Rappel sur l'action d'un système linéaire, dont on connait la fonction de transfert en régime harmonique :

Si $v_e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$,

$v_s(t) = a_0 \times \underline{H}(j \times 0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \times |\underline{H}(j\omega_n)| \cos\left(\omega_n t + \varphi_n + \arg\left(\underline{H}(j\omega_n)\right)\right)$

Et le module $\underline{H}(j\omega_n)$ et l'argument $\arg\left(\underline{H}(j\omega_n)\right)$ sont à calculer pour chacune des pulsations ω_n présentes dans la décomposition du signal d'entrée en sinusoïdes (cad sa décomposition « harmonique »).

Eq20.1

1°) Soit la fonction de transfert suivante : $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$.

a) On reconnait la fonction de transfert d'un filtre $\boxed{\text{passe-bas d'ordre 1}}$. En effet, elle est écrite ici sous sa forme canonique bien connue. Et on voit bien que le module de la fonction de transfert est fini pour $\omega = 0$, et tend vers 0 pour $\omega \to \infty$.

b) Le signal d'entrée est ici de la forme $v_e(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$,

avec $a_0 = 1{,}0$ V et $a_1 = 1{,}0$ V et $\omega_1 = 2\pi f_1$ avec $f_1 = 1{,}0$ kHz.

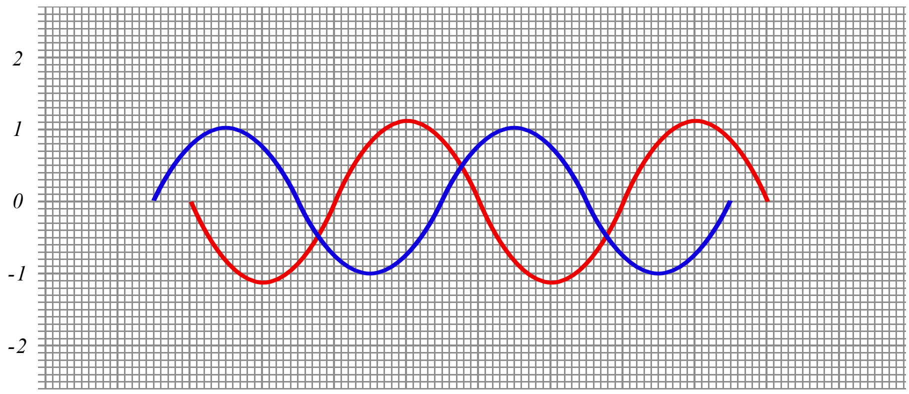
La composante continue passe de a_0 =1,0 V en entrée à $a_0 \times \underline{H}(j \times 0) = -1{,}5$ V en sortie

Donc $\underline{H}(j \times 0) = -1{,}5$, d'où $\boxed{H_0 = -1{,}5}$.

De plus, l'unique sinusoïde présente dans le signal d'entrée (de fréquence f_1) a son amplitude d'entrée $a_1 = 1{,}0$ V qui devient $a_1 \times |\underline{H}(j\omega_1)| \simeq 1{,}1$ V. Mais ceci ne permettra pas de déterminer ω_0 avec précision.

Il vaut mieux étudier le déphasage entre l'entrée et la sortie, autre source d'information :

Pour clarifier les choses, redessinons uniquement la partie sinusoïdale des signaux d'entrée et de sortie (c'est-à-dire retirons les composantes continues, comme on pourrait le faire sur un oscilloscope, en passant en mode AC) :



on voit qu'à la pulsation ω_1, le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée, correspond à 1,5 carreaux vers la gauche, ou bien 2,5 carreaux vers la droite. Or ici une période (donc 2π) s'étale sur 4 carreaux, donc 1,5 carreaux vers la gauche correspond à un déphasage de $+\frac{3\pi}{4}$, et 2,5 carreaux vers la droite correspond à un déphasage de $-\frac{5\pi}{4}$.

Compte tenu que $H_0 = -1{,}5$ donc est négatif, pour le filtre passe-bas d'ordre 1 qu'on étudie ici, le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée (c'est-à-dire l'argument de la fonction de transfert) varie de $-\pi$ (pour $\omega = 0$) à $-\frac{3\pi}{2}$ (pour $\omega \to \infty$).

En effet, $\arg(H_0) = -\pi$,

et $\arg(H_0) - \arg(1 + j \times \infty) = \arg(H_0) - \arg(j) = -\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$.

Essayons de voir comment est positionnée la pulsation ω_1 du signal par rapport à la pulsation ω_0, qui est une caractéristique du filtre étudié :

À la pulsation ω_0, $\underline{H}(j\omega_0) = \frac{H_0}{1+j}$ donc $\arg(\underline{H}) = \arg(H_0) - \arg(1+j) = -\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$.

Et bien c'est donc précisément la valeur du déphasage lu sur le dessin : il se trouve que $\omega_1 = \omega_0$.

D'où $\boxed{\omega_0 = 2\pi f_1 \quad = 6{,}3.10^3 \text{ rad. s}^{-1}}$.

On peut vérifier (non indispensable) qu'à la pulsation ω_0, $\underline{H}(j\omega_0) = \frac{H_0}{1+j}$ donc $|\underline{H}(j\omega_0)| = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}5}{1{,}4} \simeq 1{,}1$

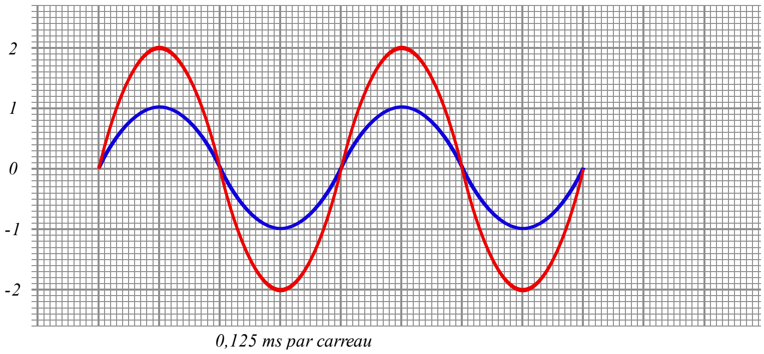
Ce qui est en accord avec le dessin puisque le rapport des amplitudes est $\frac{1{,}1}{1{,}0} = 1{,}1$.

2°)

a) La fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ est celle d'un filtre passe-bande : on voit bien que quand ω tend vers 0 ou $+\infty$, $|\underline{H}|$ tend vers 0.

On voit sur le dessin de la première expérience que la sortie n'a pas de composante continue, ce qui est normal car un passe-bande supprime les composantes continues.

Là encore, pour clarifier, on peut (pour éviter d'avoir à le faire mentalement) refaire le dessin en enlevant les composantes continues :



On voit que les parties sinusoïdales de l'entrée et de la sortie sont en phase. Donc la fréquence de ces sinusoïdes est nécessairement la fréquence centrale du filtre passe-bande. Il n'y a que pour cette fréquence que l'entrée et la sortie sont en phase.

En effet, $\arg(\underline{H}) = \arg(H_0) - \arg\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$,

et $\arg\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

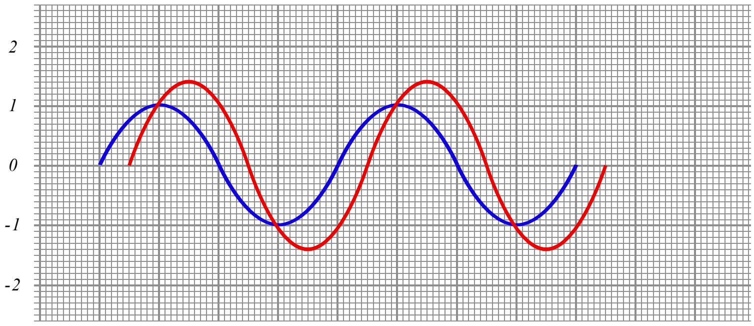
tandis que $\arg(H_0) = 0$ si $H_0 > 0$, et $\arg(H_0) = -\pi$ si $H_0 < 0$.

Donc ici, forcément, $H_0 > 0$, et $\omega = \omega_0$, donc $\arg(\underline{H}) = 0 - \arg(1 + j \times 0)$

Ainsi, pour le premier dessin, $\omega_1 = \omega_0$. Or, on lit une période de 0,50 ms donc $f_1 = 2{,}0$ kHz, d'où $\boxed{\omega_0 = 2\pi f_1 \quad = 13.10^3 \text{ rad. s}^{-1}}$.

Et le rapport des amplitudes, qui vaut $\frac{2{,}0}{1{,}0} = 2{,}0$ correspond à $|\underline{H}(j\omega_1)|$, donc à $|\underline{H}(j\omega_0)|$, c'est-à-dire à $\left|\frac{H_0}{1+j\times 0}\right|$, c'est-à-dire à $|H_0|$. Ainsi, $|H_0| = 2{,}0$. Et puisqu'on avait vu que $H_0 > 0$, on conclut que $\boxed{H_0 = 2{,}0}$.

Il ne manque plus que Q. Pour cela , étudions le second oscillogramme. Là encore, ôtons les composantes continues :



51,8 µs par carreau

On voit que la sortie est en peu en retard sur l'entrée, d'un demi carreau, ce qui fait ici un déphasage de $-\frac{\pi}{4}$.
Or, l'argument de la fonction de transfert est ici
$\arg(\underline{H}) = \arg(H_0) - \arg\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) = 0 - \arg\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$.
Pour que cela soit égal à $-\frac{\pi}{4}$, il faut que $jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = j$, c'est-à-dire $\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{Q}$.
Or, on sait (échelle horizontale) quelle est la fréquence des sinusoïdes bleue et rouge :la période vaut $4{,}0 \times 51{,}8\ \mu s$, donc $f = 4{,}8$ kHz. D'où $\frac{1}{Q} = \frac{4{,}8}{2{,}0} - \frac{2{,}0}{4{,}8} = 2{,}0$, puis $\boxed{Q = 0{,}50}$.
On vérifie la cohérence du tracé : le rapport des amplitudes des sinusoïdes devrait être $\frac{H_0}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = 1{,}4$. Et effectivement, la rouge est 1,4 fois plus grande que la bleue.