

Physique-Chimie 1 - Centrale Supélec 2016 PSI**I Pertes de charge dans les conduites**

I.A.1.a. Écoulement parfait : écoulement non visqueux et sans phénomènes diffusifs.

Écoulement homogène incompressible : la masse volumique est la même en tout point et à tout instant.

Stationnaire : indépendant du temps.

I.A.1.b. Le premier principe industriel de la thermodynamique s'écrit $\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = q + w_u$ entre deux points d'une ligne de courant. Avec un écoulement parfait, sans pièce mobile mécanique, il n'y a ni chaleur massique échangée q , ni travail massique « utile ».

En notant $e_c = \frac{1}{2}v^2$ l'énergie cinétique massique, $e_p = gz$ l'énergie potentielle massique de pesanteur, $h = u + \frac{P}{\rho}$

l'enthalpie massique avec u l'énergie interne massique, on obtient donc $\Delta \left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz \right) = 0$.

Compte tenu de l'hypothèse d'un fluide parfait, l'énergie interne massique ne varie pas. Avec de plus l'hypothèse de l'écoulement homogène incompressible, on passe aux grandeurs volumiques en multipliant par ρ et on en déduit la

relation de Bernoulli : l'énergie totale volumique du fluide $e_T = \rho gz + P + \frac{1}{2}\rho v^2$ est uniforme le long d'une ligne de

courant. En divisant par ρg , on obtient $H = \frac{e_T}{\rho g}$ uniforme le long d'une ligne de courant.

I.A.1.c. L'hypothèse d'un écoulement parfait ne peut être valide dans la couche limite, puisque c'est le lieu où les fluctuations spatiales du champ des vitesses sont importantes, donc les forces de viscosité aussi.

I.A.1.d. Dans le cas d'un écoulement permanent d'un fluide incompressible réel dans une conduite, e_T diminue le long de l'écoulement à cause du travail des forces de viscosité. Donc entre deux points A et B d'une ligne de courant, $e_T(B) - e_T(A) = \int_A^B \vec{f}_{visc} \cdot \vec{d\ell}$, qui est une quantité négative puisque, dans une conduite, les forces de viscosité sont toutes de sens contraire à l'écoulement. L'expression encadrée est un théorème de l'énergie mécanique volumique.

NB : une intégrale curviligne d'une grandeur vectorielle s'appelle « circulation » de cette grandeur le long du parcours curviligne (ici AB).

I.A.1.e. On en déduit donc $H(B) - H(A) = \frac{1}{\rho g} \int_A^B \vec{f}_{visc} \cdot \vec{d\ell} = \frac{1}{\rho g} \int_A^B \eta \Delta \vec{v} \cdot \vec{d\ell}$, qui est l'opposé de la perte de charge, \vec{f}_{visc} étant une force volumique.

I.A.2.a. Puisque le fluide est incompressible, l'écoulement l'est aussi, donc $\text{div}(\vec{v}) = 0$; si on se place pour cette question en coordonnées cartésiennes avec le même axe des x que dans l'énoncé, on a bien $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. On peut aussi considérer un tube de champ de section dS et de longueur d ; le champ de vitesse est à flux conservatif, d'où $v(r, x)dS = v(r, x + dx)dS$, c'est-à-dire $v(r, x)$ ne dépend pas de x .

I.A.2.b. On suppose $\frac{\partial H}{\partial x} = -a$. D'après la question I.A.1.e, on déduit, en prenant A et B très proches l'un de l'autre, tous deux sur l'axe Ox , $\frac{\partial H}{\partial x} dx = \frac{\eta \Delta v}{\rho g} dx$.
D'où $\frac{\eta}{\rho g} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -a$, soit encore $\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{-a \rho g r}{\eta}$. Et on a vu en I.A.2.a. que le champ des vitesses ne dépend que de r , d'où $r \frac{dv}{dr} = \frac{-a \rho g r^2}{2\eta} + K$ soit $\frac{dv}{dr} = \frac{-a \rho g r}{2\eta} + \frac{K}{r}$, puis $v(r) = \frac{-a \rho g r^2}{4\eta} + K \ln(r) + K'$. Or la vitesse est finie sur l'axe, pour $r = 0$, d'où $K = 0$. Et la condition d'adhérence en $r = r_0$ donne :

$$v(r) = \frac{-a \rho g r^2}{4\eta} + \frac{a \rho g r_0^2}{4\eta}. \text{ On en déduit bien } v(r) = \frac{a \rho g}{4\eta} (r_0^2 - r^2) = v_{max} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) \text{ avec } v_{max} = \frac{a \rho g r_0^2}{4\eta}.$$

I.A.2.c. La vitesse débitante est la vitesse moyenne calculée sur une section:

$$U = \frac{1}{\pi r_0^2} \iint_{\text{section}} v(r) r d\theta dr = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} 2\pi v_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) r dr \text{ soit après simplification } \boxed{U = \frac{1}{2} v_{\max}}$$

De $Q = U\pi r_0^2 = \frac{1}{2} v_{\max} \pi r_0^2$ on déduit donc $\boxed{v(r) = v_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) = \frac{2Q}{\pi r_0^2} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)}$.

I.A.2.d. On a $a = \frac{4\eta v_{\max}}{\rho g r_0^2} = \frac{8\eta Q}{\rho g \pi r_0^4} = \frac{128\eta Q}{\rho g \pi D^4}$, donc $\boxed{\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{128\eta Q}{\rho g \pi D^4}}$.

- Dans le cas de l'huile SAE-90, cela donne $\boxed{\frac{\partial H}{\partial x} = -1,5 \cdot 10^{-2}}$. Or, on est ici à altitude et vitesse constante puisque la canalisation est horizontale et de section constante, donc la perte de charge se traduit directement en variation de pression : $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g a$, puis, après intégration, $\boxed{\Delta p = \rho g a L = 6,5 \text{ kPa}}$.
Le nombre de Reynolds est $\boxed{Re = \frac{\rho U D}{\eta} = \frac{4\rho Q}{\pi \eta D} = 9,9 \cdot 10^2}$. Conclusion, $\boxed{\text{régime laminaire}}$.
- Pour l'eau, $\boxed{Re = \frac{\rho U D}{\eta} = \frac{4\rho Q}{\pi \eta D} = 1,9 \cdot 10^5}$. Conclusion, $\boxed{\text{régime turbulent}}$.

NB : Pour un débit de 30 L.s^{-1} et un diamètre de 20cm, $U = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 10^{-2}} = 0,95 \text{ m.s}^{-1}$. Et on note une faute de frappe dans l'énoncé pour l'unité de la viscosité : Pa.s^{-1} au lieu de Pa.s .

I.B.1.a. On s'intéresse à la puissance cinétique, ou débit d'énergie cinétique :

$$P_{c \text{ réelle}} = \iint_{\text{Section}} \frac{1}{2} \rho v^2(r) \cdot v(r) dS = \iint_{\text{Section}} \frac{1}{2} \rho v^3(r) \cdot dS \text{ car } v(r) dS \text{ est le débit volumique local.}$$

Écoulement uniforme, $P_{c \text{ uniforme}} = \iint_{\text{Section}} \frac{1}{2} \rho U^3 \cdot dS = \frac{1}{2} \rho U^3 S$. On a donc bien $\alpha = \frac{P_{c \text{ réelle}}}{P_{c \text{ uniforme}}} = \frac{1}{U^3 S} \iint_{\text{Section}} v^3(r) \cdot dS$.

I.B.1.b. On obéit à l'énoncé, mais il y a un petit problème puisque z évolue au sein de la section.

$$Q \bar{H}(x) = \iint_{\text{Section}} H(x, r) \cdot v(r) dS = \iint_{\text{Section}} \left(z + \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2(r)}{2g} \right) \cdot v(r) \cdot dS = \iint_{\text{Section}} \left(z + \frac{P}{\rho g} \right) \cdot v(r) \cdot dS + \iint_{\text{Section}} \frac{v^3(r)}{2g} \cdot dS$$

Si on néglige les variations de z au sein d'une section, la première intégrale donne $\left(z + \frac{P}{\rho g} \right) Q$, il vient alors :

$$Q \bar{H}(x) = \left(z + \frac{P}{\rho g} \right) Q + \frac{1}{2g} \iint_{\text{Section}} v^3(r) \cdot dS = \left(z + \frac{P}{\rho g} \right) Q + \frac{1}{2g} \alpha U^3 S = \left(z + \frac{P}{\rho g} + \frac{\alpha U^2}{2g} \right) Q$$

Donc on a bien $\bar{H}(x) = z + \frac{P}{\rho g} + \frac{\alpha U^2}{2g}$.

I.B.1.c. Pour un écoulement uniforme $v(r) = U$ donc $\boxed{\alpha_{\text{uniforme}} = 1}$.

Pour l'écoulement de Poiseuille cylindrique $\alpha = \frac{1}{U^3 S} \iint_{\text{Section}} v^3(r) \cdot dS = \frac{1}{U^3 S} \int_0^{r_0} 8U^3 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^3 \cdot 2\pi r dr$

$$\alpha = \frac{8}{S} \int_0^{r_0} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^3 \cdot 2\pi r dr = \frac{8}{S} \pi \left[\frac{-r_0^2}{4} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^4 \right]_0^{r_0} \text{ donc } \boxed{\alpha_{\text{Poiseuille}} = 2}$$

I.B.1.d. Dans le cas de régimes turbulents α est entre 1,05 et 1,20 ce qui se rapproche d'un écoulement uniforme, ce qui est cohérent avec ce qu'on a vu en cours puisque pour les grands nombres de Reynolds, le $\boxed{\text{profil du champ des vitesses est assez « plat »}$.

Et on peut ajouter : puisqu'en pratique, la très grande majorité des écoulements dans des conduites sont turbulents, on peut prendre $\alpha = 1$. De toute façon, dans le cadre des écoulements incompressibles, dans des conduites de section constante, le terme en U^2 est le même à l'entrée et à la sortie.

I.B.2.a. Pour un écoulement de Poiseuille, en utilisant la perte de charge linéique et le I.A.2.D, $\Delta\bar{H}_\ell = aL$

$$\text{avec } a = \frac{128\eta Q}{\rho g \pi D^4} = \frac{32\eta U}{\rho g D^2} \text{ donc } \Delta\bar{H}_\ell = \frac{32\eta UL}{\rho g D^2}.$$

$$\text{En identifiant avec l'expression générale } \Delta\bar{H}_\ell = f \frac{L U^2}{D 2g} \text{ on obtient bien } f = \frac{64\eta}{\rho U D} = \frac{64}{\text{Re}}.$$

Pour un écoulement laminaire, le coefficient de perte de charge $f\left(\text{Re}, \frac{\epsilon}{D}\right)$ ne dépend pas de $\frac{\epsilon}{D}$ car la diffusion de quantité de mouvement l'emporte largement sur la convection, donc l'écoulement est peu sensible aux aspérités (il y a « lissage » du champ des vitesses du fait de la viscosité).

On peut aussi dire que si l'écoulement est laminaire, la couche limite est épaisse, donc les aspérités sont dans des zones où l'écoulement est très lent.

I.B.2.b. Lecture sur le diagramme de Moody :

On voit qu'il existe plusieurs échelles horizontales possibles. Pour l'eau, on peut directement utiliser l'échelle située la plus haute (en mettant le diamètre en cm). Il nous faut donc le produit « vitesse x diamètre ».

$$D=20 \text{ cm et } Q=30 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \quad \text{donne } UD = \frac{4Q}{\pi D^2} D = \frac{4 \times 30 \cdot 10^{-3}}{\pi \times 0,20^2} \times 20 = 19,1.$$

On lit le facteur de friction f en cherchant l'ordonnée sur l'axe vertical de gauche du point de la courbe d'étiquette $r = \epsilon/D$ à l'abscisse Re .

Fonte	Relative roughness ϵ/D	friction factor	$\Delta\bar{H}_\ell = f \frac{L U^2}{D 2g}$
F1 Neuve	$0,4/200=2 \cdot 10^{-3}$	$f_1=2,4 \cdot 10^{-2}$	46m
F2 Corrodée	$1,2/200=6 \cdot 10^{-3}$	$f_2=3,3 \cdot 10^{-2}$	64 m
F3 Déposée	$1,6/200=8 \cdot 10^{-3}$	$f_3=3,5 \cdot 10^{-2}$	68 m

L'interpolation se fait ainsi : si sur le dessin, une décade verticale correspond à x centimètres et que le point lu pour f se trouve à y centimètres au-dessus de ce qui correspond à une ordonnée de 0,008, alors $f = 0,008 \times 10^{\left(\frac{y}{x}\right)}$.

I.B.3. Pour un coude de rayon 1,5m tournant à 90° , $K=0,2$ soit une perte de charge singulière $\Delta\bar{H}_s = K \frac{U^2}{2g}$. Une

perte de charge linéique est $\Delta\bar{H}_\ell = f \frac{L U^2}{D 2g}$. Il y a équivalence pour $L = \frac{DK}{f}$. Numériquement, pour la fonte neuve,

$$f_1 = 0,024 \text{ donne } L = 1,7 \text{ m}.$$

II Point de fonctionnement hydraulique d'une installation

II.A.1. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique à un système fermé, décomposé en systèmes ouverts (cf cours MF2 V 2°) Bilans mécaniques), on obtient, avec les notations de ce problème, pour cet écoulement stationnaire homogène et incompressible : $Q_p(e_{T_s} - e_{T_e}) = P_h$.

e_T représente l'énergie mécanique volumique, c'est-à-dire la hauteur manométrique multipliée par ρg , comme cela a été montré au I.A.1.b.

La puissance hydraulique de la pompe s'écrit donc bien $P_h = \rho g H_{mt} Q_p$ puisque Q_p est le débit volumique de la pompe en $\text{m}^3 \text{ s}^{-1}$ et le terme $\rho g H_{mt}$ correspond à la variation de hauteur manométrique entre l'entrée et la sortie de la pompe.

II.A.2. Pour le point de fonctionnement F de la figure 2 envisagé, le débit Q_p est 237USgpm soit avec le facteur de conversion fourni $Q_p = 2,37 \times 6,31 = \boxed{15,0 \text{ L.s}^{-1}}$.

On lit aussi une hauteur manométrique $H_{mt}=1080 \text{ ft}$, et le rendement $R = 68,3\%$.

On en déduit la puissance hydraulique à l'aide de la question précédente, puis la puissance mécanique en faisant intervenir le rendement :
$$P_m = \frac{P_h}{R} = \frac{\rho g H_{mt} Q_p}{R} = \frac{1000 \times 9,81 \times 2,37 \times 6,31 \cdot 10^{-3} \times 1080 \times 0,305}{0,683} = 70,8 \text{ kW}.$$

Si on utilise directement les informations de la colonne de gauche figure 2 (la dernière ligne servant à trouver le facteur de conversion entre kW et hp) :

Hydraulic power = $P_h=63,7\text{hp}=63,7 \times 93,2/125=47,5\text{kW}$ C'est cohérent à 2% près, puisque $70,8 \times 0,683=48,4$.

De même: Rated Power = $P_m=93,3\text{hp}=93,3 \times 93,2/125=70\text{kW}$. Cette puissance peut être lue sur le graphe du haut de la figure 2.

II.B.1. Un débit de $2600 \text{ m}^3/\text{j}$ correspond à 30 L.s^{-1} et à 477 USgpm hors du graphe de la figure 2. Or le débit optimal de la pompe est voisin de 15 à 16 L.s^{-1} .

Pour obtenir un débit de 30 L.s^{-1} avec un bon rendement énergétique il faut donc utiliser deux pompes en parallèle.

II.B.2. L'alimentation souhaitée comprend un dénivelé Δz de $727-502=265\text{m}$, auquel il faut ajouter la perte de charge régulière (homogène à un dénivelé) qui dépend de l'état de la fonte et du débit.

On nous dit d'utiliser les pertes de charge régulières du I.B.2 mais elles étaient valables pour un débit théorique (correspondant au cahier des charges) de 30 L/s . En réalité, le débit pourra être un peu différent, puisque justement, on nous demande le point de fonctionnement.

La figure 7 nous indique que pour chaque rugosité relative envisagée (fonte neuve, fonte corrodée, fonte avec dépôt), le coefficient de pertes de charges régulières, pour l'eau, dépend très peu de UD , donc de U , donc du débit volumique Q . Nous considérerons donc les valeurs f_1 , f_2 et f_3 du tableau du I.B.2.

La hauteur manométrique totale nominale donnée par la pompe doit correspondre à la somme du dénivelé à assurer et de la perte de charge régulière : $H_{mt} = \Delta z + \Delta \bar{H}_\ell = \Delta z + f_i \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$.

Pour la fonte neuve, cela donne (il y a 2 pompes en parallèle, d'où $2Q_p$), avec les unités du graphe de la fig 2 :

$$H_{mt} = \left(265 + \frac{0,024 \times 8345}{0,2 \times 2 \times 9,81} \times \frac{(2Q_p)^2 \times 16}{\pi^2 \times 0,2^4} \times \left(\frac{6,31 \cdot 10^{-3}}{100} \right)^2 \right) \times \frac{100}{30,5}, \text{ soit } \boxed{H_{mt} = 869 + 0,00270 Q_p^2}.$$

Le point de fonctionnement se trouve alors à l'intersection de cette courbe parabolique et de la caractéristique de la pompe $H_{mt}(Q_p)$ donnée figure 2.

On obtient graphiquement $\boxed{Q_{p1} = 255 \text{ US}_{gpm} \text{ et } H_{mt1} = 1040 \text{ ft}}$.

Pour la fonte corrodée, cela donne numériquement, avec les unités du graphe de la figure 2 :

$$H_{mt} = \left(265 + \frac{0,033 \times 8345}{0,2 \times 2 \times 9,81} \times \frac{(2Q_p)^2 \times 16}{\pi^2 \times 0,2^4} \times \left(\frac{6,31 \cdot 10^{-3}}{100} \right)^2 \right) \times \frac{100}{30,5}, \text{ soit } \boxed{H_{mt} = 869 + 0,00371 Q_p^2}.$$

Le point de fonctionnement se trouve alors à l'intersection de cette courbe parabolique et de la caractéristique de la pompe $H_{mt}(Q_p)$ donnée figure 2.

On obtient graphiquement $\boxed{Q_{p2} = 238 \text{ US}_{gpm} \text{ et } H_{mt2} = 1080 \text{ ft}}$. On retrouve le point F !

Pour la fonte avec dépôt, cela donne numériquement, avec les unités du graphe de la figure 2 :

$$H_{mt} = \left(265 + \frac{0,035 \times 8345}{0,2 \times 2 \times 9,81} \times \frac{(2Q_p)^2 \times 16}{\pi^2 \times 0,2^4} \times \left(\frac{6,31 \cdot 10^{-3}}{100} \right)^2 \right) \times \frac{100}{30,5}, \text{ soit } \boxed{H_{mt} = 869 + 0,00394 Q_p^2}.$$

Le point de fonctionnement se trouve alors à l'intersection de cette courbe parabolique et de la caractéristique de la pompe $H_{mt}(Q_p)$ donnée figure 2. On obtient graphiquement $\boxed{Q_{p3} = 237 \text{ US}_{gpm} \text{ et } H_{mt3} = 1082 \text{ ft}}$.

II.B.3. Pour chaque état de fonte, et donc chaque point de fonctionnement déterminé à la question précédente, on peut lire sur la courbe du haut de la figure 2 la puissance mécanique P_m reçue par la pompe de la part du moteur électrique qui l'entraîne. En divisant par le rendement du moteur électrique qui l'entraîne, on trouve donc la puissance électrique consommée.

Fonte	P_m	η	P_{elec} calculée = P_m / η
Neuve	97 hp = 72 kW	80%	90 kW
corrodée	94 hp = 70 kW	80%	88 kW
déposée	93 hp = 69 kW	80%	87 kW

Le vieillissement de la fonte s'accompagne d'une augmentation de la hauteur manométrique totale et d'une diminution du débit. Ces deux variations sont antagonistes mais la puissance consommée diminue légèrement.

Le rendement de la pompe baisse aussi légèrement d'après la courbe « efficiency » de la figure 2.

II.B.4. La vitesse de rotation des pompes est au point de fonctionnement F de 3200rpm soit 3200 tours par minute, ou encore $3200 \cdot 2\pi / 60 = 335 \text{ rad.s}^{-1}$.

Pour une puissance mécanique de 70kW, cela correspond à un couple $C = \frac{P_m \times 30}{3200 \pi} = \boxed{209 \text{ Nm}}$.

Il faut donc utiliser un moteur qui peut fournir au moins ce couple à 3200tr/mn, c'est-à-dire le moteur portant le numéro 9 ou celui portant le numéro 10, mais le numéro 9 présente un meilleur rendement. Celui-ci à 3200tr/mn est de l'ordre de $\boxed{96,7\%}$, d'où une puissance électrique consommée d'environ $\boxed{72 \text{ kW}}$ pour ce moteur synchrone au lieu de $\boxed{88 \text{ kW}}$ pour le moteur asynchrone.

III Remplacement des moteurs asynchrones par des moteurs synchrones à aimants permanents. Evaluation du couple

III.A Champ magnétique rotorique

III.A.1. Dans le milieu magnétique constituant le rotor, le champ magnétique \vec{B}_r , le champ excitation magnétique \vec{H}_r , et l'aimantation \vec{M}_r sont liés par la relation $\vec{B}_r = \mu_0 (\vec{H}_r + \vec{M}_r)$.

III.A.2. On constate que $e = 3 \text{ mm} \ll a = 150 \text{ mm}$. Donc $x_e = \frac{e}{a} \ll 1$ négligeable devant 1, de même que

$\frac{a}{r} \approx 1$ à l'ordre 0. Les expressions proposées du champ magnétique rotorique se simplifient donc à l'ordre 0

$$\text{en } \frac{e}{a} \text{ en: } \begin{cases} B_r(r, \theta) = \frac{1}{2}(1)^2(1+1^2)J \cos(\theta - \alpha) = J \cos(\theta - \alpha) \\ B_\theta(r, \theta) = \frac{-1}{2}(1)^2(1-1^2)J \sin(\theta - \alpha) = 0 \end{cases}$$

III.A.3. Avec Ω vitesse angulaire constante, $\alpha(t) = \alpha_{rs} + \Omega t = \Omega t$.

Le champ rotorique s'écrit alors: $B_r(r, \theta) = J \cos(\theta - \Omega t)$; $B_\theta(r, \theta) = 0$

On en déduit la composante radiale du champ dans la direction $\theta = \frac{\pi}{2}$: $B_r(r, \theta) = J \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Omega t\right) = J \sin(\Omega t)$.

Le champ rotorique ressenti en $\theta = \frac{\pi}{2}$ est donc au cours du temps sinusoïdal, de période identique à celle de la rotation du rotor.

III.B Champ magnétique statorique

III.B.1. A cause de la différence de perméabilité entre les matériaux ferromagnétiques et l'air de l'entrefer, les conditions de changement de milieu entraînent que le champ magnétique est quasi normal au rotor, c'est-à-dire radial: $\vec{B}_{s1}(r, \theta, t) = B_{s1}(r, \theta, t) \vec{u}_r$ ("les lignes de champs sortent orthogonalement à l'interface dans un entrefer").

Comme de plus $e \ll a$, on considère que sa norme ne dépend pas de r : $\vec{B}_{s1}(r, \theta, t) = B_{s1}(\theta, t) \vec{u}_r$.

Le plan de la spire est un plan de symétrie pour la distribution de courant, donc a priori un plan d'antisymétrie pour le champ magnétique, ce qui est bien le cas puisque la forme des noyaux magnétiques ne la détruit pas.

$$\vec{B}_{s1}(M') = -\text{sym}(\vec{B}_{s1}(M)) \text{ pour } M' \text{ symétrique de } M.$$

Pour calculer le champ magnétique, on utilise le théorème d'Ampère sur le contour suggéré sur la figure

$$\text{ci-contre : } \int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i_1.$$

A cause de sa perméabilité considérée comme infinie

$$\vec{H}_{\text{stator}} \approx \vec{0}, \text{ c'est-à-dire en réalité:}$$

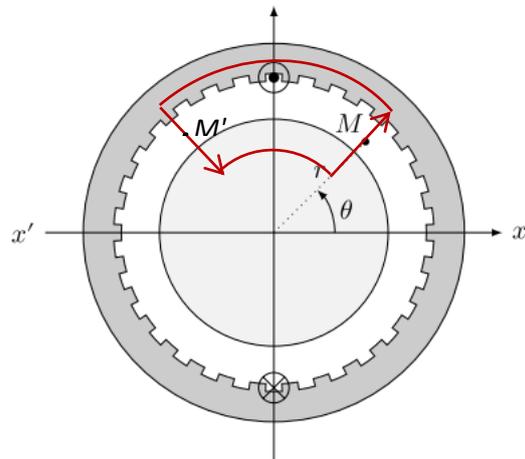
$$\|\vec{H}_{\text{stator}}\| \ll \|\vec{H}_{\text{entrefer}}\|.$$

$$\text{De même } \|\vec{H}_{\text{rotor}}\| \ll \|\vec{H}_{\text{entrefer}}\|.$$

Le théorème d'Ampère permet donc d'écrire en séparant l'intégrale selon les matériaux :

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\Gamma_{\text{rotor}}} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + 2eH(M) + \int_{\Gamma_{\text{stator}}} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i_1 \quad \text{d'où } H(M) = \frac{1}{2e} i_1 \text{ et } B(M) = \frac{\mu_0}{2e} i_1$$

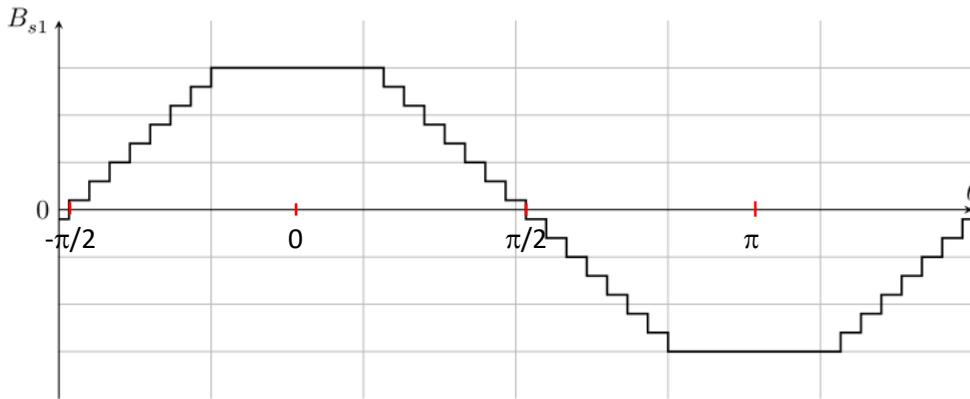
$$\text{Soit } \vec{B}(r, \theta, t) = \frac{\mu_0}{2e} i_1 \vec{u}_r \text{ pour } \theta \in]-\pi/2, \pi/2[\text{ et } \vec{B}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0}{2e} i_1 \vec{u}_r \text{ pour } \theta \in]\pi/2, 3\pi/2[$$



III.B.2. Si on fait pivoter la spire autour de l'axe du rotor, la carte de champ magnétique créée par cette spire tourne également.

Si on dispose plusieurs spires obtenues par rotation à partir de la spire étudiées à la question précédente, le champ magnétique total créé sera la somme des champs créés par chaque spire, par superposition (la conservation du flux magnétique et le théorème d'Ampère sont des lois linéaires, et en première approximation, le comportement non linéaire des aimants a été négligé).

On considère des spires régulièrement réparties de façon symétrique de part et d'autre du plan $\theta = \pi/2$. Dans ce cas les angles qui correspondent à un champ nul sont respectivement $-\pi/2$ et $+\pi/2$. On repère 15 sauts semblables entre la valeur maximale et la valeur minimale du champ sur la figure 6. En considérant qu'à chaque spire est associé un saut, il y a donc en tout 15 spires, une dans le plan $\theta = \pi/2$ et 7 de chaque côté, séparées d'un angle $\theta = 2\pi/15$ d'après l'échelle horizontale.



III.B.3. La représentation précédente permet d'approximer $B_{s1}(\theta, t) \approx K_S i_1(t) \cos \theta$.

Le coefficient K_S dépend du nombre de spires, et d'après la question III.B.1, de la taille de l'entrefer (et de la perméabilité magnétique dans l'entrefer).

III.B.4. Le second enroulement est décalé de $+\pi/2$. Donc le champ créé par cet enroulement est

$$B_{s2}(\theta, t) \approx K_S i_2(t) \cos(\theta - \pi/2) = +K_S i_2(t) \sin \theta.$$

Erreur d'énoncé sembe-t-il: quadrature retard donc déphasage de $-\pi/2$ pour $i_2(t)$ par rapport à $i_1(t)$.

En remplaçant $i_2(t) = I \cos(\omega_S t + \beta_S - \pi/2)$ qui est en quadrature retard par rapport à $i_1(t)$, on obtient bien

$$B_{s2}(\theta, t) = K_S I \cos(\omega_S t + \beta_S - \pi/2) \sin \theta = +K_S I \sin(\omega_S t + \beta_S) \sin \theta.$$

III.B.5. Le champ résultant est donc :

$B_{s1}(\theta, t) + B_{s2}(\theta, t) = K_S I \cos(\omega_S t + \beta_S) \cos \theta + K_S I \sin(\omega_S t + \beta_S) \sin \theta = K_S I \cos(\omega_S t - \theta + \beta_S)$, dont l'expression en fonction de $\omega_S t - \theta$ est caractéristique d'une onde progressant vers les valeurs croissantes de θ à la vitesse (angulaire) ω_S .

Il s'agit donc d'un champ tournant à la vitesse (angulaire) ω_S vers les valeurs croissantes de θ , d'amplitude $K_S I$.

III.C Energie magnétique dans l'entrefer

III.C.1. La densité volumique d'énergie magnétique dans un milieu de perméabilité relative μ_r est:

$$\frac{B^2}{2\mu_r \mu_0}.$$

III.C.2. On intègre sur le volume de l'entrefer de perméabilité μ_0 (où l'essentiel de l'énergie est stockée):

$$\xi = \iiint_{\text{entrefer}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \int_{z=0}^{\ell} \int_{r=a}^{a+e} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{(B_r(r, \theta) + B_s(r, \theta, t))^2}{2\mu_0} dr \cdot r d\theta \cdot dz \text{ avec } r \approx a, \text{ donc}$$

$$\xi = \frac{\ell e a}{2\mu_0} \int_{\theta=0}^{2\pi} (I \cos(\theta - \Omega t) + K_S I \cos(\omega_S t - \theta + \beta_S))^2 d\theta \text{ que l'on sépare en trois contributions:}$$

$$\frac{\ell e a}{2\mu_0} \int_{\theta=0}^{2\pi} (I \cos(\theta - \Omega t))^2 d\theta = \frac{\ell e a}{2\mu_0} I^2 \pi = \frac{V}{4\mu_0} I^2$$

$$\frac{\ell e a}{2\mu_0} \int_{\theta=0}^{2\pi} (K_S I \cos(\omega_S t - \theta + \beta_S))^2 d\theta = \frac{\ell e a}{2\mu_0} (K_S I)^2 \pi = \frac{V}{4\mu_0} (K_S I)^2$$

$$\begin{aligned} & \frac{\ell ea}{2\mu_0} \int_{\theta=0}^{2\pi} (2J \cos(\theta - \Omega t) K_S I \cos(\omega_s t - \theta + \beta_s)) d\theta \\ &= \frac{\ell ea}{2r\mu_0} JK_S I \int_{\theta=0}^{2\pi} [\cos(\theta - \Omega t + \omega_s t - \theta + \beta_s) + \cos(\theta - \Omega t - \omega_s t + \theta - \beta_s)] d\theta \\ &= \frac{\ell ea}{2\mu_0} JK_S I \int_{\theta=0}^{2\pi} [\cos(-\Omega t + \omega_s t + \beta_s) + \cos(2\theta - \Omega t - \omega_s t + \theta - \beta_s)] d\theta = \frac{V}{2\mu_0} JK_S I \cos(-\Omega t + \omega_s t + \beta_s) \end{aligned}$$

$$\xi = \frac{V}{4\mu_0} J^2 + \frac{V}{4\mu_0} (K_S I)^2 + \frac{V}{2\mu_0} JK_S I \cos(-\Omega t + \omega_s t + \beta_s)$$

III.D Moment électromagnétique s'exerçant sur le rotor

III.D.1. A l'instant t, le champ rotorique est maximal en $\theta = \alpha = \Omega t$. Le champ statorique est maximal en $\theta = \omega_s t + \beta_s$.

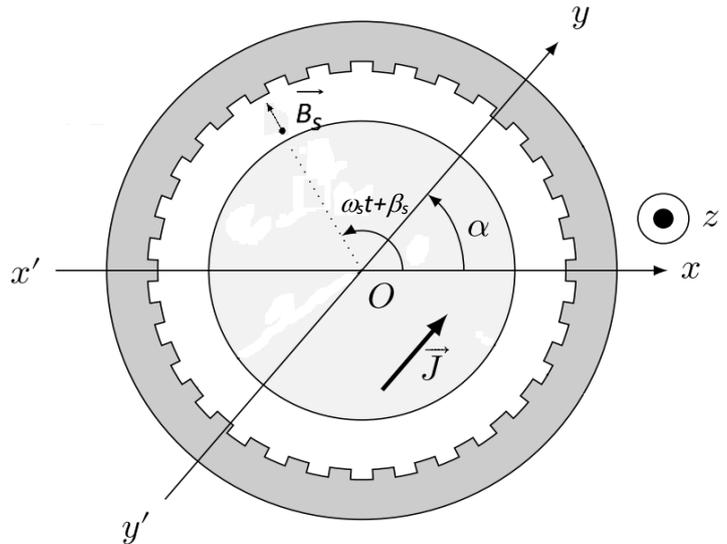
L'angle entre ces deux positions est $\beta = \omega_s t + \beta_s - \Omega t = \omega_s t + \beta_s - \alpha$.

L'énergie électromagnétique s'écrit donc

$$\xi = \frac{V}{4\mu_0} J^2 + \frac{V}{4\mu_0} (K_S I)^2 + \frac{V}{2\mu_0} JK_S I \cos(\beta).$$

Le couple des forces électromagnétiques exercées sur le rotor est

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = \frac{V}{2\mu_0} JK_S I \sin(\omega_s t + \beta_s - \alpha) \\ &= \frac{V}{2\mu_0} JK_S I \sin(\omega_s t + \beta_s - \Omega t) \end{aligned}$$



III.D.2. Pour que le couple moyen soit non nul, il faut que le rotor et le champ statorique tournent à la même vitesse: condition de synchronisme $\Omega = \omega_s$. De plus pour que le couple soit moteur (positif), il faut que $\sin(\beta) = \sin(\beta_s) > 0$, soit $\beta = \beta_s \in]0, \pi[$: le rotor doit être en retard sur le champ statorique.

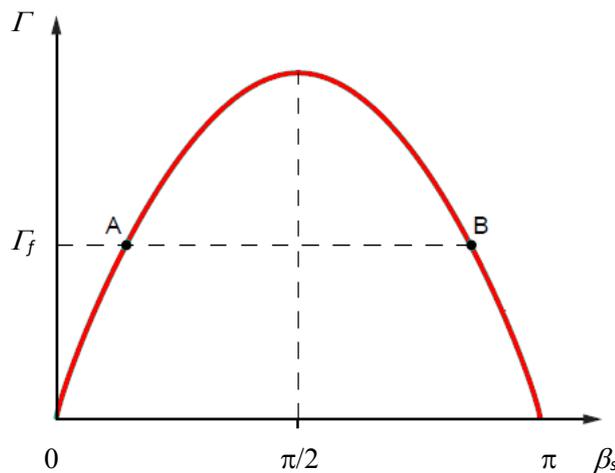
III.D.3. L'angle de calage des courants β_s est l'angle entre la direction principale du champ rotorique et la position du rotor, compte tenu de la convention choisie ($t=0$ lorsque $\alpha=0$).

couple maximal correspond à $\beta_s = \pi/2$.

retrouve la discussion sur les points de fonctionnement A et B compatibles avec un couple donné inférieur au couple maximal.

En raisonnant en régime quasi permanent, si on imagine une perturbation qui augmente β_s à du point de fonctionnement A, le couple moteur augmente, le rotor accélère (th du moment cinétique), et donc l'angle β_s diminue. De même

perturbation diminue β_s , le couple diminue, le rotor décélère, et β_s augmente: le point de fonctionnement A est stable. Au contraire si on tient un raisonnement similaire à partir du point B, on trouve que c'est un point de fonctionnement instable.



aussi

Le On

partir

si la