

Pb n°2 Mines PSI 2015

A.) Dimensionnement des étages de compression

□ 1 – Le diazote est un gaz diatomique donc $\gamma = 7/5 = 1,4$.

Dans le cadre d'une compression adiabatique réversible, on utilise les lois de Laplace.

La plus adaptée ici est celle avec T et P : $T_S^\gamma P_S^{1-\gamma} = T_E^\gamma P_E^{1-\gamma}$, d'où $r = \frac{P_S}{P_E} = \left(\frac{T_E}{T_S}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$.

La condition $r^N = \frac{p_A}{p_E} = 100$ conduit à $\left(\frac{T_E}{T_S}\right)^{\frac{N\gamma}{1-\gamma}} = \frac{p_A}{p_E}$, d'où $\frac{N\gamma}{\gamma-1} \log\left(\frac{T_S}{T_E}\right) = \log\left(\frac{p_A}{p_E}\right)$, puis $N = \frac{(\gamma-1)}{\gamma \log\left(\frac{T_S}{T_E}\right)} \log\left(\frac{p_A}{p_E}\right)$.

On impose $T_S < T_{max}$, d'où (la fonction \log étant croissante), $\log\left(\frac{T_S}{T_E}\right) < \log\left(\frac{T_{max}}{T_E}\right)$, puis $\frac{1}{\log\left(\frac{T_S}{T_E}\right)} > \frac{1}{\log\left(\frac{T_{max}}{T_E}\right)}$,

et enfin $N > \frac{(\gamma-1)}{\gamma \log\left(\frac{T_{max}}{T_E}\right)} \log\left(\frac{p_A}{p_E}\right)$.

Numériquement, avec $\log\left(\frac{p_A}{p_E}\right) = 2,0$, on trouve $N > 4,6$

donc en pratique, il faut prendre **au moins 5 étages**.

On prendra $N = 5$ pour la suite.

□ 2 –

L'entropie d'un gaz parfait (qui aurait dû être rappelée dans l'énoncé original) est $S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln(T^\gamma P^{1-\gamma}) + Cte$.

D'où $\Delta S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln\left(\frac{T_S^\gamma P_S^{1-\gamma}}{T_E^\gamma P_E^{1-\gamma}}\right)$.

Le second principe appliqué au gaz parfait qui parcourt les compresseurs s'écrit $\Delta S = S_e + S_c$.

Les compresseurs étant adiabatiques, $S_e = 0$. Mais l'irréversibilité donne $S_c > 0$. Il vient $\Delta S > 0$, et par conséquent,

$T_S^\gamma P_S^{1-\gamma} > T_E^\gamma P_E^{1-\gamma}$, d'où $T_S > T_E \left(\frac{P_S}{P_E}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$.

À r fixé, on a donc $T_S > T_E r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, ce qui prouve que, pour une même valeur de r , la température de sortie est supérieure à ce qu'elle était dans le cas réversible. Ce n'est pas une surprise, on pouvait s'y attendre qualitativement.

Ainsi, à r fixé, la température de sortie d'un compresseur sera plus élevée que celle obtenue en supposant la compression réversible. On avait calculé N en supposant les compressions réversibles. Mais si elles ne le sont pas, la température T_{max} risque d'être dépassée dans les compresseurs. Il faut donc, par précaution, **augmenter N** .

Mais en fait, si on change N sans modifier r , on ne peut plus avoir $r^N = 100$. Donc il faudrait aussi diminuer r .

□ 3 –

On applique le premier principe industriel au diazote entre l'entrée et la sortie de l'échangeur thermique (dans lequel il n'y a qu'un échange thermique, pas de travail utile puisque pas de pièce mécanique mobile ; et on peut négliger les variations d'énergie cinétique massique et d'énergie potentielle massique de pesanteur) :

puisque l'on est en régime d'écoulement stationnaire,

$$h_E(N_2) - h_S(N_2) = q_{H_2O \rightarrow N_2}.$$

En effet, l'entrée d'un échangeur thermique est la sortie d'un compresseur, donc l'enthalpie massique du diazote est

$$h_S.$$

Et pour mémoire, cette façon (qui est la plus classique) d'écrire le premier principe industriel se fait sans définir de système, car les grandeurs utilisées sont intensives, donc non attachées à une quantité de matière.

Même chose pour l'eau :

$$h'(H_2O) - h_e(H_2O) = q_{N_2 \rightarrow H_2O}.$$

(en notant h' l'enthalpie massique de l'eau à la sortie de l'échangeur thermique, où la température de l'eau est T' , et h_e l'enthalpie massique de l'eau à l'entrée de l'échangeur thermique, où la température de l'eau est T_e).

Afin de relier ces deux équations traduisant le premier principe industriel, il faut maintenant travailler avec des grandeurs extensives, et non intensives. Pour cela, il faut prendre en compte la masse qui circule dans chaque tuyau pendant une certaine durée. Quelle durée choisir ? Peu importe, ici, puisque l'on est en régime permanent. Prenons par exemple une durée infinitésimale dt .

Le transfert thermique reçu par le diazote pendant dt est $q_{H_2O \rightarrow N_2} D dt$.

Le transfert thermique reçu par l'eau pendant dt est $q_{N_2 \rightarrow H_2O} D_{eau} dt$.

En multipliant chaque équation du 1^{er} principe industriel par la masse de fluide qui y circule pendant dt , on a :

$$D dt (h_E(N_2) - h_S(N_2)) = D dt q_{H_2O \rightarrow N_2} \text{ et } D_{eau} dt (h'(H_2O) - h_e(H_2O)) = D_{eau} dt q_{N_2 \rightarrow H_2O}.$$

En admettant que pendant dt , tout le transfert thermique perdu par le diazote correspond à celui gagné par l'eau, on a

$$D dt q_{H_2O \rightarrow N_2} = -D_{eau} dt q_{N_2 \rightarrow H_2O},$$

d'où $D (h_E(N_2) - h_S(N_2)) = -D_{eau} (h'(H_2O) - h_e(H_2O)).$

On utilise ensuite les expressions des enthalpies massiques pour les phases condensées et pour les gaz parfaits :

$$\frac{D\gamma R}{M(\gamma-1)} (T_E - T_S) = D_{eau} c_e (T_e - T').$$

$$\text{Il vient } \frac{D_{eau}}{D} = \frac{\gamma R}{M c_e (\gamma-1)} \frac{T_S - T_E}{T' - T_e}.$$

Puis $T' < T'_{max}$ conduit à $\frac{1}{T' - T_e} > \frac{1}{T'_{max} - T_e}$, et donc $\frac{D_{eau}}{D} > \frac{\gamma R}{M c_e (\gamma-1)} \frac{T_S - T_E}{T'_{max} - T_e}$.

Que prendre comme valeur pour T_S ?

Ne connaissant pas le degré d'irréversibilité du compresseur, on pourrait prendre $T_S = T_{max} = 400$ K, ce qui donnerait $\frac{D_{eau}}{D} > 0,354$.

Mais on peut aussi rester sur le modèle de compression adiabatique réversible, et réutiliser la relation $\left(\frac{T_E}{T_S}\right)^{\frac{N\gamma}{1-\gamma}} = \frac{p_A}{p_E}$

obtenue à la question 1. On en déduit $T_S = T_E \left(\frac{p_A}{p_E}\right)^{\frac{\gamma-1}{N\gamma}}$. Pour $N=5$, on trouve, $T_S = 390$ K, d'où $\frac{D_{eau}}{D} > 0,32$.

Remarque : avec le schéma de l'énoncé (échangeurs à eau à co-courant, c'est-à-dire avec le diazote et l'eau qui s'écoulent vers la droite), il est difficile d'admettre qu'il y ait un risque que l'eau atteigne 350 K en sortie, si le diazote sort à 300 K. Il y a sans doute une erreur sur le dessin : l'eau et le diazote doivent circuler en sens inverse.

B.) Diagramme enthalpique du diazote

□ 4-

C'est la température qui se conserve le long de la courbe \mathcal{E}_1 . Et elle vaut -100°C .

À basse pression, puisqu'on est dans le domaine gazeux, on doit retrouver le comportement du gaz parfait (basse pression donc faible interaction entre les molécules du gaz),

avec $h = \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)} T$. Donc à $T = Cte$, on doit avoir $h = Cte'$, ce qui correspond à une asymptote verticale dans le plan (P, h) .

□ 5 –

C'est l'entropie massique s qui se conserve le long de la courbe \mathcal{C}_2 , qui s'appelle donc une isentrope. D'après l'identité thermodynamique $dh = Tds + vdp$, $ds = 0$ entraîne $dp = \frac{1}{v} dh$. Or, un volume massique v est toujours positif, donc sur une isentrope, P est fonction croissante de h .

□ 6 –

La courbe \mathcal{C}_3 semble être à la fois la courbe d'ébullition et la courbe de rosée. On y trouve le liquide saturant à gauche du point O (ébullition), et la vapeur saturante à droite de O (rosée). Et le point critique au sommet, c'est-à-dire au point de rencontre de l'ébullition et de la rosée.

□ 7 –

Le long de la courbe \mathcal{C}_4 , c'est la fraction massique x de liquide qui se conserve, et elle vaut $x = 0,1$.
En M , on a 10% en masse de $N_2(\text{liq})$ et 90% en masse de $N_2(\text{g})$.

La température est de -200°C , et la pression de 0,60 bar (attention à la lecture de l'échelle verticale, logarithmique)

I.C.) Dimensionnement de l'échangeur (E)

□ 8 –

Pour exprimer h_C en fonction de x et des enthalpies massiques du diazote liquide et gazeux, notées h_{liq} et h_{vap} , on utilise par exemple le théorème des moments chimiques : $h_C = x h_{liq} + (1-x)h_{vap}$.

□ 9 –

Puisque l'on est en régime stationnaire dans le réservoir, les masses de diazote liquide et de diazote gazeux y sont constantes, donc il faut que les proportions de gaz et de liquide qui sortent soient les mêmes que celles qui entrent.

Pour le liquide, il y a un débit D_m qui sort sur la gauche. Il doit être égal au débit liquide entrant :

$$D_m = xD$$

Pour la gaz, le débit sortant par le haut est D' . Il doit être égal au débit gazeux rentrant :

$$D' = (1-x)D.$$

On peut vérifier la cohérence de ces résultats : $D' + D_m = (1-x+x)D = D$, ce qui est conforme au bilan de débits qui apparaît en haut à gauche du dessin de l'énoncé.

□ 10 –

Par un même raisonnement que pour la question 3), on a : $D'(h_E - h_D) = -D(h_B - h_A)$, avec $h_B = h_C$ puisque la vanne de détente (V) est isenthalpique, et avec $h_D = h_{vap}$ puisque c'est de la vapeur saturante qui repart du haut du réservoir, et elle est, en D , à la même pression et la même température qu'en C .

D'où $D'(h_E - h_{vap}) = D(h_A - h_C)$. Puis, avec 9) : $(1-x)(h_E - h_{vap}) = (h_A - h_C)$.

On réinjecte la relation de la question 8) : $(1-x)(h_E - h_{vap}) = h_A - xh_{liq} + (x-1)h_{vap}$, qui se simplifie en

$$(1-x)h_E = h_A - xh_{liq}, \text{ d'où } x = \frac{h_E - h_A}{h_E - h_{liq}}.$$

□ 11 –

On place le point A grâce à sa pression $p_A = 100$ bar et sa température $T_A = 300\text{K} = 27^\circ\text{C}$ (donc entre les isothermes 20 et 30, et plus près de la seconde que de la première). On en déduit, par lecture, $h_A \approx 498 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

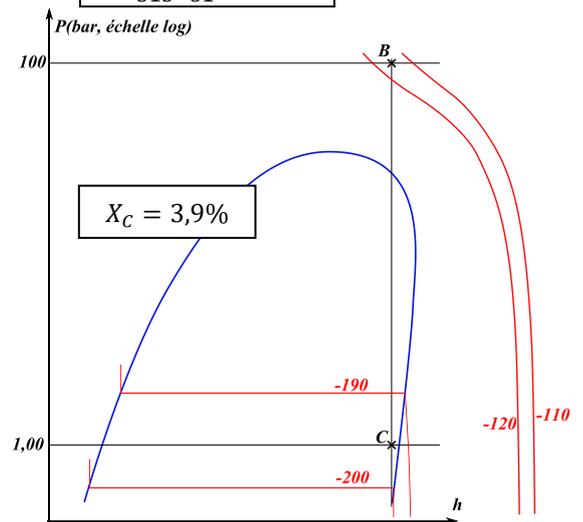
On place le point E grâce à sa pression $p_E = 1,00$ bar et sa température $T_E = 300\text{K} = 27^\circ\text{C}$ (donc sur la même isotherme que A). On en déduit, par lecture, $h_E \approx 515 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

De plus, pour une pression de 1,00 bar, on lit sur la courbe d'ébullition $h_{liq} \approx 81 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, et sur la courbe de rosée, $h_{vap} \approx 281 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Grâce à la formule établie en question 10), on en déduit $x \approx \frac{515-498}{515-81} = 3,9\%$.

En considérant que le diazote gazeux vérifie la loi des gaz parfaits, l'enthalpie massique ne dépendrait que de la température, donc avec $T_A = T_E$, on aurait $h_A = h_E$, d'où $x = 0$.

□ 12 –

Figure ci-contre, le point C étant placé grâce à sa pression ($p_C = 1,00 \text{ bar}$) et à la fraction massique en liquide $x = 0,039$. Le point B s'en déduit en montant verticalement ($h_B = h_C$, cf 10)) jusqu'à la pression $p_B = 100 \text{ bar}$. B se trouve entre les isothermes -120°C et -110°C . On peut estimer $T_B \approx -114^\circ\text{C}$. Le diazote est fluide supercritique en B.



□ 13 –

Avec les notations du 1), et en prenant le modèle réversible, la température de sortie d'un compresseur est $T_S = T_E r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$.

En appliquant le premier principe industriel au diazote gazeux entre l'entrée et la sortie d'un compresseur, on a donc un travail utile $w_{u1} = \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)} T_E \left(r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$.

Le débit massique dans les compresseurs est $D = \frac{D_m}{x}$. Ainsi, la puissance mécanique nécessaire au fonctionnement des N compresseurs est $\dot{\varphi} = N \frac{D_m}{x} \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)} T_E \left(r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$. Avec $N = 5$ et $r = 100^{\left(\frac{1}{5}\right)}$, on trouve $\dot{\varphi} = 0,36 \text{ MW}$.

Roue-vanne de Sagebien

A. — Etude dynamique du mouvement de la roue-vanne

□ 14 – $D_m = \rho D_v = \rho v S = \rho d h_0 v$.

Lorsqu'une pale tourne d'un angle élémentaire $d\beta$, elle entraîne un volume de valeur $\delta V = \frac{1}{2} d\beta \cdot d \cdot (R'^2 - R^2)$. Le fluide étant incompressible, donc en écoulement incompressible, on peut utiliser la conservation du débit volumique : $d h_0 v = \frac{\delta V}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\beta}{dt} \cdot d \cdot (R'^2 - R^2) = \frac{1}{2} \omega \cdot d \cdot (R'^2 - R^2)$, puis à $2h_0 v = \omega (R'^2 - R^2)$.

□ 15 – La vitesse moyenne est $v_{moy} = \frac{R+R'}{2} \omega$.

En égalisant avec la vitesse v de la question précédente, il vient $R' - R = h_0$.

A.N. $h_0 = \frac{D_m}{\rho v d} = 4,3 \text{ m}$; $R' = 15 \text{ m}$.

□ 16 – Dans un écoulement uniforme, stationnaire, homogène et incompressible, on peut utiliser l'uniformité de la pression motrice, ce qui revient à dire qu'on peut utiliser la loi de la statique des fluides (il suffit de changer de référentiel pour s'en convaincre); et puisque le fluide est incompressible, cela donne :

$$p_1(z) = p_0 - \rho g z \text{ et } p_2(z) = p_0 - \rho g (z + H).$$

□ 17 – Puisque les forces de pression sont identiques en norme de part et d'autre des pales inactives, leur résultante est nulle pour une telle pale (qui porte bien son nom), ou plutôt radiale, si on prend en compte le bout de pale, mais son moment par rapport à l'axe de rotation est nul.

La différence de pression entre les 2 faces de la pale active vaut $\Delta p = p_C - p_D = \rho g H$, indépendamment de z ; en négligeant l'angle α , réputé « faible » la résultante des forces de pression est donc $\vec{F} = (R' - R) d\rho g H \vec{u}_\theta$, ou encore $\vec{F} = h_0 d\rho g H \vec{u}_\theta$. Puisqu'elle est répartie de manière uniforme, elle s'applique au milieu de la pale.

Le moment de la force par rapport à un point de l'axe est donc

$$\vec{M} = \frac{R+R'}{2} \vec{u}_r \wedge \vec{F} = \frac{R'^2 - R^2}{2} d\rho g H \vec{e}_x = \left(R + \frac{h_0}{2} \right) h_0 d\rho g H \vec{e}_x.$$

□ 18 – Pour une pale on a une différence de pression $p_i - p_{i+1} = \frac{p_1 - p_2}{5} = \frac{\rho g H}{5}$. On obtient alors 5 forces orthoradiales de norme $\frac{\rho g H h_0 d}{5}$, ce qui finalement redonne le même moment que dans la question précédente.

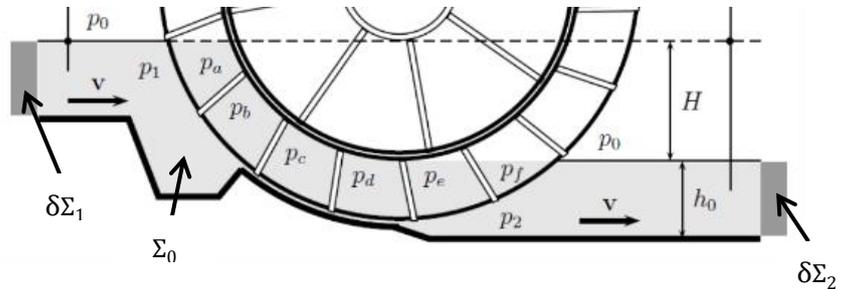
❑ 19 – $\Gamma = M = 2,3 \cdot 10^6 \text{ N.m}$.

❑ 20 – On prend une voiture courante, de puissance $\mathcal{P} = 70 \text{ hp}$, à une vitesse angulaire ω de rotation du moteur de l'ordre de $5 \cdot 10^3 \text{ tr} \cdot \text{mn}^{-1}$. Cela donne un couple de moment $\Gamma = \mathcal{P}/\omega \approx 10^2 \text{ N.m}$. C'est donc bien moins que celui trouvé pour la roue de Sagebien. Mais le fort couple de la roue de Sagebien est lié à la faible vitesse de rotation. Comme on le verra à la question 21, la puissance hydraulique de la roue n'est pas exceptionnelle.

B. — Bilans énergétiques de fonctionnement

❑ 21 – $\mathcal{P}_{\text{Sagebien}} = \Gamma\omega = \frac{R'^2 - R^2}{2} \omega d \rho g H = \boxed{\mathcal{P} h_0 d \rho g H} = \boxed{0,11 \text{ MW}}$. Cela représente la puissance d'une grosse voiture actuelle. Cette valeur assez importante s'explique par le débit d'eau : environ 3,6 tonnes par seconde !!

❑ 22 – On peut se ramener à un système fermé et effectuer un bilan d'énergie sur le système fermé Σ^* correspondant, à t , à $\Sigma_0 \cup \delta\Sigma_1$, et à $t + dt$, à $\Sigma_0 \cup \delta\Sigma_2$. Mais on peut écrire directement



$\mathcal{P}_{\text{eau} \rightarrow \text{roue}} = D_v(e_{mv1} - e_{mv2}) = D_v \rho g H$. d'où $\mathcal{P}_{\text{eau} \rightarrow \text{roue}} = \boxed{D_m g H}$.

❑ 23 – Le rendement énergétique de la roue est

$\eta = \frac{\Gamma\omega}{D_m g H}$. Ici, il est de 100% puisqu'on n'a pas pris en compte les défauts, à savoir : la viscosité de l'eau, les frottements sur l'axe, les fuites d'eau.

Lors de l'exposition universelle de 1900, on avait $D_m = \frac{0,81}{3600}$, en assimilant le diazote à de l'air, et en prenant en compte la densité du diazote liquide à 1 bar : $d=0,81$. La formule donne alors une puissance $\boxed{\mathcal{P}' \approx 3,7 \text{ hp}}$, soit 2,4 kW,

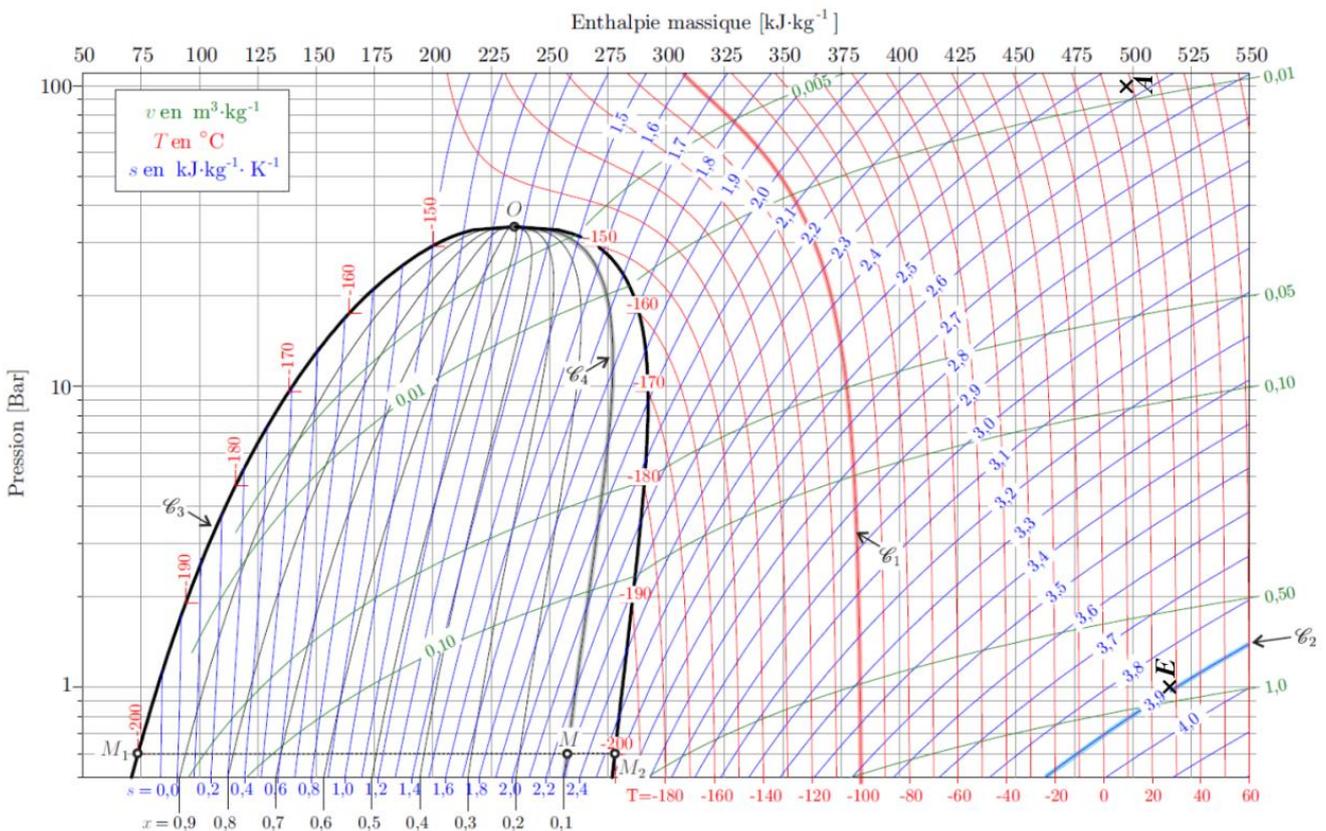


FIGURE 5 – Diagramme enthalpique du diazote

ce qui est bien du même ordre de grandeur que ce que donne le document. Notons que la précision dans la détermination de x est très moyenne.