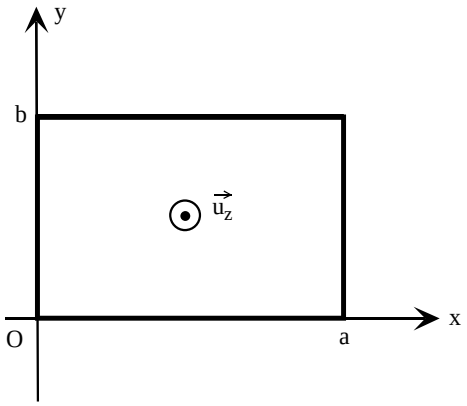
2 page 40 : guide d'ondes

1°) Sachant que le champ électrique et le champ magnétique sont nuls dans le métal, et que les composantes tangentielle du champ électrique et normale du champ magnétique sont continues, la composante tangentielle du champ électrique et la composante normale du champ magnétique doivent bien s'annuler sur les parois du guide.



2°)

a) A l'intérieur du guide, il n'y a rien, pas de charges, donc $\mathrm{div}\vec{E} = 0$, ce qui donne $\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial z} = 0$. Or, ici $\underline{E}_x = 0$ et $\underline{E}_z = 0$, d'où $\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial y} = 0$.
On remplace $\underline{E}_y$ par l'expression donnée, dans laquelle seul A dépend de y, et on obtient : $\boxed{\frac{\partial A}{\partial y} = 0}$, ce qui, en définitive, montre bien que A ne dépend pas de *y*.
Ainsi, le champ électrique s'écrit : $\vec{\underline{E}} = A(x)\vec{u}_y e^{j(\omega t - k_g z)}$.
Dans le guide (air assimilé au vide, cf OND3 : pas de charges, pas de courants), le champ électrique vérifie l'équation de d'Alembert $\Delta\vec{\underline{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\underline{E}}}{\partial t^2} = \vec{0}$. En projetant sur l'axe des y, cela donne $\Delta \underline{E}_y - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial t^2} = 0$,
c'est-à-dire $\frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial t^2} = 0$.
On remplace $\underline{E}_y$ par $A(x)\exp\left(j(\omega t - k_g z)\right)$ et on obtient :
$\frac{d^2A}{dx^2} \times \exp\left(j(\omega t - k_g z)\right) + 0 + \left(-{k_g}^2 A\right) \times \exp\left(j(\omega t - k_g z)\right) + \frac{\omega^2}{c^2} A \times \exp\left(j(\omega t - k_g z)\right) = 0.$
Après simplification par l'exponentielle, qui n'est pas nulle :
$\boxed{\frac{d^2A}{dx^2} - {k_g}^2 A + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0}$.

$\frac{d^2A}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2\right) A = 0$ admet des formes de solution différentes selon le signe de $\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2$.

Si $k_g^2 > \frac{\omega^2}{c^2}$, alors $A(x)$ s'exprime avec des cosinus hyperboliques et sinus hyperboliques (cosh et sinh) :
$A(x) = a_1 \cosh\left(\left(k_g^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)x\right) + b_1 \sinh\left(\left(k_g^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)x\right)$.
La condition de passage traduisant la continuité du champ électrique tangentiel dans le plan $x = 0$ conduit à $a_1 = 0$. On a donc $A(x) = b_1 \sinh\left(\left(k_g^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)x\right)$.
La condition de passage traduisant la continuité du champ électrique tangentiel dans le plan $x = a$ conduit à $b_1 = 0$.
Cela donne donc un champ électrique finalement nul partout !
Donc si $k_g^2 > \frac{\omega^2}{c^2}$, il ne peut pas y avoir d'onde qui se propage dans le guide (en tout cas pas avec la forme de champ électrique qu'on nous propose).
On a bien montré qu'il faut nécessairement que ${k_g}^2 < \omega^2 / c^2$.

Conformément à l'énoncé, on pose pour la suite $k_t^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2$.
L'équation différentielle pour $A(x)$ s'écrit donc : $\frac{d^2A}{dx^2} + k_t^2 A = 0$.
Sa solution s'écrit : $A(x) = a_2 \cos(k_t x) + b_2 \sin(k_t x)$.
La condition de passage traduisant la continuité du champ électrique tangentiel dans le plan $x = 0$ conduit à $a_2 = 0$. On a donc $A(x) = b_2 \sin(k_t x)$.
La condition de passage traduisant la continuité du champ électrique tangentiel dans le plan $x = a$ conduit à :
$b_2 \sin(k_t a) = 0$, d'où $k_t a = n\pi$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, d'où $k_t = \frac{n\pi}{a}$.

À chaque valeur de l'entier n correspond une valeur de k_t qu'on peut noter $k_{t,n}$. Et le lien $k_{t,n}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2$ entre k_g et k_t imposé par l'énoncé entraîne que pour chaque valeur de n, il y a une valeur $k_{g,n}$ de k_g. On obtient alors une « relation de dispersion » : $\boxed{k_{g,n}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}}$.

b) Résumons : on étudie une onde électromagnétique dont le champ électrique est de la forme (pour le mode n) :
$\overrightarrow{\underline{E_n}} = b_{2,n} \sin\left(k_{t,n} x\right) \vec{u}_y e^{j(\omega t - k_{g,n} z)}$.
Pour qu'il y ait propagation, il faut que $k_{g,n}$ (qui pourrait être complexe, *a priori*) ne soit pas imaginaire pur. Il faut donc que son carré soit positif ou nul. Cela signifie $\omega^2 \geq \frac{n^2\pi^2c^2}{a^2}$.

On voit ainsi apparaître, pour chaque mode *n*, une pulsation de coupure (ou « critique ») : $\boxed{\omega_{n,c} = \frac{n\pi c}{a}}$.

C'est une pulsation de coupure basse : seules les ondes de pulsation supérieure à cette pulsation de coupure peuvent se propager dans le guide.

Avec cette notation, la relation de dispersion peut ainsi s'écrire : $k_{g,n}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{n,c}^2}{c^2}$.

Discutons brièvement de la forme de la solution obtenue : pour le mode n, $\underline{\vec{E}_n} = b_{2,n} \sin(k_{t,n}x)\, \vec{u}_y e^{j(\omega t - k_{g,n}z)}$,

Et en notation réelle, $\vec{E}_n = b_{2,n}\, sin(k_{t,n}\, x)\, cos(\omega t - k_{g,n}z)\, \vec{u}_y$.

C'est donc une onde harmonique qui se propage selon l'axe Oz, mais dont la répartition selon Ox n'est pas uniforme.

Ce n'est donc <u>pas une onde plane</u>.

Sur l'axe Ox, il y a des nœuds (en x=0 et x=a pour le mode fondamental, et d'autres en plus pour les modes n > 1) et des ventres de champ électrique.

Application numérique : la plus petite fréquence de coupure est obtenue pour n = 1. Elle vaut $\boxed{f_{1,c} = \frac{c}{2a} = 3\text{GHz}}$.

Pour le mode *n*, quand $\omega \geq \omega_{n,c}$, la forme du champ électrique $\vec{E}_n = b_{2,n}\, sin(k_{t,n}\, x)\, cos(\omega t - k_{g,n}z)\, \vec{u}_y$ permet de dire :

- À z fixé, le champ électrique varie sinusoïdalement en fonction de x, mais ne dépend pas de y. Il s'annule sur les parois $x = 0$ et $x = a$. Dans un plan $z = Cte$, les dépendances du champ électrique par rapport au temps et à l'espace (x) sont découplées. L'aspect de l'onde est stationnaire.
- À x fixé, le champ électrique varie en fonction de z de façon sinusoïdale. Et les dépendances par rapport au temps et à l'espace (z) sont couplées : l'onde se propage.

La phase $(\omega t - k_{g,n} z)$ de l'onde (au sens large) se propage à la vitesse de phase $v_{\varphi,n} = \frac{\omega}{k_{g,n}} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{n,c}{}^2}} = \sqrt{c^2 + \frac{\omega_{n,c}{}^2}{k_{g,n}{}^2}}$.

$k_{g,n}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{n,c}^2}{c^2}$ donc $k_{g,n}^2 c^2 = \omega^2 - \omega_{n,c}^2$

On voit donc que la <u>vitesse de phase est supérieure à c.</u>

On dérive par rapport à $k_{g,n}$: $2c^2 k_{g,n} = 2\omega \frac{d\omega}{dk_{g,n}} - 0$, d'où $c^2 = v_{\varphi,n} v_{g,n}$.

Il vient $v_{g,n} = \frac{c^2}{v_{\varphi,n}} =$, ce qui montre que la <u>vitesse de groupe est inférieure à c</u>. C'est elle qui correspond à la vitesse de propagation de l'information.

3°) **<u>Attention</u>** ! : l'onde ici n'est pas plane ; on **<u>ne peut donc pas</u>** utiliser le vecteur nabla habituel associé aux ondes planes.

$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ peut s'écrire, en notation complexe, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}}$.

D'où $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ b_{2,n} \sin(k_{t,n}x)\, e^{j(\omega t - k_{g,n}z)} \\ 0 \end{pmatrix} = -j\omega\, \underline{\vec{B}}$

En projetant sur les différents axes, cela donne

$-j\omega \underline{B_x} = -\frac{\partial \underline{E_y}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(b_{2,n} \sin(k_{t,n}x)\, e^{j(\omega t - k_{g,n}z)}\right) = j k_{g,n} b_{2,n} \sin(k_{t,n}x)\, e^{j(\omega t - k_{g,n}z)}$,

d'où $\boxed{\underline{B_x} = -\frac{k_{g,n}}{\omega} b_{2,n}\, sin(k_{t,n}x)\, e^{j(\omega t - k_{g,n}z)}}$

et $-j\omega \underline{B_z} = \frac{\partial \underline{E_y}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(b_{2,n} \sin(k_{t,n}x)\, e^{j(\omega t - k_{g,n}z)}\right) = k_{t,n} b_{2,n} \cos(k_{t,n}x)\, e^{j(\omega t - k_{g,n}z)}$

d'où $\boxed{\underline{B_z} = j\frac{b_{2,n}}{\omega} k_{t,n}\, cos(k_{t,n}x)\, e^{j(\omega t - k_{g,n}z)}}$.

La composante en x du champ magnétique s'annule bien sur les 2 parois (x=0 et x=a), ce qui correspond bien à la continuité du champ magnétique normal. En revanche, le champ B tangentiel sera discontinu en raison des courants de surface dans les parois métalliques.

On voit donc que l'onde n'est pas transverse magnétique, car $B_z \neq 0$.

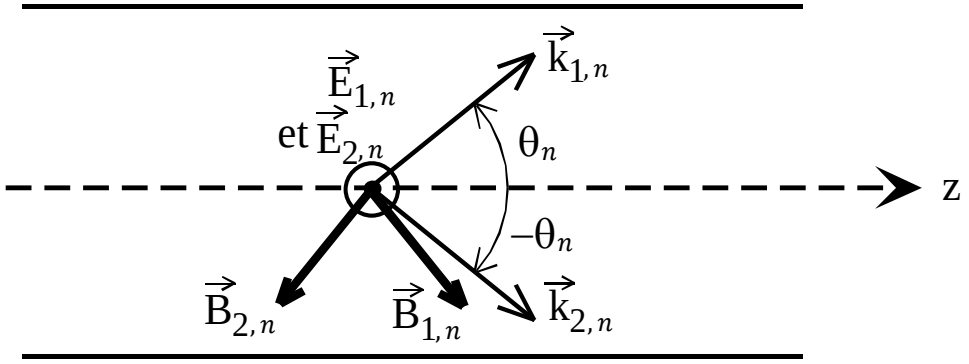
En fait, on peut décomposer l'onde en 2 OPPH polarisées rectilignement, se propageant dans 2 directions, faisant des angles +θ et -θ par rapport à Oz :

$\vec{E}_n = \vec{E}_{1n} + \vec{E}_{2n}$,

avec $\vec{E}_{1n} = -\frac{b_{2,n}}{2} sin\left(\omega t - \left(k_{g,n} z + k_{t,n} x\right)\right) \vec{u}_y = -\frac{b_{2,n}}{2} sin\left(\omega t - \vec{k}_{1,n} \cdot \vec{r}\right) \vec{u}_y$

et $\vec{E}_{2n} = \frac{b_{2,n}}{2} sin\left(\omega t - \left(k_{g,n} z - k_{t,n} x\right)\right) \vec{u}_y = \frac{b_{2,n}}{2} sin\left(\omega t - \vec{k}_{2,n} \cdot \vec{r}\right) \vec{u}_y$.

en posant $\vec{k}_{1,n} = k_{t,n}\vec{u}_x + k_{g,n}\vec{u}_z$ et $\vec{k}_{2,n} = -k_{t,n}\vec{u}_x + k_{g,n}\vec{u}_z$.

On a bien $\left\|\vec{k}_{1,n}\right\|^2 = \left\|\vec{k}_{2,n}\right\|^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

L'angle θ_n d'inclinaison est donc donné par $tan\,\theta_n = \frac{k_{g,n}}{k_{t,n}}$ ou $sin\,\theta_n = \frac{k_{t,n}}{\sqrt{k_{g,n}^2 + k_{t,n}^2}}$