1 page 40, série 33 (plasma)

1°) $\underline{\gamma} = \frac{i n_0 e^2}{m\omega}$ (cf cours).

2°) PFD appliqué à un électron : $m\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e\,\vec{E}$,

d'où, ici, $-mi\omega\underline{\vec{v}} = -e\,\underline{\vec{E}}$, puis $-mi\omega\,(-i\omega)\underline{\vec{r}} = -e\,\underline{\vec{E}}$,

d'où $m\omega^2\underline{\vec{r}} = e\,\underline{\vec{E}}$, donc $\underline{\vec{r}} = \frac{e\,\vec{E}}{m\omega^2}$.

On veut $\left|\underline{\vec{r}}\right| \ll \lambda$, c'est-à-dire $\frac{eE_0}{m\omega^2} \ll \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, soit $\boxed{E_0 \ll \frac{2\pi c m\omega}{e}}$.

Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{rot}\underline{\vec{B}} = \mu_0\left(\underline{\gamma} - i\omega\epsilon_0\right)\underline{\vec{E}}$

$$= -i\omega\epsilon_0\mu_0\left(1 + \frac{\underline{\gamma}}{-i\omega\epsilon_0}\right)\underline{\vec{E}}$$
$$= -i\omega\epsilon_0\mu_0\left(1 - \frac{n_0 e^2}{m\omega^2\epsilon_0}\right)\underline{\vec{E}}$$
$$= -i\omega\epsilon_0\mu_0\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)\underline{\vec{E}} = \mu_0\epsilon_0\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \mu_0\epsilon\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}.$$

$$\overrightarrow{rot}\underline{\vec{B}} = \mu_0\epsilon\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \mu_0\epsilon_0\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \left(\frac{n}{c}\right)^2\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}, \text{ avec } n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}$$

Conséquence, qui sera utile pour la question 3°) : les OPPH qui se propagent dans le plasma (pour $\omega > \Omega$), ont les mêmes caractéristiques que les OPPH dans le vide, à condition de remplacer ϵ_0 par ϵ, et c par $c\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}}$. Pour alléger, on posera $n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}$.
Donc dans le plasma, on doit remplacer c par $\frac{c}{n}$
La relation de structure dans le plasma est, en effet :
$\underline{\vec{B}} = \sqrt{\mu_0\epsilon}\left(\vec{u}\wedge\underline{\vec{E}}\right) = \sqrt{\mu_0\epsilon_0}\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}\left(\vec{u}\wedge\underline{\vec{E}}\right) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}\frac{\vec{u}\wedge\underline{\vec{E}}}{c} = n\,\frac{\vec{u}\wedge\underline{\vec{E}}}{c}$.

3°) On se donne des notations pour les champs des ondes incidente, réfléchie, transmise :
$\underline{\vec{E}}_i = E_{im}\,e^{i(k_0x-\omega t)}\vec{u}_y$
$\underline{\vec{B}}_i = \frac{\vec{u_x}\wedge\underline{\vec{E}}_i}{c} = \frac{E_{im}}{c}\,e^{i(k_0x-\omega t)}\vec{u}_z$

$\underline{\vec{E}}_r = \underline{\vec{E}}_{rm}\,e^{i(-k_0x-\omega t)}$
$\underline{\vec{B}}_r = \frac{-\vec{u_x}\wedge\underline{\vec{E}}_r}{c} = \frac{-\vec{u_x}\wedge\underline{\vec{E}}_{rm}}{c}\,e^{i(-k_0x-\omega t)}$

$\underline{\vec{E}}_t = \underline{\vec{E}}_{tm}\,e^{i(kx-\omega t)}$
$\underline{\vec{B}}_t = n\frac{\vec{u_x}\wedge\underline{\vec{E}}_t}{c} = n\frac{\vec{u_x}\wedge\underline{\vec{E}}_{tm}}{c}\,e^{i(kx-\omega t)}$

Continuité du champ électrique tangentiel dans le plan $x = 0$:
$E_{im}\,\vec{u}_y + \underline{\vec{E}}_{rm} = \underline{\vec{E}}_{tm}$ (1)

Et comme il n'y a pas de courants surfaciques, le champ magnétique, qui est aussi tangentiel, est continu lui-aussi, d'où :
$\frac{E_{im}}{c}\,\vec{u}_z + \frac{-\vec{u_x}\wedge\underline{\vec{E}}_{rm}}{c} = n\frac{\vec{u_x}\wedge\underline{\vec{E}}_{tm}}{c}$

On multiplie cette équation vectoriellement (par la gauche) par $\vec{u}_x$. On obtient, sachant que les ondes sont OPP donc TEM:

$-\frac{E_{im}}{c}\,\vec{u}_y + \frac{\underline{\vec{E}}_{rm}}{c} = n\frac{-\underline{\vec{E}}_{tm}}{c}$

D'où $E_{im}\,\vec{u}_y - \underline{\vec{E}}_{rm} = n\,\underline{\vec{E}}_{tm}$ (2)

En faisant (1) + (2) on obtient que $\underline{\vec{E}}_{tm}$ est selon $\vec{u}_y$. Puis en reportant cela dans (1), que $\underline{\vec{E}}_{rm}$ est aussi selon $\vec{u}_y$.
On peut donc écrire : $\underline{\vec{E}}_{rm} = \underline{E}_{rm}\,\vec{u}_y$, et $\underline{\vec{E}}_{tm} = \underline{E}_{tm}\,\vec{u}_y$.
Alors, (1) et (2) deviennent, après projection :
$E_{im} + \underline{E}_{rm} = \underline{E}_{tm}$ (3)

$E_{im} - \underline{E}_{rm} = n\underline{E}_{tm}$ (4)

On pose $\underline{r} = \frac{E_{rm}}{E_{im}}$ et $\underline{t} = \frac{E_{tm}}{E_{im}}$.
d'où $1 + \underline{r} = \underline{t}$ et $1 - \underline{r} = n\underline{t}$.
De ces deux équations, on tire $\underline{t} = t = \frac{2}{1+n}$ et $\underline{r} = r = \frac{1-n}{1+n}$
Ou encore $t = \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}}}$ et $r = \frac{1-\sqrt{1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}}}{1+\sqrt{1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}}}$.

Vecteurs de Poynting (avec des champs **réels**) :

$$\vec{\pi}_i = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{E_{im}\cos(k_0x - \omega t)\,\vec{u}_y \wedge \frac{E_{im}}{c}\cos(k_0x - \omega t)\,\vec{u}_z}{\mu_0}$$

$$\vec{\pi}_i = \frac{E_{im}^2\cos^2(k_0x - \omega t)}{\mu_0 c}\vec{u}_x$$

$$\vec{\pi}_t = \frac{\vec{E}_t \wedge \vec{B}_t}{\mu_0} = \frac{tE_{im}\cos(kx - \omega t)\,\vec{u}_y \wedge \frac{tnE_{im}}{c}\cos(kx - \omega t)\,\vec{u}_z}{\mu_0}$$

$$\vec{\pi}_t = \frac{t^2 n E_{im}^2\cos^2(kx - \omega t)}{\mu_0 c}\vec{u}_x$$

$$\vec{\pi}_r = \frac{\vec{E}_r \wedge \vec{B}_r}{\mu_0} = \frac{rE_{im}\cos(k_0x + \omega t)\,\vec{u}_y \wedge \frac{-rE_{im}}{c}\cos(k_0x + \omega t)\,\vec{u}_z}{\mu_0}$$

$$\vec{\pi}_r = \frac{-r^2E_{im}^2\cos^2(k_0x + \omega t)}{\mu_0 c}\vec{u}_x$$

$T = \frac{\|\vec{\pi}_t(0,t)\|}{\|\vec{\pi}_i(0,t)\|}$, ou $T = \frac{\vec{\pi}_t(0,t)\cdot\vec{u}_x}{\vec{\pi}_i(0,t)\cdot\vec{u}_x}$ ou $T = \frac{<\|\vec{\pi}_t(x_1>0,t)\|>}{<\|\vec{\pi}_i(x_2<0,t)\|>}$, donne $T = nt^2 = \frac{4n}{(1+n)^2}$

$R = \frac{\|\vec{\pi}_r(0,t)\|}{\|\vec{\pi}_i(0,t)\|}$, ou $R = \frac{\vec{\pi}_r(0,t)\cdot(-\vec{u}_x)}{\vec{\pi}_i(0,t)\cdot\vec{u}_x}$, ou $R = \frac{<\|\vec{\pi}_r(x_1>0,t)\|>}{<\|\vec{\pi}_i(x_2<0,t)\|>}$, donne $R = \frac{(1-n)^2}{(1+n)^2}$