

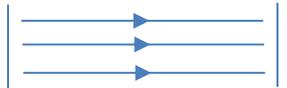
## PREMIÈRE PARTIE CAPTEUR de NIVEAU

### A/ Champ électrostatique

A1. A partir de la loi de Poisson, avec  $\rho=0$  entre les plaques, on obtient :  $\Delta V = 0$  soit ici :  $\frac{d^2V}{dx^2} = 0$

A2. On utilise les conditions aux limites en  $x = 0$  et  $x = e$ , ce qui donne :  $V(x) = \frac{V_2 - V_1}{e} x + V_1$ .

A3.  $\vec{E} = -\text{grad}(V(x)) = -\frac{V_2 - V_1}{e} \vec{e}_x$  Il est **uniforme**. Les lignes de champ sont des



droites perpendiculaires aux plaques, orientées dans le sens des  $x$  croissants.

A4. On a vu que  $\vec{E} = E\vec{e}_x$ . On applique le théorème de Gauss sur un cylindre d'axe (Ox), de surface de base S, l'un des deux disques contenant le point M d'abscisse  $x \in ]0, e[$ , l'autre étant à une abscisse négative (champ nul sur ce disque, extérieur au condensateur). On obtient :  $E.S = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$ , d'où  $\vec{E} = \frac{Q_1}{\epsilon_0 S} \vec{e}_x$ .

A5. Par définition, la capacité du condensateur vérifie  $Q_1 = C(V_1 - V_2)$  donc  $C_0 = \frac{S\epsilon_0}{e}$

### B/ Capacité du capteur

B1. Pour deux condensateurs en parallèle, la tension est commune donc  $Q_1 = C_1(V_1 - V_2)$  et  $Q_2 = C_2(V_1 - V_2)$ .

Le condensateur équivalent a donc une charge  $Q_1 + Q_2$

donc  $Q_{\text{eq}} = Q_1 + Q_2 = C_{\text{eq}}(V_1 - V_2) = C_1(V_1 - V_2) + C_2(V_1 - V_2)$  donc  $C_{\text{eq}} = C_1 + C_2$ .

On pouvait aussi utiliser d'autres méthodes : passer par la loi des nœuds, en écrivant chaque courant en fonction de la tension, passer par les règles d'association d'impédances, etc.

B2. Le condensateur complet est l'association en parallèle de deux condensateurs : l'un ayant la permittivité du

vide, l'autre du gazole.  $C(h) = \frac{hL\epsilon_0\epsilon_r}{e} + \frac{(H-h)L\epsilon_0}{e} = \frac{L\epsilon_0(h\epsilon_r + (H-h))}{e}$

B3. Les valeurs numériques (fin énoncé) donnent **effectivement**  $C(h) = 118 \times (1,00 + 4,00h)$ .

Quand la cuve est vide, on a  $h = 0$  donc  $C_{\text{min}} = 118 \text{ pF}$

et pour le cas plein, on a  $h = H$  donc  $C_{\text{max}} = 118 \times 5 \text{ pF} = 590 \text{ pF}$

### C/ Chaîne de mesure

C1. On impose  $T_0 < T$  car il faut **laisser le temps au système de revenir à l'état stable** avant l'arrivée d'une nouvelle impulsion d'horloge.

C2. Posons  $T_{0 \text{ min}} = 10 \mu\text{s}$ .

On veut que, pour tout  $h$ ,  $T_0 = R.C(h) > T_{0 \text{ min}}$ .

Cela sera vrai pour tout  $h$  si c'est vrai pour la valeur minimale de  $C$ , donc il faut  $R.C_{\text{min}} > T_{0 \text{ min}}$

$$R_{\text{min}} = \frac{T_{0 \text{ min}}}{C_{\text{min}}} = 84,7 \text{ k}\Omega$$

De plus, la condition  $T_0 < T$  conduit à  $RC(h) < T$ . Cela sera vrai pour tout  $h$  si c'est vrai pour la valeur maximale de  $C$ , donc il faut  $RC_{\text{max}} < T$  :

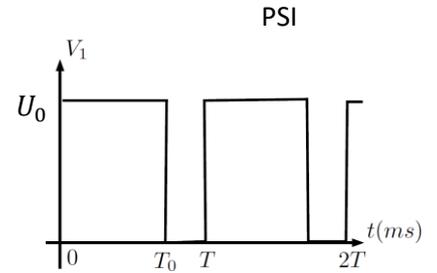
$$R_{\text{max}} = \frac{T}{C_{\text{max}}} = 3,39 \text{ M}\Omega$$

C3. On choisit  $R = 2,00 \text{ M}\Omega$ , ce qui impose que  $T_0$  varie entre  $RC_{\text{min}} = 236 \mu\text{s}$  et  $RC_{\text{max}} = 1,18 \text{ ms}$ .

LVH

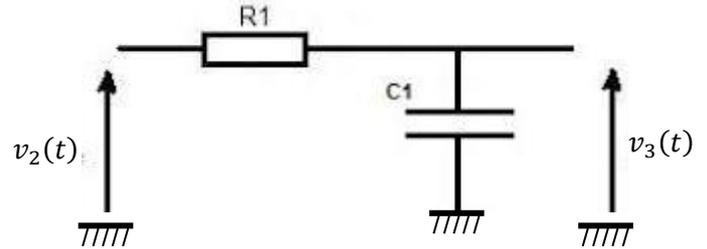
C4. On obtient un créneau de période T et de rapport cyclique a priori quelconque (cf dessin ci-contre).

C5. La valeur moyenne de  $v_2(t)$  est  $V_{2moy} = \frac{1}{T} \int_0^T v_2(t) dt = \frac{T_0}{T} U_0$ . Elle est comprise entre  $0,590 \text{ V}$  et  $2,95 \text{ V}$ .



C6. La moyenne d'un signal est sa composante continue : il faut un filtre passe-bas, donc ici de type RC (tension  $v_3$  aux bornes de  $C_1$ ).

Les fréquences non nulles présentes dans le signal (série de Fourier) sont des multiples de  $f=1/T$ . Il suffit donc de vérifier que la fréquence la plus basse,  $1/T$ , est très atténuée.



Imposons par exemple un facteur 100 entre la fréquence

de coupure à -3dB et la fréquence du fondamental :  $f_c = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} < \frac{1}{100T}$  soit  $C_1 > \frac{100T}{2\pi R_1} = 145 \text{ nF}$ .

Pour mémoire, la fonction de transfert de ce filtre en régime harmonique est  $\frac{v_3}{v_2} = \frac{1}{1+jR_1 C_1 \omega}$ .

C7. En toute rigueur, le pas de quantification q du CAN est  $q = \frac{5,00}{2^8 - 1} = \frac{5}{255} = 19,6 \text{ mV}$ . C'est  $2^8 - 1$  et non  $2^8$  à cause des histoires classiques de piquets et d'intervalles. Il y a  $2^8$  valeurs possibles ( $2^8$  piquets), mais seulement  $2^8 - 1$  intervalles, un quantum étant un intervalle.

C8. Attention, on ne peut pas dire que  $\Delta h = \frac{H}{2^8 - 1}$  car on nous dit que le codage en binaire est prévu pour couvrir la plage de tensions allant de 0,00 V à 5,00 V mais quand la hauteur de gazole varie de 0 à H, la tension varie seulement de 0,590 V à 2,95 V (cf C5).

On a  $V_{2moy} = \frac{U_0}{T} R \frac{\epsilon_0 L}{e} (H + h(\epsilon_r - 1)) = 118.10^{-12} \times \frac{U_0}{T} R (1,00 + 4,00 h)$ .

Pour une valeur  $h_1$  de h, on a  $V_{2moy1} = \frac{U_0}{T} R \frac{\epsilon_0 L}{e} (H + h_1(\epsilon_r - 1))$

Pour une valeur  $h_2 = h_1 + \Delta h$  de h, on a  $V_{2moy2} = \frac{U_0}{T} R \frac{\epsilon_0 L}{e} (H + (h_1 + \Delta h)(\epsilon_r - 1))$

$$q = V_{2moy2} - V_{2moy1} = \frac{U_0}{T} R \frac{\epsilon_0 L}{e} \Delta h (\epsilon_r - 1)$$

Donc la petite variation  $\Delta h$  de h engendrée par la petite variation q de  $V_{2moy}$  est

$$\Delta h = \frac{q T e}{U_0 R \epsilon_0 L (\epsilon_r - 1)} = \frac{q T}{4,00 \times 118.10^{-12} \times U_0 R} = 8,31 \text{ mm}$$

C9.  $N = \frac{V_{2moy}}{q}$ . En reprenant les valeurs de la question C5, on trouve  $N_{min} = 30$  et  $N_{max} = 150$ .

C10. L'amplitude du fondamental avant le filtre est  $\frac{2U_0}{\pi}$ . Après le filtre, elle vaut  $\frac{2U_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi R_1 C_1 / T)^2}}$

Pour éviter que l'affichage fluctue, il faut que la variation crête à crête du fondamental (donc deux fois l'amplitude) soit

inférieure au quantum q. Il vient donc  $C_1 > \frac{T \sqrt{\left(\frac{4U_0}{\pi q}\right)^2 - 1}}{2\pi R_1} = 470 \text{ nF}$ .

<b>DEUXIEME PARTIE      VIDANGE de la CITERNE</b>
---

**D/ Ecoulement parfait**

**D1.** Les conditions pour appliquer la relation de Bernoulli (**généreusement donnée**) sont :

Ecoulement parfait, stationnaire (ici, c'est plutôt quasi-stationnaire), incompressible et homogène, A et B doivent être sur une même ligne de courant. On peut ajouter qu'il ne faut pas qu'il y ait de pièce mécanique mobile (type pompe ou turbine), et il faut que les forces volumiques se limitent aux forces de pesanteur, et enfin que le référentiel soit galiléen.

**D2.** Le gazole est supposé ici être un fluide incompressible (on nous parle de « sa » masse volumique  $\rho$ ), donc il est en écoulement incompressible : il y a conservation du volumique le long d'un tube de courant  $D_{VA} = D_{VB}$  donc en utilisant les vitesses débitantes :

$$V_A S_A = V_B S_B$$

**D3.** Si  $S_A \gg S_B$  on a  $V_A \ll V_B$ . Avec  $P_A = P_B = P_0$ , la relation de Bernoulli donne (Torricelli) :  $V_B = \sqrt{2gh}$

**D4**  $V_B = V_A \frac{S_A}{S_B}$  or  $V_A = -\frac{dh}{dt} \Rightarrow \sqrt{2gh} = -\frac{dh}{dt} \frac{S_A}{S_B}$ . En séparant les variables et en intégrant entre 0 et T, on

obtient :  $T = \frac{S_A}{S_B} \sqrt{\frac{2H}{g}}$  soit avec H = 1,00 m :  $T = 452 \text{ s} = 7 \text{ min } 32 \text{ s}$

**E/ Prise en compte d'une perte de charge singulière**

**E1.** En négligeant toujours  $V_A$ , on obtient :  $\frac{1}{2}\rho V_B^2 - \rho gh + 0 = -\frac{1}{2}K_C \rho V_B^2$

puis  $V_B = \sqrt{\frac{2gh}{1+K_C}}$ . Autrement dit, il faut remplacer  $g$  par  $\frac{g}{1+K_C}$

**E2.** Idem D4 :  $T' = \sqrt{1+K_C} \cdot T = 562 \text{ s} = 9 \text{ min } 22 \text{ s}$  . Pertes de charges non négligeables.

**F/ Prise en compte d'une perte de charge régulière**

**F1.** Bilan de quantité de mouvement pour le {cylindre}. D'une part, on est en régime stationnaire, d'autre part, le champ des vitesses est de la forme  $\vec{v} = v(r) \vec{e}_z$  donc chaque particule de fluide composant le système se déplace parallèlement à l'axe Oz donc traverse des régions où le champ des vitesses est toujours le même. Donc la quantité

de mouvement du système ne change pas au cours du temps :  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$ . De plus, le théorème de la résultante

dynamique appliqué au système dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen, s'écrit :  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$ , d'où

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$  Les forces sont rappelées dans l'énoncé : forces pressantes en C<sub>1</sub> et C<sub>2</sub> (les forces pressantes latérales s'annulent par symétrie), le poids et les forces visqueuses, soit en projection sur (Oz):

$$p_{C1}\pi r^2 - p_{C2}\pi r^2 - \rho g(z_{C2} - z_{C1})\pi r^2 + \eta \frac{dV}{dr} 2\pi r \ell = 0, \text{ d'où la relation de l'énoncé}$$

$$\frac{dV}{dr} = -\alpha (\tilde{p}_{C_1} - \tilde{p}_{C_2}) r \quad \text{avec : } \boxed{\alpha = \frac{1}{2\eta\ell}}.$$

Supposons  $V(r) > 0$ , il faut alors  $\tilde{p}_{C_1} > \tilde{p}_{C_2}$  pour que le fluide s'écoule de 1 vers 2.

Si  $\alpha > 0$ , la vitesse décroît quand  $r$  augmente, elle est maximale au centre ( $r=0$ ) et nulle en  $r=a$ , par adhérence aux parois. Le signe de  $\alpha$  est donc cohérent.

**F2.** Le terme  $\alpha (\tilde{p}_{C_1} - \tilde{p}_{C_2})$  ne dépend pas de  $r$ . En intégrant l'équation de la question précédente et en utilisant la condition liée à l'adhérence du fluide visqueux  $V(a) = 0$ , on obtient :

$$V(r) = \frac{\alpha (\tilde{p}_{C_1} - \tilde{p}_{C_2}) a^2}{2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right),$$

$$\text{d'où } \boxed{V_{max} = \frac{\alpha (\tilde{p}_{C_1} - \tilde{p}_{C_2}) a^2}{2}}.$$

$$\text{F3. } Q_V = \iint_S V(r) \cdot dS = \int_0^a V(r) \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi a^2}{2} V_{max} \quad \text{soit } \boxed{Q_v = \frac{\pi \alpha (\tilde{p}_{C_1} - \tilde{p}_{C_2}) a^4}{4}}$$

$$\text{F4. Par définition } V_{moy} = \frac{Q_v}{\pi a^2} \quad \text{d'où } \boxed{V_{moy} = \frac{\alpha (\tilde{p}_{C_1} - \tilde{p}_{C_2}) a^2}{4}}$$

**F5.** En utilisant la question précédente pour exprimer la perte de charge, on a :

$$\Delta p_r = \frac{4V_{moy}}{\alpha a^2} = \frac{8\eta\ell V_{moy}}{a^2} = \lambda \frac{1}{2} \rho V_{moy}^2 \frac{\ell}{2a} \quad \text{d'après l'énoncé soit } \boxed{\lambda = \frac{32\eta}{a\rho V_{moy}}}$$

$$\text{F6. } R_e = \frac{\rho V_{moy} d}{\eta} = \frac{2\rho V_{moy} a}{\eta} \quad \text{d'où } \boxed{\lambda = \frac{64}{R_e}}$$

$$\text{F7. } \boxed{R_e = 27 \cdot 10^3}$$

**F8.**  $R_e > 2 \cdot 10^3$ , l'écoulement est donc turbulent, hypothèse laminaire non valide.

### G/Remplissage du réservoir d'une voiture

$$\text{G1. } K_{total} = K_C(\text{voir partie E}) + 2K_{Coude brusque} + K_{pompe} + K_{coude arrondi} = 0,55 + 2 \cdot 3/2 + 6 + 0,091 = \boxed{9,6}$$

$$\text{G2. } \Delta p_{s,tot} = K_{tot} \frac{1}{2} \rho V_{moy}^2 = \boxed{82 \cdot 10^3 \text{ Pa}} = 0,82 \text{ bar}$$

$$\text{G3. } \Delta p_{r,tot} = \lambda \frac{1}{2} \rho V_{moy}^2 \frac{\ell}{2a} = \boxed{58 \cdot 10^3 \text{ Pa}} = 0,58 \text{ bar}$$

**G4.** La section  $S_B = \pi a^2$  est la même dans tout le circuit, la vitesse moyenne également (fluide incompressible).

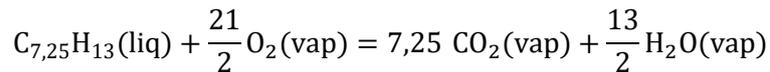
Le débit est donc :  $Q_V = V_{moy} \cdot S_B = 4,5 \cdot 10^{-3} m^3 / s$

**G5.** En reprenant la formule de l'énoncé, on a, avec  $V_E = V_{moy}$  et  $V_A \ll V_E$  :

$$P_e = \frac{P_u}{r} = \frac{Q_V}{r} \left( \frac{1}{2} \rho (V_E^2 - 0^2) + \rho g (z_E - z_A) + 0 + \Delta p_{r,tot} + \Delta p_{s,tot} \right) = \boxed{1,1 kW}$$

## H / Etude de la combustion complète du gazole

**H1.** D'après le Doc. 1, le gazole est assimilé à  $C_{7,25}H_{13}$ , d'où



*NB : l'état physique de l'eau est déduit du Document 1 et des données thermodynamiques fournies.*

Vérifions grâce à un tableau d'avancement les masses de réactifs et de produits données dans le Document 1.

mol	$C_{7,25}H_{13}(liq)$	$+\frac{21}{2} O_2(vap)$	$= 7,25 CO_2(vap)$	$+\frac{13}{2} H_2O(vap)$	$n_{N_2}$
t = 0	$n_0$	$n_{O_2}$	0	0	$n_{N_2}$
t	$n_0 - \xi$	$n_{O_2} - \frac{21}{2} \cdot \xi$	$7,25 \cdot \xi$	$\frac{13}{2} \cdot \xi$	$n_{N_2}$

On note que  $M_{gazole} = 7,25 \times 12 + 13 = 100 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

Pour réaliser la combustion totale de  $m=1 \text{ kg}$  de carburant, soit  $n_0 = \frac{m}{M_{C_{7,25}H_{13}}} = 10 \text{ mol}$  de gazole, la quantité de  $O_2$

nécessaire est  $n_{O_2} = \frac{21}{2} n_0 = 105 \text{ mol}$ . D'après l'énoncé, la quantité de  $N_2$  associée vaut  $n_{N_2} = 3,7 \cdot n_{O_2} = 388,5 \text{ mol}$ .

La réaction produit :  $n_{CO_2} = 7,25 \cdot n_0 = 72,5 \text{ mol}$  de  $CO_2$  et  $n_{H_2O} = \frac{13}{2} n_0 = 65 \text{ mol}$  de  $H_2O$ .

$$m_{O_2} = 105 \times 0,032 = 3,4 \text{ kg} ; m_{N_2} = 388,5 \times 0,028 = 10,9 \text{ kg (donc 14,3 kg d'air)} ; m_{CO_2} = 72,5 \times 0,044 = 3,2 \text{ kg} ;$$

$$m_{H_2O} = 65 \times 0,018 = 1,2 \text{ kg}. \text{ Ces valeurs sont en accord avec le texte.}$$

**H2.** D'après le Document 2, la voiture consomme  $V_{gazole} = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ L}$  de gazole par km, soit une masse de gazole  $m_{gazole} = \rho_{gazole} V_{gazole} = 3,78 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$  de gazole par km (la masse volumique est fournie dans le Document 1 ligne

21). La combustion du gazole entraîne donc la formation de  $m_{CO_2} = 7,25 m_{gazole} \frac{M_{CO_2}}{M_{gazole}} = 121 \text{ g/km}$ . C'est cohérent.

**H3.** L'oxygène O est réduit (le n.o. de O passe de 0 dans  $O_2$  à  $-II$  dans  $CO_2$  et  $H_2O$ ), le carbone C est oxydé : son nombre d'oxydation passe de  $-\frac{13}{7,25}$  à  $+4$ .

**H4.** D'après la loi de Hess :

$$\Delta_r H^\circ = 7,25 \Delta_f H^\circ(CO_2(vap)) + \frac{13}{2} \Delta_f H^\circ(H_2O(vap)) - \Delta_f H^\circ(C_{7,25}H_{13}(liq)) - \frac{21}{2} \Delta_f H^\circ(O_2(vap))$$

$$\Delta_r H^\circ = 245 - 7,25 \times 393 - 13 \times 121 = -4,18 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ (réaction exothermique).}$$

L'énergie libérée lors de la combustion (à  $P$  et  $T$  constantes) d'1 kg de gazole vaut :

$$Q_p = -n_0 \times \Delta_r H^\circ = 41,8 \cdot 10^3 \text{ kJ} \approx 42 \text{ MJ.}$$

La combustion d'1 litre de gazole libère

$$\Delta H = 41,8 \cdot 10^3 \times 0,840 \approx 35 \text{ MJ.}$$

Cohérent avec lignes 18 à 22.

**H5.** Température maximale atteinte par le système en évolution adiabatique et isobare.  $Q_p = \Delta H = 0$

(1) Transformation à  $T$  constante :

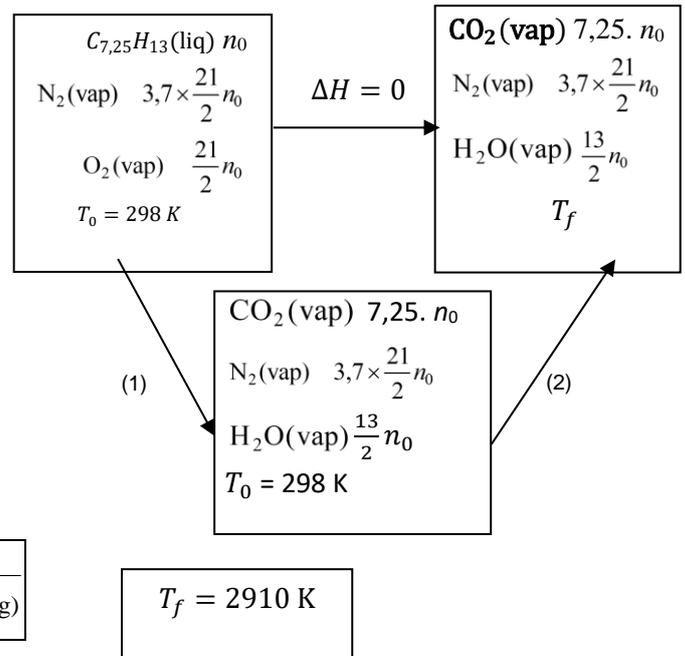
$$\Delta H_1 = n_0 \times \Delta_r H^\circ$$

(2) Élévation de  $T$  à composition constante :

$$\Delta H_2 = (T_f - T_0) n_0 (7,25 \cdot C_{pm}^\circ(\text{CO}_2, \text{g})$$

$$+ \frac{13}{2} C_{pm}^\circ(\text{H}_2\text{O}, \text{g}) + 3,7 \times \frac{21}{2} C_{pm}^\circ(\text{N}_2, \text{g}))$$

$$T_f = T_0 - \frac{\Delta_r H^\circ}{7,25 \cdot C_{pm}^\circ(\text{CO}_2, \text{g}) + \frac{13}{2} C_{pm}^\circ(\text{H}_2\text{O}, \text{g}) + 3,7 \times \frac{21}{2} C_{pm}^\circ(\text{N}_2, \text{g})}$$



**H6.** La température de flamme est en réalité plus faible, car :

- \* Les proportions initiales des réactifs sont différentes de la stœchiométrie « parfaite » (voir Document 1)
- \* il y a des pertes thermiques (hypothèse sur l'adiabaticité du système non vérifiée)
- \* Il y a des décompositions des produits de combustion à haute température (dissociations thermiques), souvent endothermiques.