

Physique-Chimie 1 - Centrale Supélec 2016 PSI**I Pertes de charge dans les conduites**

I.A.1.a. Écoulement parfait : écoulement non visqueux et sans phénomènes diffusifs.

Écoulement homogène incompressible : la masse volumique est la même en tout point et à tout instant.

Stationnaire : indépendant du temps.

I.A.1.b. Le premier principe industriel de la thermodynamique s'écrit $\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = q + w_u$ entre deux points d'une ligne de courant. Avec un écoulement parfait, sans pièce mobile mécanique, il n'y a ni chaleur massique échangée q , ni travail massique « utile ».

En notant $e_c = \frac{1}{2}v^2$ l'énergie cinétique massique, $e_p = gz$ l'énergie potentielle massique de pesanteur, $h = u + \frac{p}{\rho}$

l'enthalpie massique avec u l'énergie interne massique, on obtient donc $\Delta \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz \right) = 0$.

Compte tenu de l'hypothèse d'un fluide parfait, l'énergie interne massique ne varie pas. Avec de plus l'hypothèse de l'écoulement homogène incompressible, on passe aux grandeurs volumiques en multipliant par ρ et on en déduit la relation de Bernoulli : l'énergie totale volumique du fluide $e_T = \rho gz + p + \frac{1}{2}\rho v^2$ est uniforme le long d'une ligne de

courant. En divisant par ρg , on obtient $H = \frac{e_T}{\rho g}$ uniforme le long d'une ligne de courant.

I.A.1.c. L'hypothèse d'un écoulement parfait ne peut être valide dans la couche limite, puisque c'est le lieu où les fluctuations spatiales du champ des vitesses sont importantes, donc les forces de viscosité aussi.

I.A.1.d. Dans le cas d'un écoulement permanent d'un fluide incompressible réel dans une conduite, e_T diminue le long de l'écoulement à cause du travail des forces de viscosité. Donc entre deux points A et B d'une ligne de courant, $e_T(B) - e_T(A) = \int_A^B \vec{f}_{visc} \cdot \vec{d\ell}$, qui est une quantité négative puisque, dans une conduite, les forces de viscosité sont toutes de sens contraire à l'écoulement. L'expression encadrée est un théorème de l'énergie mécanique volumique.

NB : une intégrale curviligne d'une grandeur vectorielle s'appelle « circulation » de cette grandeur le long du parcours curviligne (ici AB).

I.A.1.e. On en déduit donc $H(B) - H(A) = \frac{1}{\rho g} \int_A^B \vec{f}_{visc} \cdot \vec{d\ell} = \frac{1}{\rho g} \int_A^B \eta \Delta \vec{v} \cdot \vec{d\ell}$, qui est l'opposé de la perte de charge, $\vec{f}_{visc}$ étant une force volumique.

I.A.2.a. Puisque le fluide est incompressible, l'écoulement l'est aussi, donc $\text{div}(\vec{v}) = 0$; si on se place pour cette question en coordonnées cartésiennes avec le même axe des x que dans l'énoncé, on a bien $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. On peut aussi considérer un tube de champ de section dS et de longueur d ; le champ de vitesse est à flux conservatif, d'où $v(r, x)dS = v(r, x + dx)dS$, c'est-à-dire $v(r, x)$ ne dépend pas de x .

I.A.2.b. On suppose $\frac{\partial H}{\partial x} = -a$. D'après la question I.A.1.e, on déduit, en prenant A et B très proches l'un de l'autre, tous deux sur l'axe Ox , $\frac{\partial H}{\partial x} dx = \frac{\eta \Delta v}{\rho g} dx$.
D'où $\frac{\eta}{\rho g r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -a$, soit encore $\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{-a \rho g r}{\eta}$. Et on a vu en I.A.2.a. que le champ des vitesses ne dépend que de r , d'où $r \frac{dv}{dr} = \frac{-a \rho g r^2}{2\eta} + K$ soit $\frac{dv}{dr} = \frac{-a \rho g r}{2\eta} + \frac{K}{r}$, puis $v(r) = \frac{-a \rho g r^2}{4\eta} + K \ln(r) + K'$. Or la vitesse est finie sur l'axe, pour $r = 0$, d'où $K = 0$. Et la condition d'adhérence en $r = r_0$ donne :

$$v(r) = \frac{-a \rho g r^2}{4\eta} + \frac{a \rho g r_0^2}{4\eta}. \text{ On en déduit bien } v(r) = \frac{a \rho g}{4\eta} (r_0^2 - r^2) = v_{max} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) \text{ avec } v_{max} = \frac{a \rho g r_0^2}{4\eta}.$$

I.A.2.c. La vitesse débitante est la vitesse moyenne calculée sur une section:

$$U = \frac{1}{\pi r_0^2} \iint_{\text{section}} v(r) r d\theta dr = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} 2\pi v_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) r dr \text{ soit après simplification } \boxed{U = \frac{1}{2} v_{\max}}.$$

De $Q = U\pi r_0^2 = \frac{1}{2} v_{\max} \pi r_0^2$ on déduit donc $\boxed{v(r) = v_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) = \frac{2Q}{\pi r_0^2} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)}$.

I.A.2.d. On a $a = \frac{4\eta v_{\max}}{\rho g r_0^2} = \frac{8\eta Q}{\rho g \pi r_0^4} = \frac{128\eta Q}{\rho g \pi D^4}$, donc $\boxed{\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{128\eta Q}{\rho g \pi D^4}}$.

- Dans le cas de l'huile SAE-90, cela donne $\boxed{\frac{\partial H}{\partial x} = -1,5 \cdot 10^{-2}}$. Or, on est ici à altitude et vitesse constante puisque la canalisation est horizontale et de section constante, donc la perte de charge se traduit directement en variation de pression : $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g a$, puis, après intégration, $\boxed{\Delta p = \rho g a L = 6,5 \text{ kPa}}$.
Le nombre de Reynolds est $\boxed{Re = \frac{\rho U D}{\eta} = \frac{4\rho Q}{\pi \eta D} = 9,9 \cdot 10^2}$. Conclusion, régime laminaire.
- Pour l'eau, $\boxed{Re = \frac{\rho U D}{\eta} = \frac{4\rho Q}{\pi \eta D} = 1,9 \cdot 10^5}$. Conclusion, régime turbulent.

NB : Pour un débit de 30 L.s^{-1} et un diamètre de 20cm, $U = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 10^{-2}} = 0,95 \text{ m.s}^{-1}$. Et on note une faute de frappe dans l'énoncé pour l'unité de la viscosité : Pa.s^{-1} au lieu de Pa.s .

I.B.1.a. On s'intéresse à la puissance cinétique, ou débit d'énergie cinétique :

$$P_{c \text{ réelle}} = \iint_{\text{Section}} \frac{1}{2} \rho v^2(r) \cdot v(r) dS = \iint_{\text{Section}} \frac{1}{2} \rho v^3(r) \cdot dS \text{ car } v(r) dS \text{ est le débit volumique local.}$$

Ecoulement uniforme, $P_{c \text{ uniforme}} = \iint_{\text{Section}} \frac{1}{2} \rho U^3 \cdot dS = \frac{1}{2} \rho U^3 S$. On a donc bien $\alpha = \frac{P_{c \text{ réelle}}}{P_{c \text{ uniforme}}} = \frac{1}{U^3 S} \iint_{\text{Section}} v^3(r) \cdot dS$.

I.B.1.b. On obéit à l'énoncé, mais il y a un petit problème puisque z évolue au sein de la section.

$$Q \bar{H}(x) = \iint_{\text{Section}} H(x, r) \cdot v(r) dS = \iint_{\text{Section}} \left(z + \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2(r)}{2g} \right) \cdot v(r) \cdot dS = \iint_{\text{Section}} \left(z + \frac{P}{\rho g} \right) \cdot v(r) \cdot dS + \iint_{\text{Section}} \frac{v^3(r)}{2g} \cdot dS$$

Si on néglige les variations de z au sein d'une section, la première intégrale donne $\left(z + \frac{P}{\rho g} \right) Q$, il vient alors :

$$Q \bar{H}(x) = \left(z + \frac{P}{\rho g} \right) Q + \frac{1}{2g} \iint_{\text{Section}} v^3(r) \cdot dS = \left(z + \frac{P}{\rho g} \right) Q + \frac{1}{2g} \alpha U^3 S = \left(z + \frac{P}{\rho g} + \frac{\alpha U^2}{2g} \right) Q$$

Donc on a bien $\bar{H}(x) = z + \frac{P}{\rho g} + \frac{\alpha U^2}{2g}$.

I.B.1.c. Pour un écoulement uniforme $v(r) = U$ donc $\boxed{\alpha_{\text{uniforme}} = 1}$.

Pour l'écoulement de Poiseuille cylindrique $\alpha = \frac{1}{U^3 S} \iint_{\text{Section}} v^3(r) \cdot dS = \frac{1}{U^3 S} \int_0^{r_0} 8U^3 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^3 \cdot 2\pi r dr$

$$\alpha = \frac{8}{S} \int_0^{r_0} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^3 \cdot 2\pi r dr = \frac{8}{S} \pi \left[\frac{-r_0^2}{4} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^4 \right]_0^{r_0} \text{ donc } \boxed{\alpha_{\text{Poiseuille}} = 2}.$$

I.B.1.d. Dans le cas de régimes turbulents α est entre 1,05 et 1,20 ce qui se rapproche d'un écoulement uniforme, ce qui est cohérent avec ce qu'on a vu en cours puisque pour les grands nombres de Reynolds, le profil du champ des vitesses est assez « plat ».

Et on peut ajouter : puisqu'en pratique, la très grande majorité des écoulements dans des conduites sont turbulents, on peut prendre $\alpha = 1$. De toute façon, dans le cadre des écoulements incompressibles, dans des conduites de section constante, le terme en U^2 est le même à l'entrée et à la sortie.

I.B.2.a. Pour un écoulement de Poiseuille, en utilisant la perte de charge linéique et le I.A.2.D, $\Delta \bar{H}_\ell = aL$

avec $a = \frac{128\eta Q}{\rho g \pi D^4} = \frac{32\eta U}{\rho g D^2}$ donc $\Delta \bar{H}_\ell = \frac{32\eta UL}{\rho g D^2}$.

En identifiant avec l'expression générale $\Delta \bar{H}_\ell = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$ on obtient bien $f = \frac{64\eta}{\rho U D} = \frac{64}{Re}$.

Pour un écoulement laminaire, le coefficient de perte de charge $f \left(Re, \frac{\epsilon}{D} \right)$ ne dépend pas de $\frac{\epsilon}{D}$ car la diffusion de
quantité de mouvement l'emporte largement sur la convection, donc l'écoulement est peu sensible aux aspérités (il y a « lissage » du champ des vitesses du fait de la viscosité).

On peut aussi dire que si l'écoulement est laminaire, la couche limite est épaisse, donc les aspérités sont dans des zones où l'écoulement est très lent.