Rappel sur l'action d'un système linéaire, dont on connait la fonction de transfert en régime harmonique :

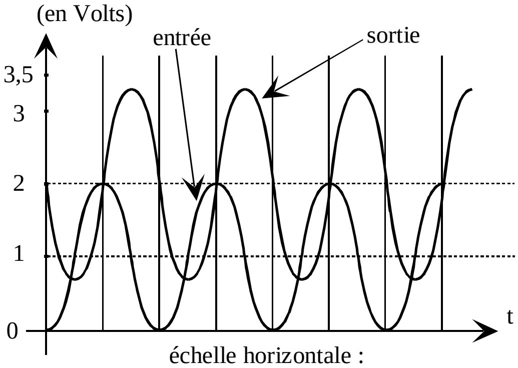
Si $v_e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$,

$v_s(t) = a_0 \times \underline{H}(j \times 0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \times |\underline{H}(j\omega_n)| \cos\left(\omega_n t + \varphi_n + \arg\left(\underline{H}(j\omega_n)\right)\right)$

Et le module $\underline{H}(j\omega_n)$ et l'argument $\arg\left(\underline{H}(j\omega_n)\right)$ sont à calculer pour chacune des pulsations ω_n présentes dans la décomposition du signal d'entrée en sinusoïdes (cad sa décomposition « harmonique »).

Eq03.1

Soit la fonction de transfert suivante : $\underline{H}(j\omega) = \frac{G}{1+2\zeta j\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$.



échelle horizontale : 1ms/div.

1°) Cette fonction de transfert correspond à celle d'un filtre passe-bas d'ordre 2. En effet, elle est écrite ici sous sa forme canonique bien connue. Et on voit bien que le module de la fonction de transfert est fini pour $\omega = 0$, et tend vers 0 pour $\omega \to \infty$.

2°) On impose en entrée du filtre le signal repéré ci-contre (celui du bas), et on récupère en sortie l'autre signal du dessin (celui du haut)

Le signal d'entrée est ici de la forme $v_e(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$,

avec $a_0 = 1{,}0$ V et $a_1 = 1{,}0$ V et $\omega_1 = 2\pi f_1$ avec $f_1 = 0{,}50$ kHz.

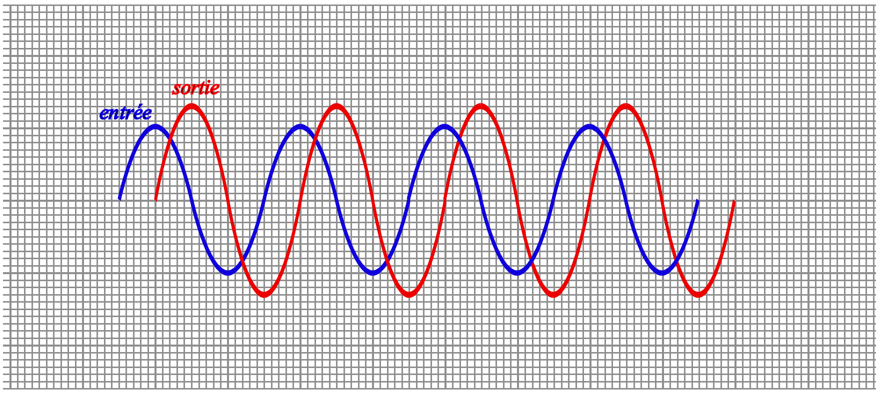
La composante continue passe de a_0 =1,0 V en entrée à $a_0 \times \underline{H}(j \times 0) =$ 2,0 V en sortie

Donc $\underline{H}(j \times 0) =$ 2,0 , d'où $\boxed{G = 2{,}0}$.

De plus, l'unique sinusoïde présente dans le signal d'entrée (de fréquence f_1) a son amplitude d'entrée $a_1 = 1{,}0$ V qui devient $a_1 \times |\underline{H}(j\omega_1)| \simeq 1{,}3$ V. Mais $|\underline{H}(j\omega_1)|$ fait intervenir à la fois ω_0 et ζ, donc il nous faut une autre équation.

Regardons le déphasage entre l'entrée et la sortie, autre source d'information :

Pour clarifier les choses, redessinons uniquement la partie sinusoïdale des signaux d'entrée et de sortie (c'est-à-dire retirons les composantes continues, comme on pourrait le faire sur un oscilloscope, en passant en mode AC) :



1,0 ms par carreau

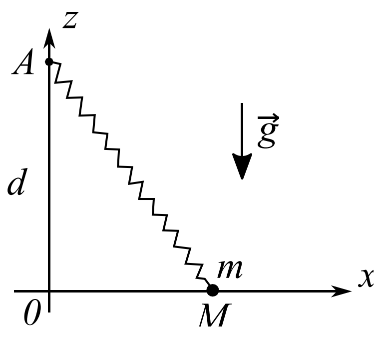
La sortie est en retard (plus à droite) d'un demi carreau. Or, 1 période, c'est-à-dire 2π, représente ici 2 carreaux. Donc la sortie est déphasée par rapport à l'entrée de $-\frac{\pi}{2}$. Cela signifie qu'à la fréquence à laquelle se trouve la composante sinusoïdale du signal d'entrée, $\underline{H}(j\omega)$ est un imaginaire pur (et même j multiplié par un réel négatif).

Donc, à cette fréquence, le dénominateur doit être imaginaire pur, d'où $1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 = 0$, puis $\omega_1 = \omega_0$.

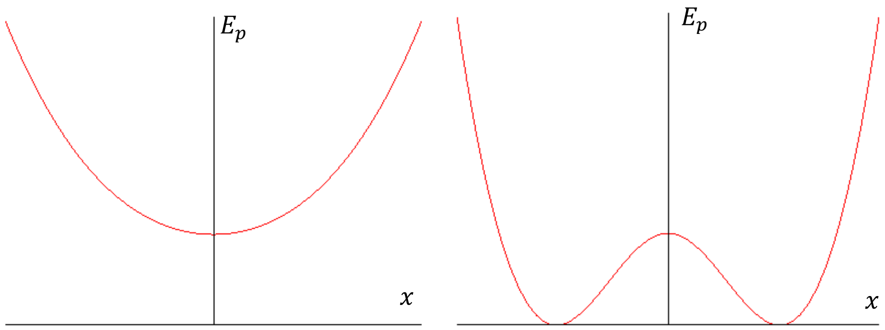
Or l'échelle horizontale donne $T_1 = 2{,}0$ ms, donc $\boxed{\omega_0 = \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 3{,}1.10^3 \mathrm{rad.s^{-1}}}$.

Pour finir, on utilise le module de la fonction de transfert : à la pulsation ω_1, $|\underline{H}(j\omega_1)| = \frac{G}{|2j\zeta|} = \frac{G}{2\zeta}$.
Ainsi, $\frac{G}{2\zeta} = \frac{1,3}{1,0} = 1,3$ puis $\boxed{\zeta = \frac{1}{1,3} = 0,77}$.

MC09.3 Soit un ressort sans masse de longueur à vide L_0 et de raideur k.
Une de ses extrémités est fixée en un point A de l'axe Oz, à une distance d de O. A est immobile.
1°) Exprimer les forces qui agissent sur la masse m, assujettie à se déplacer, sans frottements, sur l'axe Ox.
2°) Montrer que les forces, soit ne travaillent pas, soit dérivent d'une énergie potentielle.



On donne : $E_{p\,el}(x) = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+d^2} - L_0\right)^2$.
3°) Exprimer l'énergie mécanique. Se conserve-t-elle ?
4°) Déterminer les positions d'équilibre selon que $d < L_0$ ou $d \geq L_0$.
5°) On donne les deux profils suivants d'énergie potentielle. Lequel correspond à $d < L_0$? et à $d \geq L_0$?
6°) On lâche la masse m à la position $x_0 > 0$. Que se passe-t-il dans le cas $d < L_0$? et dans le cas $d \geq L_0$?
Discuter selon la valeur de x_0.



1°) Il y a trois forces qui agissent sur la masse m :

- Son poids $m\,\vec{g}$, vertical descendant ;
- La force d'élasticité du ressort, parallèle à $\overrightarrow{AB}$;
- L'action de la tige horizontale, qui est verticale aussi puisqu'il y a glissement sans frottements.

2°) Le poids ne travaille pas car le mouvement est horizontal.
L'action de la tige non plus, pour les mêmes raisons.
Seule la force d'élasticité travaille, mais elle dérive d'une énergie potentielle.
3°) L'énergie mécanique est $E_m = E_c + E_p = E_c + E_{p\,p} + E_{p\,el}$.
Elle se conserve car les forces non conservatives (ici l'action du support) ne travaillent pas.
On remarque que, puisque le mouvement est horizontal, $E_{p\,p}$ reste constant.
Donc finalement, en posant $E'_m = E_c + E_{p\,el}$, E'_m se conserve au cours du mouvement.
Et $E'_m = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+d^2} - L_0\right)^2$.
4°) Les positions d'équilibre correspondent à $\frac{dE_{p\,el}}{dx} = 0$,
d'où $\frac{1}{2} \times k \times 2 \times \left(\sqrt{x^2+d^2} - L_0\right) \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+d^2}} = 0$,
puis $\left(\sqrt{x^2+d^2} - L_0\right) \times x = 0$.

Ou bien $x = 0$, ou bien $x^2 + d^2 = L_0^2$,
C'est-à-dire : ou bien $x = 0$, ou bien $x^2 = L_0^2 - d^2$.
Cette dernière équation n'est possible que pour $d \leq L_0$.
En résumé,

- pour $d < L_0$, il y a 3 positions d'équilibre possibles : $x = 0$, $x = \sqrt{L_0^2 - d^2}$, $x = -\sqrt{L_0^2 - d^2}$.
- pour $d \geq L_0$, il y a 1 position d'équilibre possible : $x = 0$.
-

5°) Le profil de gauche ne fait apparaître qu'un seul point de tangente horizontale, donc une seule position d'équilibre. C'est donc le cas $d \geq L_0$.
Le profil de droite fait apparaître 3 points de tangente horizontale, donc 3 positions d'équilibre (dont deux de valeur opposée). C'est donc le cas $d < L_0$.

6°) Si on lâche la masse sans vitesse initiale, on a au démarrage $E_c = 0$, donc $E'_m = E_{p\,el}(x_0)$.
Et si x_0 ne correspond pas à une position d'équilibre, la masse bouge, donc E_c devient non nul, mais avec en permanence $E'_m = Cte = E_{p\,el}(x_0) = E_{p\,el}(x) + E_c(x)$.
Et puisque $E_c(x) \geq 0$, ceci n'est possible que pour les x vérifiant $E_{p\,el}(x_0) \geq E_{p\,el}(x)$.
Les dessins ci-dessous montrent, en vert, les plages de valeurs de x correspondant à différentes valeurs de x_0. Ce sont des plages s'étalant entre x_0 et x_1.