CCP PSI 2015 Ph Ch

1) L'air est composé principalement de diazote N_2 (environ 80% en moles) et de dioxygène O_2 (environ 20%).
$\boxed{M_{air} = 0{,}80\, M_{N2} + 0{,}20\, M_{O2} = 29.10^{-3}\ \text{kg.mol}^{-1}}$.

2) La particule d'air de volume dτ située entre z et z+dz est à l'équilibre sous l'effet de son poids :
$\rho_{air}\, d\tau\, \vec{g}$ et des forces de pression : $-\overrightarrow{\text{grad}}\, P\ d\tau$, donc : $\boxed{-\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \rho_{air}\, \vec{g} = \vec{0}.}$ En projetant sur Oz, on abien : $\dfrac{dP}{dz} = -\rho_{air}\, g$

3) La loi des gaz parfaits donne : $P\, M_{air} = \rho_{air} RT$, avec ici $T = T_0$. En éliminant ρ_{air} avec la relation du **2) :**
$\dfrac{dP}{P} = -\dfrac{g\, M_{air}}{RT_0} dz$. Par intégration, avec $P=P_0$, pour z=0, il vient : $\boxed{P(z) = P_0 \exp(-z/H)}$ avec : $H = \dfrac{R\, T_0}{g\, M_{air}}$.

4) L'atmosphère a donc une épaisseur de l'ordre de H (ou de quelques H) avec $\boxed{H = 8{,}8\ \text{km}}$

5) **a)** On reprend la relation du **3)** mais en utilisant $T(z) = T_0 - \lambda z$ à la place de T_0.
On obtient : $\dfrac{dP}{P} = -\dfrac{g\, M_{air}}{R(T_0 - \lambda z)} dz$, qui s'intègre en : $\ln(P) = \dfrac{g\, M_{air}}{R\lambda} \ln(1 - \dfrac{\lambda z}{T_0}) + Cte$

Comme $P=P_0$, pour z=0, il vient : $Cte = \ln(P_0)$ et : $\boxed{P = P_0 \exp\left(\dfrac{g\, M_{air}}{R\lambda} \ln(1 - \dfrac{\lambda z}{T_0})\right) = P_0 \left(1 - \dfrac{\lambda z}{T_0}\right)^{\frac{g\, M_{air}}{R\lambda}}}$

b) On est bien embarrassé puisque λ n'est donné qu'avec 1 seul chiffre significatif. Je pense donc *avoir repéré ce qui me semble être une erreur d'énoncé ; je le signale sur ma copie et je prends pour les calculs 3 chiffres significatifs, pour toutes les données, en rajoutant des 0 à droite. J'exprime des pressions en hPa, dans l'esprit du tableau dans l'énoncé puisqu'il n'y a après que des 0. Pour les altitudes données, je trouve avec le modèle isotherme, respectivement comme pression en hPa :*
945 797 568 404 288 205.
Conclusion, $\boxed{\text{le modèle est valide jusqu'à environ 5 km d'altitude}}$ si on veut moins de 5% d'erreur.

6) Le modèle imposé est un peu curieux puisqu'on nous parle d'une colonne d'air en ascension verticale et en même temps en « équilibre mécanique ». Bref, suivons les instructions de la question …
Une particule d'air qui change d'altitude se comporte comme un gaz parfait en évolution adiabatique réversible, et obéit donc à la loi de Laplace : $T^{\gamma}\, P^{1-\gamma} = Cte$ ou bien sous forme différentielle : $\boxed{\gamma \dfrac{dT}{T} + (1-\gamma)\dfrac{dP}{P} = 0}$

En combinant avec $\boxed{\dfrac{dP}{P} = -\dfrac{g\, M_{air}}{RT_0} dz}$ on obtient (calcul non demandé mais facile) : $\left(\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\right)\dfrac{dT}{T} = -\dfrac{g\, M_{air}}{RT} dz$

$\Rightarrow \left(\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\right) dT = -\dfrac{g\, M_{air}}{R} dz$ qui s'intègre en : $T = T_0 \left[1 - \dfrac{z}{z_2}\right]$ avec : $z_2 = \left(\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\right)\dfrac{RT_0}{g\, M_{air}}$ AN : $z_2 = 31$ km

7) **a)** La formule précédente donne à z = 500 m une température de 295 K, soit 22°C.
Par **<u>interpolation</u>** (et non extrapolation comme le dit l'énoncé) linéaire entre les deux valeurs des données (cf fin d'énoncé) à 20°C et à 25°C, la pression de vapeur saturante vaut à 22°C : $\boxed{P_{sat} = 2672\ \text{Pa}}$.

b) Le tableau de la question **5)** donne à 500 m une pression totale de 94 500 Pa, ce qui correspond, si l'eau est supposée uniquement sous forme de vapeur, à une pression partielle d'eau vapeur (le mélange air-eau est assimilé à un mélange idéal de gaz parfaits de fraction molaire en eau $x_{eau} = 0{,}04$) :
$P_{eau} = x_{eau}\, P_{totale} = 0{,}04 \,.\, 94500 = \boxed{3780\ \text{Pa} > P_{sat}}$.
D'un point de vue thermodynamique, l'eau ne peut donc pas se trouver en phase vapeur à cette température et à cette pression (cela n'est possible que si $P_{eau} < P_{sat}$). À 500 m et en-dessous, l'eau devrait être liquide.

c) Si la liquéfaction n'a pas eu lieu pour $P_{eau} > P_{sat}$, c'est que l'équilibre thermodynamique n'est pas assuré. Le système est donc hors équilibre pour des raisons cinétiques (le changement d'état est trop lent et n'a pas pu se faire). Le système est métastable (vapeur sursaturée). L'énoncé voulait-il parler d'altitudes « légèrement inférieures » plutôt que « supérieures » ?
Dans le cas du retard au changement d'état liquide solide, on parle de $\boxed{\text{surfusion}}$.

8) **a)** La gouttelette subit la résultante des <u>forces de pression</u> (poussée d'Archimède), son <u>poids</u>, et la force de <u>frottement visqueux</u> : $\vec{f} = -6\pi\, \eta_{air}\, r\, \vec{v}$.

b) La poussée d'Archimède est ici négligeable devant le poids puisque $\boxed{\rho_{air} \simeq \frac{\rho_{eau}}{1000}}$.

c) La deuxième loi de Newton appliquée à la gouttelette donne, en notant V son volume :
$\rho_{eau} V \vec{g} - 6\pi\, \eta_{air}\, r\, \vec{v} = \rho_{eau} V \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ Il vient alors : $\boxed{\rho_{eau} \dfrac{4}{3}\pi r^3 \vec{g} - 6\pi\, \eta_{air}\, r\, \vec{v} = \rho_{eau} \dfrac{4}{3}\pi r^3 \dfrac{d\vec{v}}{dt}}$.

9) On obtient une vitesse limite lorsque $\frac{d\vec{v}}{dt}=0$, d'où $\boxed{\overrightarrow{v_{lim}} = \rho_{eau}\frac{2}{9}\frac{r^2}{\eta_{air}}\vec{g}}$ AN : $\boxed{v_{lim} = 1{,}2 \text{ cm/s}}$

10) La constante de temps de l'équation du **8c)** est l'ordre de grandeur du temps nécessaire pour atteindre v_{lim} . Elle vaut :
$\tau=\frac{2}{9}\frac{\rho_{eau}r^2}{\eta_{air}}$ AN : $\tau\approx 1{,}2\,\text{ms}$. Il faut donc $\boxed{\text{quelques ms}}$.

11) En faisant l'approximation que la vitesse limite est atteinte quasi-instantanément, le mouvement est rectiligne uniforme à la vitesse v_{lim} et sa durée vaut : $\boxed{\Delta t=\frac{z'}{v_{lim}}=1{,}65.10^5\text{ s}\approx 46\,\text{h}}$. (avec z'=2000 m). Très lent !!

12) La stabilité mécanique du nuage pourrait s'expliquer par la diffusion de particule ; on pourrait aussi prendre en compte le changement d'état de l'eau …

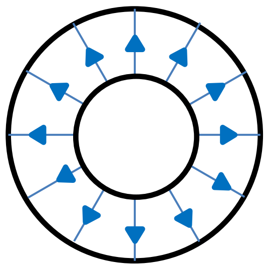
13) Pour M quelconque entre les armatures, $\boxed{\text{tout plan contenant M et O est un plan de symétrie de la distribution}}$ de charge, donc pour le champ électrique. Or M est dans ces plans, donc le champ électrique aussi. Par suite, il appartient à l'intersection de ces plans et est donc parallèle au vecteur $\overrightarrow{OM}$, c'est-à-dire suivant $\overrightarrow{e_r}$, premier vecteur de base des sphériques. Il s'écrit ainsi : $\vec{E} = E(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_r}$
Par ailleurs, il y a $\boxed{\text{invariance de la distribution de charges par rapport aux coordonnées } \theta \text{ et } \varphi}$, donc aussi du champ scalaire E (mais pas de $\vec{E}$!!!) : $\vec{E} = E(r)\overrightarrow{e_r}$

14) a) AAAARRRGGGGHHHH grosse erreur d'énoncé ! Ce n'est pas $\vec{E}(r)$ mais E(r). En effet, E ne dépend que de r mais $\vec{E}$ dépend à la fois de r, θ et φ, car $\vec{e}_r$ dépend de θ et φ.
On applique le théorème de Gauss à une sphère de rayon r et de centre O ($R_1 < r < R_2$). La charge intérieure est donc celle de l'armature intérieure, soit Q : $E(r).4\pi r^2 = Q/\varepsilon_0$ soit : $\boxed{\vec{E}(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}}$.

b) Il faut calculer la circulation du champ sur un chemin entre les armatures intérieure et extérieure de deux façons : $\int_1^2\vec{E}.\vec{dl}=\int_1^2 -\overrightarrow{\text{grad}}\,V.\vec{dl}=\int_1^2(-dV)=V_1-V_2$

et $\int_1^2\vec{E}.\vec{dl}=\int_1^2\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}.\vec{dl}=\int_1^2\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$. L'égalité donne : $\boxed{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=V_1-V_2}$.

c) Par définition de C : $Q=C(V_1-V_2)$; on déduit de **b)** : $\boxed{C=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1R_2}{R_2-R_1}}$



15) Si Q>0, le champ électrique est radial vers l'extérieur et crée un vecteur densité de courant dans le même sens :

16) On reprend la formule du **14 c)** avec R_1=6370 km, R_2=6370+80 km, ce qui donne : $\boxed{C=57\text{ mF}}$.

17) Normalement, il faut intégrer sur tout le volume de l'électrosphère la densité volumique d'énergie électrique $\frac{\epsilon_0 E^2}{2}$. Mais comme on nous demande juste un ordre de grandeur et, qu'en plus, le champ électrique varie peu entre R_1 et R_2, on peut se contenter de donner au champ électrique une valeur moyenne et multiplier la densité volumique d'énergie électrique par le volume de l'électrosphère : En prenant (cf préambule) E = 110 V/m (valeur moyenne par beau temps sensiblement constante dans l'électrosphère sur 80 km) on obtient :
$\boxed{\mathcal{E}_e \simeq \frac{\epsilon_0 E^2}{2}4\pi R_1^2(R_2-R_1) = 2\cdot 10^{12}\text{ J.}}$

On peut retrouver ce résultat par une autre méthode : $\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}C(R_2-R_1)^2E^2 = 2\cdot 10^{12}$J.

18) Par beau temps, il est radial vers l'intérieur (du + vers le – comme sur la figure 1 de l'énoncé), et par temps d'orage, presque partout de la terre vers le nuage (encore du + vers le – comme sur la figure 3).
$\boxed{\text{Donc ça change}}$.

19) **a)** $\boxed{\text{L'éclair correspond à un claquage diélectrique interne}}$ au nuage. Un coup de foudre concerne sans doute plutôt la Terre (même si le vocabulaire n'est pas toujours respecté).

b) Non : $\boxed{\text{la foudre peut descendre ou monter}}$, suivant le signe des charges mises en jeu au niveau de la terre lors de la décharge avec le nuage (cf figure 3). D'après cette figure, elle est plus souvent descendante.

20) Le champ vaut 20 kV/m sur une épaisseur de 2000 m entre terre et nuage, soit une différence de potentiel de : U = 20000. 2000 $\boxed{= 40 \text{ MV}}$.

21) La charge mise en jeu vaut environ (en supposant le courant constant) :
$Q \approx I.\Delta t = 50\,000.\ 10^{-2} = 500\ C$.

L'énergie véhiculée vaut alors : $\boxed{W = Q.U = 500.\ 40.10^{6} = 20\,GJ}$

Cette énergie ne mérite pas d'être récupérée. En effet, ce serait extrêmement compliqué (Elle ne tombe pas à des endroits prédéterminés, sauf si on installe un matériel de grande hauteur et donc coût), pour une énergie somme toute modeste (20 GJ est l'énergie délivrée par un réacteur nucléaire de 1 GW pendant 20 secondes).

22) **a) Notation énoncé mauvaise ! c désigne une capacité linéique et pourrait être confondu avec la célérité.** Loi des nœuds : $I(x,t) = I(x+dx,t) + c\,dx\dfrac{\partial V}{\partial t}$ qui donne : $\boxed{-\dfrac{\partial I}{\partial x} = c\dfrac{\partial V}{\partial t}}$

Loi des mailles : $V(x,t) = V(x+dx,t) + l dx\ \dfrac{\partial I}{\partial t}$ qui donne : $\boxed{-\dfrac{\partial V}{\partial x} = l\dfrac{\partial I}{\partial t}}$

b) On dérive la première équation par rapport à t, et la deuxième par rapport à x : $\boxed{\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} - lc\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0}$ qui est une équation de D'Alembert 1D scalaire. De même pour I en éliminant V : $\boxed{\dfrac{\partial^2 I}{\partial x^2} - lc\dfrac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0}$

23) **a)** Il peut donc se propager sur la ligne une onde de tension et une onde de courant à la vitesse de propagation :
$\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{lc}} = 2,6.10^{8}\ \text{m/s}}$ (de l'ordre de grandeur de la vitesse de la lumière dans le vide)

b) et c) Après Δt_0 =1 ms, ces ondes ont progressé de $\boxed{d = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{lc}} = 2,6.10^{5}\ \text{m} = 260\ \text{km}}$

24) Le système choisi est une portion de ligne de longueur ℓ parcouru par l'onde de courant.
Pendant la durée T du coup de foudre, la ligne est parcourue par un courant de l'ordre de I/2 (cf énoncé).
Ce courant échauffe la ligne par effet Joule, et celle-ci voit sa température augmenter.
<u>Hypothèses simplificatrices</u> : le courant reste du même ordre de grandeur pendant la durée Δt : on fait le calcul en continu, même s'il s'agit en fait d'une impulsion qui se propage. La résistance choisie pour le fil est donc celle d'un cylindre parcouru par un courant continu.
On néglige les échanges thermiques avec l'air, vue la brièveté de l'étude. Toute l'énergie dissipée par effet Joule sert donc à échauffer la ligne.

25) Pour calculer la résistance, il faut la conductivité du métal : $\gamma_{almelec}$
Les paramètres géométriques sont fixés : longueur ℓ considérée et section $S = \pi R^2$
Enfin, il faut la capacité thermique massique $c_{almelec}$ du métal pour calculer la variation d'enthalpie du système. Il faut aussi sa masse volumique $\rho_{almelec}$ pour connaître sa capacité thermique totale *via* sa masse m

26) Résistance de la portion de ligne : $R_0 = \frac{1}{\gamma_{almelec}}\frac{\ell}{\pi R^2}$. Le premier principe appliqué au système est, à pression constante, $\Delta H = Q$, d'où :
$\rho_{almelec}\pi R^2 \ell c_{almelec} dT = \frac{1}{\gamma_{almelec}}\frac{\ell}{\pi R^2}\left(\frac{I}{2}\right)^2 dt$, puis $\boxed{\Delta T_{foudre} = \frac{I^2}{4\rho_{almelec}\pi^2 R^4 c_{almelec}\gamma_{almelec}}\Delta t}$.

27) **a)** j est en $\boxed{A.m^{-2}}$.

b) I est le flux de $\vec{j}$ à travers une demi sphère de rayon $r>R_b$ sur laquelle j est uniforme :
$\boxed{j(r) = \dfrac{I}{2\pi r^2}}$.

28) **a)** La loi d'Ohm locale dans le sol : $\vec{j} = \gamma_{sol}\vec{E}$ donne le champ dans le sol : $\boxed{E(r) = \frac{j(r)}{\gamma_{sol}} = \frac{I}{\gamma_{sol}\,2\pi r^2}}$

.

b) $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$ projeté sur $\vec{e_r}$ donne : $E = -\frac{dV}{dr} = \frac{I}{\gamma_{sol}\,2\pi r^2}$ qui s'intègre, en tenant compte de V=0 à l'infini, en : $\boxed{V(r) = \frac{I}{\gamma_{sol}\,2\pi r}}$.

29) **a)** on se place à la limite de l'électrocution ; entre les deux pieds on trouve la différence de potentiel maximale supportable par la loi d'Ohm : $U_{max} = R_h I_{max}$. Par la question précédente, cette différence de potentielle vaut : $U_{max} = V(D) - V(D+a) = \frac{I}{\gamma_{sol}\,2\pi}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D+a}\right) = \frac{I}{\gamma_{sol}\,2\pi}\frac{a}{D(D+a)}$

D'oùt : $\boxed{R_h I_{max} = \frac{I}{\gamma_{sol}\,2\pi}\frac{a}{D(D+a)}}$

b) Pour D>>a : $D+a \approx D$ et $\boxed{D \approx \sqrt{\frac{I\,a}{R_h I_{max}\gamma_{sol}\,2\pi}}}$.

c) AN : $\boxed{D = 0{,}11\text{ km}}$.

d) Toutes choses égales par ailleurs, les grands animaux sont plus affectés car leurs pattes sont plus espacées, ce qui les expose à des différences de potentiel supérieures, pour des résistances assez peu différentes.

30) **a)** La couche comprise entre r et r+dr est assimilable à un cylindre de section S= $2\pi r^2$ et de longueur dr. Sa résistance est donc : $\boxed{dR_C = \frac{1}{\gamma}\frac{dr}{2\pi r^2}}$.

b) On en déduit en sommant les résistances en série pour former la coque hémisphériques :

$$\boxed{R_C = \int_{R_{int}}^{R_{ext}} dR_C = \frac{1}{2\pi\gamma}\int_{R_{int}}^{R_{ext}}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{R_{int}} - \frac{1}{R_{ext}}\right)}$$

31) **a)** Le courant traverse le métal et le sol : les deux résistances sont en série : $R_{glob} = R_{métal} + R_{sol}$.
Les deux se déduisent de la question précédente : $R_{glob} = \boxed{\frac{1}{2\pi\gamma_{mét}}\left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b}\right) + \frac{1}{2\pi\gamma_{sol}}\left(\frac{1}{R_b} - 0\right)}$.

b) AN : $\boxed{R_{glob} = 48\ \Omega}$.

c) La législation n'est pas respectée. Pour diminuer la résistance de terre, il faut surtout diminuer R_{sol} qui est le terme prédominant, ce qui se fait en augmentant R_b.