_D^* \varphi_D^*) dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |C_G|^2 |\varphi_G|^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |C_D|^2 |\varphi_D|^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (C_G C_D^* \varphi_G \varphi_D^* + C_G^* C_D \varphi_G^* \varphi_D) dx = 1$$

$$= |C_G|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_G|^2 dx + |C_D|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_D|^2 dx$$

car C_G indépendant de x idem pour C_D

car $\varphi_G = 0$ quand $\varphi_D \neq 0$ (particule à droite)
 et $\varphi_D = 0$ quand $\varphi_G = 0$ (particule à gauche)

φ_G et φ_D étant séparément normalisés: $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_D|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_G|^2 dx = 1$

Il reste: $|C_G(t)|^2 + |C_D(t)|^2 = 1$

3. Etat stationnaire +: $\Psi_+(x,t) = \varphi_+(x) e^{-i \frac{E_+ t}{\hbar}}$
 Etat stationnaire -: $\Psi_-(x,t) = \varphi_-(x) e^{-i \frac{E_- t}{\hbar}}$

4. Les relations données par l'énoncé question 3 s'inversent en: $\varphi_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_+(x) + \varphi_-(x))$
 $\varphi_D(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_+(x) - \varphi_-(x))$

À $t=0$: $\Psi(x,0) = \varphi_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_+(x) + \varphi_-(x))$

À $t \neq 0$: $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_+(x) e^{-i \frac{E_+ t}{\hbar}} + \varphi_-(x) e^{-i \frac{E_- t}{\hbar}})$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\varphi_G(x) + \varphi_D(x)}{\sqrt{2}} e^{-i \frac{E_+ t}{\hbar}} + \frac{\varphi_G(x) - \varphi_D(x)}{\sqrt{2}} e^{-i \frac{E_- t}{\hbar}} \right)$
 $= \frac{1}{2} \left(\varphi_G(x) (e^{-i \frac{E_+ t}{\hbar}} + e^{-i \frac{E_- t}{\hbar}}) + \varphi_D(x) (e^{-i \frac{E_+ t}{\hbar}} - e^{-i \frac{E_- t}{\hbar}}) \right)$
 $= C_G(t) \varphi_G(x) + C_D(t) \varphi_D(x)$

Donc: $C_G(t) = \frac{1}{2} \left(e^{-i \frac{E_+ t}{\hbar}} + e^{-i \frac{E_- t}{\hbar}} \right)$

5. Densité linéique de probabilité de présence:

$$|\Psi(x,t)|^2 = |C_G(t)|^2 |\varphi_G(x)|^2 + |C_D(t)|^2 |\varphi_D(x)|^2 + \underbrace{(C_G C_D^* \varphi_G \varphi_D^* + C_G^* C_D \varphi_G^* \varphi_D)}_{=0}$$

en supposant $\varphi_D(x < 0) = 0$
 et $\varphi_G(x > 0) = 0$

La probabilité que la particule soit détectée à gauche est donc :

$$P_G(t) = \int_{-\infty}^0 |\varphi(x,t)|^2 dx = \int_{-\infty}^0 |C_G(t)|^2 |\varphi_G(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^0 |C_D(t)|^2 |\varphi_D(x)|^2 dx$$

$\underbrace{= 0 \text{ sur }]-\infty, 0]}$

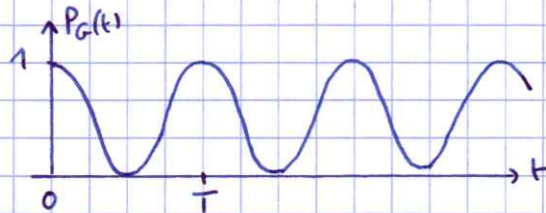
$$= |C_G(t)|^2 \int_{-\infty}^0 |\varphi_G(x)|^2 dx$$

= 1 (on peut étendre l'intégrale à +∞ car $\varphi_G(x) = 0$ sur $[0, +\infty[$)

Donc : $P_G(t) = |C_G(t)|^2 = \frac{1}{4} (e^{-i\frac{E_+ t}{\hbar}} + e^{-i\frac{E_- t}{\hbar}}) (e^{+i\frac{E_+ t}{\hbar}} + e^{+i\frac{E_- t}{\hbar}})$

$$= \frac{1}{4} (\underbrace{1+1}_{=2} + \underbrace{e^{-i\frac{E_- - E_+ t}{\hbar}} + e^{+i\frac{E_- - E_+ t}{\hbar}}}_{=2 \cos(\frac{E_- - E_+ t}{\hbar})})$$

Soit : $P_G(t) = \frac{1}{2} (1 + \cos(\frac{\Delta E t}{\hbar}))$



période temporelle T telle que :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\Delta E}{\hbar} \Rightarrow T = \frac{\hbar}{\Delta E}$$

6. On a : $E^2 = p^2 c^2 (1 + \frac{m^2 c^2}{p^2}) \Rightarrow E = pc (1 + \frac{m^2 c^2}{p^2})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow E = pc (1 + \frac{m^2 c^2}{2p^2})$

$\ll 1$

7. $\Delta E = E_1 - E_2 = pc + \frac{m_1^2 c^3}{2p} - pc - \frac{m_2^2 c^3}{2p}$ donc : $\Delta E = \frac{c^3}{2p} \Delta m^2$

8. Par analogie avec les oscillations de l'atome N de l'ammoniac, le neutrino va osciller entre les états ν_e et ν_μ avec la période temporelle : $T = \frac{\hbar}{\Delta E}$

D'où la période spatiale : $L = cT \Rightarrow L = \frac{2p\hbar}{c^2 \Delta m^2}$

9. En prenant $E \approx pc$ à l'ordre 0, on a : $\frac{L}{E} = \frac{2\hbar}{c^3 \Delta m^2} = \frac{4\pi \hbar c}{\Delta m^2 c^4}$

donc : $\Delta m^2 c^4 = \frac{4\pi \hbar c}{\frac{L}{E}}$ On lit sur la figure la période : $\frac{L}{E} \approx 70-35 = 35 \text{ km.MeV}^{-1}$

$= \frac{35 \cdot 10^3}{10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,18 \cdot 10^{17} \text{ m.J}^{-1}$

A.N : $\Delta m^2 c^4 = \frac{4\pi \cdot 0,2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-6}}{2,18 \cdot 10^{17}} = 1,84 \cdot 10^{-42} \text{ J}^2 = 7,2 \cdot 10^{-5} (\text{eV})^2 = 2,18 \cdot 10^{17} \text{ m.J}^{-1}$

10. On considère que la précision de 10% sur la détection du flux de neutrinos est aussi celle de la détection d'une variation de probabilité.

La probabilité de détection varie de $P_{\text{max}} = 0,75$ à $P_{\text{min}} = 0,4$ sur $\frac{L}{z} = 90 \text{ km}$

Donc $\Delta P = 0,35$ sur 90 km

Si on veut 10% de ΔP , il faudra une distance minimale $l_{\text{min}} = 9 \text{ km}$

11. Pour $l < 1 \text{ km}$, il n'y a pas d'oscillations détectées. Pour $l = 100 \text{ km}$, on détecte les oscillations avec une probabilité de l'ordre de 0,6.

• C'est en accord avec la question 10 ($l_{\text{min}} \approx 10 \text{ km}$)

• Pour $l = 100 \text{ km}$ et $E = 4 \text{ MeV}$ on a : $\frac{l}{E} = 25 \text{ km.MeV}^{-1} \Rightarrow$ on lit bien une probabilité d'environ 0,6 sur la figure 1

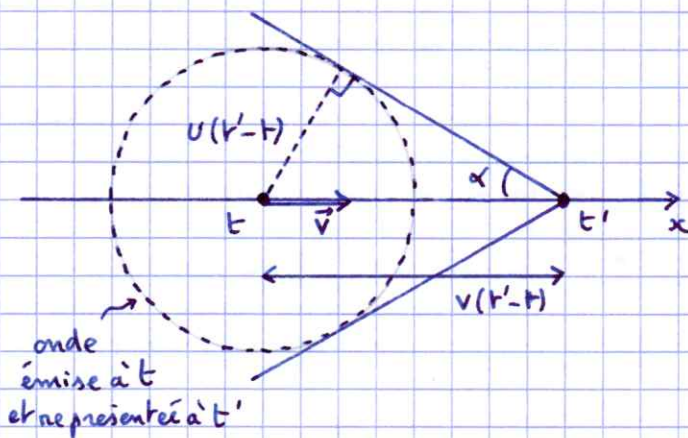
12. On calcule $\frac{h}{E} = \frac{150 \cdot 10^6}{4} = 3,75 \cdot 10^7 \text{ km.MeV}^{-1}$

La courbe moyenne en bleue de la figure 1 a l'air de tendre vers 0,5 pour $\frac{h}{E}$ croissant.
Ici $\frac{h}{E}$ est très grand, donc on s'attend à $P_e = 0,5$.
La moitié des neutrinos est ν_e , l'autre ν_μ .

II. Effet Tcherenkov

II.1 Répartition spatiale du rayonnement Tcherenkov

13. Entre t et t' la particule se déplace de $v(t'-t)$
L'onde émise à l'instant t s'est propagée dans une sphère de rayon $u(t'-t)$ entre les instants t et t'
Comme la particule va plus vite que l'onde ($v > u$), on peut dire que la particule "laisse l'onde derrière elle".



L'onde est donc à l'intérieur du cône :
- d'axe la trajectoire de la particule
- de demi-angle au sommet α tel que :

$$\sin \alpha = \frac{u(t'-t)}{v(t'-t)}$$

donc : $\sin \alpha = \frac{u}{v}$

14. On considère deux signaux identiques émis aux instants t et $t+T$ où T est la période d'émission
Au niveau de l'observateur, le décalage temporel entre les deux signaux est : $\Delta t = \frac{vT \cos \theta}{u}$

D'où un déphasage : $\Delta \phi = \omega \Delta t = \frac{2\pi}{T} \frac{vT \cos \theta}{u}$

$$\Delta \phi = 2\pi \frac{v}{u} \cos \theta$$

Les signaux seront en phase si : $\Delta \phi = 2p\pi \quad p \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow \frac{v}{u} \cos \theta = p$

$$\Rightarrow \cos \theta = p \frac{u}{v} \quad p \in \mathbb{Z}$$

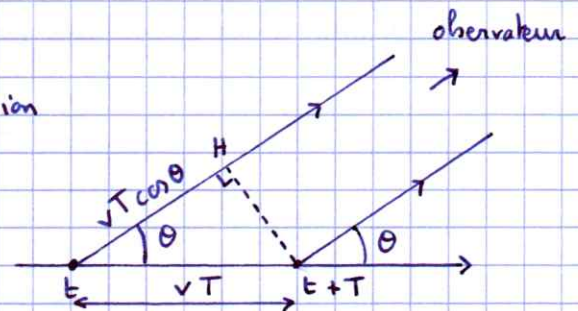
Pour $p=0$, on a le cas particulier $\theta = \frac{\pi}{2}$ (observateur latéral)

Pour $p=2$, θ n'existe que si $\frac{2u}{v} \leq 1 \rightarrow v \geq 2u$

Or v est supérieur à u avec $\frac{u}{v} =$ vitesse des ondes électromagnétiques dans le milieu
 u est inférieur à c mais quand même assez proche \Rightarrow la condition $v \geq 2u$ ne peut pas être réalisée car la particule aurait une vitesse $> c$

On rejette le cas $p=2$ ou plus. On ne garde que $p=1$:

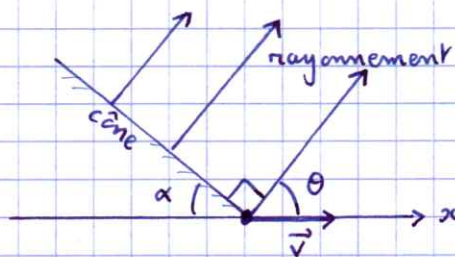
$$\cos \theta = \frac{u}{v}$$



15. D'après 13 et 14: $\sin \alpha = \cos \theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

Le rayonnement est émis dans la direction perpendiculaire à la surface du cône.

On retrouve le théorème de Malus.



16. $\cos \theta = \frac{v}{c}$ avec: $v = \frac{c}{m} =$ vitesse de la lumière dans l'eau

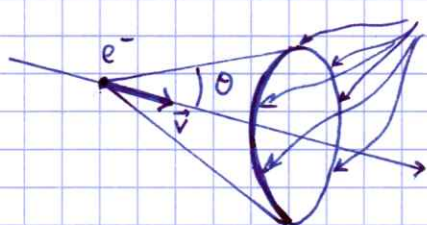
et: $v \approx c$

d'où: $\cos \theta = \frac{1}{m} = \frac{1}{(\frac{4}{3})} = \frac{3}{4} = 0,75$ or $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$

Donc θ est légèrement inférieur à 45° (car $\cos \theta > \cos 45^\circ$) - $\theta \approx 40^\circ$

17. • Les points rouges correspondent aux premiers détecteurs atteints, donc ceux qui sont les plus proches de la collision eau/neutrino
 \Rightarrow la collision a eu lieu "au milieu" de la tache rouge

- L'électron rayonne devant lui sous forme de cône de demi-angle au sommet θ



cette lumière va éclairer différents détecteurs au même instant

\Rightarrow taches de même couleur

\Rightarrow la trajectoire de l'électron est "au centre" des courbes de même couleur que l'on peut plus ou moins bien se constituer en joignant des taches de même couleur

18. On voit que pour $p \rightarrow +\infty$, θ tend vers $\theta_{\text{lim}} \approx 0,05$ rad.

On l'annonce nous dit que pour $p \rightarrow +\infty$: $v \approx c$

On a donc: $\cos \theta_{\text{lim}} = \frac{v}{c} = \frac{1}{m} \Rightarrow m = \frac{1}{\cos \theta_{\text{lim}}} = \frac{1}{(1 - \frac{\theta_{\text{lim}}^2}{2})} \approx 1 + \frac{\theta_{\text{lim}}^2}{2}$ car $\theta_{\text{lim}} \ll 1$ rad

Donc: $m - 1 \approx \frac{\theta_{\text{lim}}^2}{2}$ A.N. $m - 1 \approx \frac{(5 \cdot 10^{-2})^2}{2} \approx 10^{-3}$

On en déduit: $m - 1 \ll (m - 1)_{\text{eau}} = 0,33$ et m proche de 1 donc proche de main

Pour avoir l'effet Tcherenkov, il faut que: $v > v$ $\Rightarrow v > \frac{c}{m}$

$\Rightarrow v > \frac{c}{1 + (m - 1)}$
 $\ll 1$

$\Rightarrow v > c(1 - (m - 1))$

$\Rightarrow v > 0,999 c$

II-2 Spectre du rayonnement Tcherenkov

19. $P(\omega) = K \cdot q^\alpha \cdot \omega^\beta \cdot c^\delta \cdot \epsilon_0^\gamma$

on a: $[P] = ML^2 T^{-2}$

$[q] = I \cdot T$

$[\omega] = T^{-1}$

$[c] = L \cdot T^{-1}$

$[\epsilon_0] = I^2 \cdot T^4 \cdot L^{-3} \cdot M^{-1}$

(obtenus à partir de $F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2}$)

donc: $ML^2 T^{-2} = (IT)^\alpha \cdot (T^{-1})^\beta \cdot (LT^{-1})^\gamma \cdot (I^2 T^4 L^{-3} M^{-1})^\delta$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = -\delta \\ 2 = \gamma - 3\delta \\ -2 = \alpha - \beta - \gamma + 4\delta \\ 0 = \alpha + 2\delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -1 \\ \delta = -1 \end{cases}$$

donc:

$$P(\omega) = K \cdot \frac{q^2 \omega}{\epsilon_0 c}$$

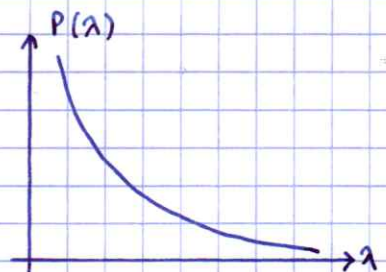
20. On a: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda}$ et $d\omega = -2\pi c \frac{d\lambda}{\lambda^2}$ (on prend $d\omega = 2\pi c \frac{d\lambda}{\lambda^2}$ ensuite pour avoir $d\omega > 0$)

Donc: $dP = P(\omega) \cdot d\omega = K \frac{q^2 \omega}{\epsilon_0 c} \cdot d\omega$

$$= K \frac{q^2}{\epsilon_0 c} \cdot \frac{2\pi c}{\lambda} \cdot 2\pi c \frac{d\lambda}{\lambda^2}$$

d'où: $dP = K \frac{(2\pi q)^2 c}{\epsilon_0 \lambda^3} d\lambda$

$$\Rightarrow P(\lambda) = K \frac{(2\pi q)^2 c}{\epsilon_0 \lambda^3}$$



En comparant avec la figure 5, on a une courbe comparable dans les domaines visible et I.R.

$P(\lambda)$ est grand pour les faibles longueurs d'onde \Rightarrow le rayonnement Tcherenkov nous apparaît bleu

21. Puissance rayonnée dans l'intervalle $[\lambda, \lambda + d\lambda]$: $dP = P(\lambda) d\lambda$

La distance D est parcourue en un temps $\frac{D}{c}$

L'énergie rayonnée dans l'intervalle $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ est: $dP \cdot \frac{D}{c}$

Chaque photon a l'énergie $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$

$$\Rightarrow \text{le nombre de photons rayonnés dans cet intervalle est: } dN = \frac{dP \cdot \frac{D}{c}}{\frac{hc}{\lambda}} = \frac{dP \cdot \lambda \cdot D}{hc^2}$$

$$= K \frac{(2\pi q)^2 c}{\epsilon_0 \lambda^3} \cdot \frac{\lambda D}{hc^2} d\lambda$$

$$= K \frac{(2\pi q)^2 D}{\epsilon_0 hc} \frac{d\lambda}{\lambda^2}$$

Le nombre de photons rayonnés sur l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$ est:

$$N = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} dN = K \frac{(2\pi q)^2 D}{\epsilon_0 hc} \left[-\frac{1}{\lambda} \right]_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Rightarrow N = K \frac{(2\pi q)^2 D}{\epsilon_0 hc} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)$$

$$22. N = 4\pi^2 D \frac{e^2}{\epsilon_0 h c} \left(\frac{1}{\lambda_V} - \frac{1}{\lambda_R} \right) = 2\pi D \frac{e^2}{\epsilon_0 h c} \left(\frac{1}{\lambda_V} - \frac{1}{\lambda_R} \right) \quad \text{A.N.: } \underline{N \sim 4 \cdot 10^4}$$

≈ 6 $5 \cdot 10^{-2}$ $0,1$ $\frac{1}{0,4 \cdot 10^{-6}}$ $\frac{1}{0,8 \cdot 10^{-6}}$

II.3 Polarisation du rayonnement Tcherenkov

23. Puisqu'on a un mouvement rectiligne uniforme, la combinaison est: $\vec{r} = \vec{v}t$ ($\vec{r}' = \vec{0}' \text{ à } t=0$)

24. $\vec{j}'(\vec{r}', t')$ se décompose en somme de $e^{i(\vec{k}'\vec{r}' - \omega't')}$

A l'endroit où se trouve la particule: $\vec{j}'(\vec{v}t, t)$ se décompose en somme de $e^{i(\vec{k}'\vec{v}t - \omega't)}$

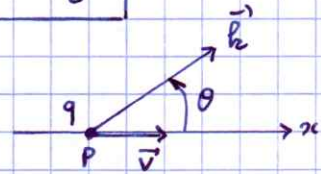
Or $\vec{j}'(\vec{v}t, t) = q\vec{v}$ indépendant du temps $\Rightarrow e^{i(\vec{k}'\vec{v} - \omega)t}$ doit être indépendant de t

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \vec{k}' \cdot \vec{v}} \quad (1)$$

25. Relation de dispersion dans un milieu d'indice n : $\boxed{k = \frac{\omega}{c} n = \frac{\omega}{v}}$ (2)

26. (1) $\Rightarrow \omega = kv \cos \theta$
 (2) $\Rightarrow \omega = k \frac{c}{n} = kv$

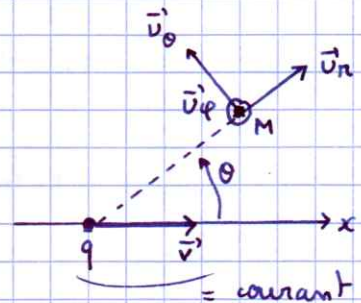
$\Rightarrow \boxed{\cos \theta = \frac{v}{c}}$ on retrouve le résultat de la question 14



27. Le plan $(M, \vec{u}_n, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie des courants
 $\Rightarrow \vec{B}'(M)$ perpendiculaire à ce plan
 $\Rightarrow \vec{B}'(M)$ selon \vec{u}_ϕ

La dépendance en $e^{i(\vec{k}'\vec{r}' - \omega't')}$ permet d'utiliser:
 $\text{div } \vec{E}' = 0 \Rightarrow i\vec{k}' \cdot \vec{E}' = 0 \Rightarrow \vec{E}' \perp \vec{k}'$
 $\text{rot } \vec{E}' = \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} \Rightarrow \vec{B}' = \frac{\vec{k}' \Delta \vec{E}'}{\omega} \Rightarrow \vec{E}' \perp \vec{B}'$

$\Rightarrow \vec{E}'(M)$ selon \vec{u}_θ



Dans la direction de propagation, on observe donc une polarisation rectiligne selon \vec{u}_θ

28. L'analogie en acoustique est la formation d'une onde de choc quand l'émetteur est supersonique ($v > c_{\text{son}}$)

différence: ?