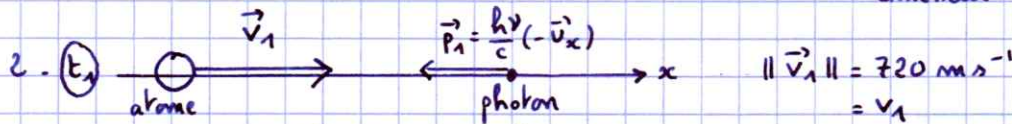
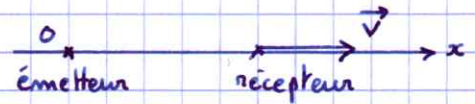


I. Le dispositif expérimental

1. C'est l'effet Doppler. $v_{reçue} = v_{émis} (1 - \frac{v}{c})$



Système : l'atome de sodium de masse $m = \frac{M}{N_A}$

Loi de la quantité de mouvement : $m \vec{a} = \vec{F}_{\text{photon} \rightarrow \text{atome}}$

$$m \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = N \cdot \vec{F}_{1\text{photon} \rightarrow \text{atome}} \quad (N = \text{nombre de photons})$$

Pour trouver $\vec{F}_{1\text{photon} \rightarrow \text{atome}}$ on applique la loi de la quantité de mouvement à un photon :

$$\frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{\Delta t} = \vec{F}_{\text{atome} \rightarrow 1\text{photon}} = -\vec{F}_{1\text{photon} \rightarrow \text{atome}}$$

Donc : $m \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = N \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{\Delta t} \Rightarrow$ selon Osc : $m(v_2 - v_1) = N \left(-\frac{2h\nu}{c} \right) = -N \frac{2h}{\lambda}$

Finalement : $N = \frac{m \lambda (v_1 - v_2)}{2h}$

AN : $m \sim 3 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$; $\lambda \sim 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$; $v_1 - v_2 \sim 7 \cdot 10^2 \text{ m s}^{-1} \Rightarrow N \sim 10^4 \text{ photons}$

3. Pour sortir du puits de potentiel, l'atome doit posséder une énergie cinétique suffisante. Ce sont donc les atomes les plus rapides qui vont être éjectés.

4. La température est liée à l'énergie cinétique microscopique : $E_c = \frac{3}{2} k_B T$. L'éjection des atomes rapides permet de ne garder que les atomes les plus lents, donc de basse énergie cinétique. La température va diminuer.

5. On a : $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow$ la vitesse quadratique moyenne est de l'ordre de : $v \sim \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}}$

A.N avec : $T = 500 \cdot 10^{-9} \text{ K}$ $v \sim 1 \text{ cm s}^{-1}$

6. Une augmentation de pression provoquerait une augmentation de température et donc une augmentation de vitesse. Le ralentissement serait moins bon. D'où l'intérêt d'une faible pression.

7. Entre les niveaux 1 et 2 d'énergies E_1 et E_2 : $E_2 - E_1 = h\nu = h\omega$

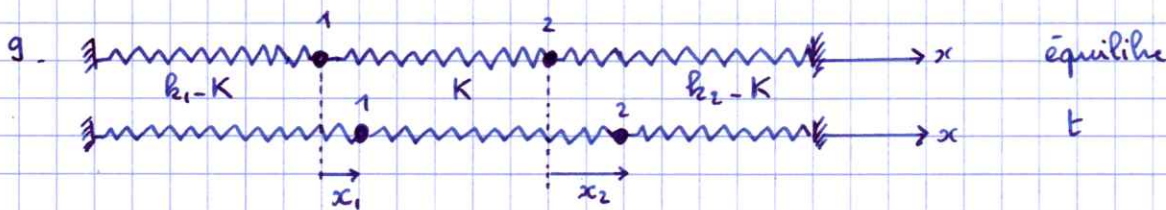
II. Etude de l'analogie mécanique

8. $E_3 - E_1 = h\omega_1$

$E_3 - E_2 = h\omega_2$

On $E_2 - E_1 = 7,4 \cdot 10^{-6} \text{ eV} \ll E_3 - E_1 = 2,1 \text{ eV}$

$\Rightarrow E_3 - E_2 \approx E_3 - E_1 \Rightarrow \omega_1 \approx \omega_2$



Loi de la quantité de mouvement à la masse 1:

$$m\ddot{x}_1 = F(t) - (k_1 - K)x_1 + K(x_2 - x_1) - m\delta_1\dot{x}_1$$

$$\ddot{x}_1 + \delta_1\dot{x}_1 + \frac{k_1 - K + K}{m}x_1 = \frac{F(t)}{m} + \frac{K}{m}x_2$$

$$\boxed{\ddot{x}_1 + \delta_1\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \frac{F(t)}{m} + \Omega^2 x_2}$$

Loi de la quantité de mouvement à la masse 2:

$$m\ddot{x}_2 = -K(x_2 - x_1) - (k_2 - K)x_2 - m\delta_2\dot{x}_2$$

$$\ddot{x}_2 + \delta_2\dot{x}_2 + \frac{K + k_2 - K}{m}x_2 = \frac{K}{m}x_1$$

$$\boxed{\ddot{x}_2 + \delta_2\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \Omega^2 x_1}$$

10. En régime sinusoïdal forcé et notation complexe:

$$-\omega^2 \underline{x}_1 + j\omega\delta_1 \underline{x}_1 + \omega_1^2 \underline{x}_1 = \frac{F}{m} + \Omega^2 \underline{x}_2 \Rightarrow (\omega_1^2 - \omega^2 + j\omega\delta_1)\underline{x}_1 - \Omega^2 \underline{x}_2 = \frac{F}{m} \quad (1)$$

$$-\omega^2 \underline{x}_2 + j\omega\delta_2 \underline{x}_2 + \omega_2^2 \underline{x}_2 = \Omega^2 \underline{x}_1 \Rightarrow -\Omega^2 \underline{x}_1 + (\omega_2^2 - \omega^2 + j\omega\delta_2)\underline{x}_2 = 0 \quad (2)$$

11. On prend $\delta_1 = 0$ $\delta_2 = 0$. (2) donne: $\underline{x}_2 = \frac{\Omega^2 \underline{x}_1}{\omega_2^2 - \omega^2}$

On reporte dans (1): $(\omega_1^2 - \omega^2)\underline{x}_1 - \frac{\Omega^4}{\omega_2^2 - \omega^2}\underline{x}_1 = \frac{F}{m}$

Sachant que: $\omega_1 \approx \omega_2$ on a: $[(\omega_1^2 - \omega^2)^2 - \Omega^4]\underline{x}_1 = \frac{F}{m}(\omega_2^2 - \omega^2)$

$$\Rightarrow \underline{x}_1 = \frac{\frac{F}{m}(\omega_1^2 - \omega^2)}{[\omega_1^2 - \omega^2 - \Omega^2][\omega_1^2 - \omega^2 + \Omega^2]}$$

$|\underline{x}_1| \rightarrow +\infty$ (résonance) pour $\omega_1^2 - \omega^2 - \Omega^2 = 0 \Rightarrow \omega_- = \sqrt{\omega_1^2 - \Omega^2}$
 et $\omega_1^2 - \omega^2 + \Omega^2 = 0 \Rightarrow \omega_+ = \sqrt{\omega_1^2 + \Omega^2}$

Si $\Omega \ll \omega_1$: $\omega_- = \omega_1 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \omega_1 \left(1 - \frac{\Omega^2}{2\omega_1^2}\right)$

$\omega_+ = \omega_1 \left(1 + \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \omega_1 \left(1 + \frac{\Omega^2}{2\omega_1^2}\right)$

Donc: $\Omega_n = |\omega_+ - \omega_-| = \left| \omega_1 + \frac{\Omega^2}{2\omega_1} - \omega_1 + \frac{\Omega^2}{2\omega_1} \right| \Rightarrow \boxed{\Omega_n = \frac{\Omega^2}{\omega_1}}$

12. On a: $[\omega_1^2 - (\omega_1 + \delta\omega)^2 + j(\omega_1 + \delta\omega)\delta_1]\underline{x}_1 - \omega_1 \Omega_n \underline{x}_2 = \frac{F}{m}$

$$-\omega_1 \Omega_n \underline{x}_1 + [\omega_1^2 - (\omega_1 + \delta\omega)^2]\underline{x}_2 = 0$$

13. On a:
$$\underbrace{[-2\omega_1 \delta\omega - (\delta\omega)^2 + j\omega_1 \delta_1 + j\delta\omega \delta_1]}_{\text{termes prédominants}} \underline{x}_1 - \omega_1 \Omega_n \underline{x}_2 = \frac{F}{m}$$

$$-\omega_1 \Omega_n \underline{x}_1 + \underbrace{[-2\omega_1 \delta\omega - (\delta\omega)^2]}_{\text{terme prédominant}} \underline{x}_2 = 0$$

il reste:
$$\boxed{\begin{aligned} (-2\delta\omega + j\delta_1) \underline{x}_1 - \Omega_n \underline{x}_2 &= \frac{F}{m\omega_1} \\ -\Omega_n \underline{x}_1 - 2\delta\omega \underline{x}_2 &= 0 \end{aligned}}$$

14. On a: $F(t) = F \cos \omega t$ et $x_1(t) = |x_1| \cos(\omega t + \varphi_1) \Rightarrow \dot{x}_1(t) = -|x_1| \omega \sin(\omega t + \varphi_1)$

Puissance instantanée:
$$P(t) = F(t) \cdot \dot{x}_1(t) = -F |x_1| \omega \cos \omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$$

on utilise: $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$$\Rightarrow P(t) = -\frac{1}{2} F |x_1| \omega (\underbrace{\sin(2\omega t + \varphi_1)}_{= 0 \text{ en moyenne temporelle}} + \sin \varphi_1)$$

La puissance moyenne est donc: $P_m = -\frac{1}{2} F \omega |x_1| \sin \varphi_1$ et $\omega \approx \omega_1$, car $\delta\omega \ll \omega_1$

$$= \text{Im}(x_1)$$

Donc au signe près:
$$\boxed{P_m = -\frac{1}{2} F \omega_1 \text{Im}(x_1)}$$

15. En l'absence de couplage la première équation de la question 13 donne: $\underline{x}_1 = \frac{F}{m\omega_1(-2\delta\omega + j\delta_1)}$

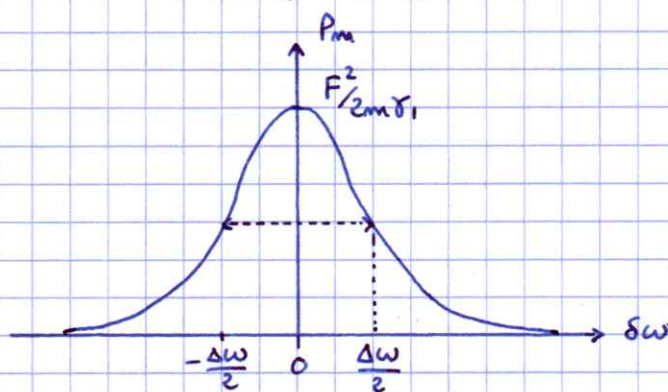
soit: $\underline{x}_1 = \frac{F}{m\omega_1(4\delta\omega^2 + \delta_1^2)} (-2\delta\omega - j\delta_1) \Rightarrow \text{Im}(x_1) = \frac{-\delta_1 F}{m\omega_1(4\delta\omega^2 + \delta_1^2)}$

Puis:
$$P_m = \frac{\delta_1 \omega_1 F^2}{2m\omega_1(4\delta\omega^2 + \delta_1^2)}$$

On a: $P_{m \text{ max}} = P_m(\delta\omega=0) = \frac{F^2}{2m\delta_1}$

et $P_m \rightarrow 0$ quand $\delta\omega \rightarrow \pm\infty$

On retrouve bien l'allure de la courbe de la figure 2.



Largeur à mi-hauteur $\Delta\omega$:
$$P_m\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right) = \frac{P_{m \text{ max}}}{2} \Rightarrow \frac{\delta_1 F^2}{2m(\Delta\omega^2 + \delta_1^2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F^2}{2m\delta_1}$$

$$\Rightarrow 2\delta_1^2 = \Delta\omega^2 + \delta_1^2$$

La largeur à mi-hauteur est donc:
$$\boxed{\Delta\omega = \delta_1}$$

16. Si $\delta\omega = 0$ les équations de la question 13 donnent: $\underline{x}_1 = 0$ et $\underline{x}_2 = \frac{F}{m\omega_1 \Omega_n}$

L'oscillateur 1 est immobile. Il n'y a pas de puissance moyenne absorbée.

17. Toujours d'après les équations de la question 13: $\underline{x}_2 = -\frac{\Omega_n}{2\delta\omega} \underline{x}_1$

Puis: $(-2\delta\omega + j\delta_1) \underline{x}_1 + \frac{\Omega_n^2}{2\delta\omega} \underline{x}_1 = \frac{F}{m\omega_1}$

$$[2\delta\omega(-2\delta\omega + j\delta_1) + \frac{\Omega_n^2}{2\delta\omega}] \underline{x}_1 = \frac{2\delta\omega F}{m\omega_1}$$

donc:
$$\underline{x}_1 = \frac{\frac{2F}{m\omega_1} \delta\omega}{\Omega_n^2 - 4\delta\omega^2 + j2\delta_1\delta\omega}$$

18. Si $|\delta\omega| \ll \Omega_n$:

$$\underline{x}_1 \approx \frac{\frac{2F}{m\omega_1} \delta\omega}{\Omega_n^2 + j2\delta_1\delta\omega}$$

19. On a:
$$\underline{x}_1 = \frac{\frac{2F}{m\omega_1} \delta\omega}{(\Omega_n^2 - 4\delta\omega^2)^2 + 4\delta_1^2\delta\omega^2} ((\Omega_n^2 - 4\delta\omega^2) - j2\delta_1\delta\omega)$$

donc:
$$\text{Im}(\underline{x}_1) = -\frac{\frac{4F\delta_1}{m\omega_1} \delta\omega^2}{(\Omega_n^2 - 4\delta\omega^2)^2 + 4\delta_1^2\delta\omega^2}$$

La puissance moyenne absorbée est: $P_m = -\frac{1}{2} F \omega_1 \text{Im}(\underline{x}_1)$

$$P_m(\delta\omega) = \frac{\frac{2F^2\delta_1}{m} \delta\omega^2}{(\Omega_n^2 - 4\delta\omega^2)^2 + 4\delta_1^2\delta\omega^2}$$

- $\delta\omega \rightarrow 0$: P_m tend vers 0. Il y a bien un creux central
- $\delta\omega \rightarrow \pm\infty$: $P_m \approx \frac{2F^2\delta_1}{m} \frac{\delta\omega^2}{(4\delta\omega^2)^2} = \frac{\text{cte}}{\delta\omega^2}$ tend vers 0 comme sur les figures 2b) 2c)
- Pour trouver la largeur du creux central on cherche les abscisses des deux maxima qui délimitent le creux central.

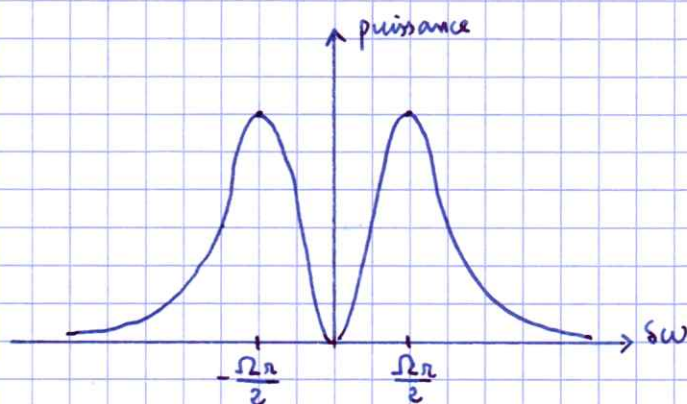
$$\frac{dP}{d(\delta\omega)} = 0 \Rightarrow 2\delta\omega [(\Omega_n^2 - 4\delta\omega^2)^2 + 4\delta_1^2\delta\omega^2] - \delta\omega^2 \cdot 8\delta_1^2\delta\omega = 0$$

$$\Rightarrow (\Omega_n^2 - 4\delta\omega^2)^2 + 4\delta_1^2\delta\omega^2 - 4\delta_1^2\delta\omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \Omega_n^2 - 4\delta\omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \delta\omega = \pm \frac{\Omega_n}{2}$$

La largeur du creux central est donc: $\Delta\omega = \frac{\Omega_n}{2} - (-\frac{\Omega_n}{2}) \Rightarrow \Delta\omega = \Omega_n$



III Transparence induite

20. $\omega_1 = \frac{2\pi c}{\lambda_1}$ avec $\lambda_1 \approx 0,5 \mu\text{m}$ $\Rightarrow \omega_1 \approx 3 \cdot 10^{15} \text{ rads}^{-1}$

21. $\delta_1 = 6,3 \cdot 10^7 \text{ rads}^{-1} \ll \omega_1 \approx 3 \cdot 10^{15} \text{ rads}^{-1}$

$\Omega_R \approx 10^7 \text{ rads}^{-1} \ll \omega_1 \approx 3 \cdot 10^{15} \text{ rads}^{-1}$

Les conditions sont vérifiées.

22. D'après la figure 128, $K = m\Omega^2$ est proportionnelle à l'intensité du laser
Donc $\Omega_R = \frac{\Omega^2}{\omega_1}$ est aussi proportionnelle à l'intensité du laser de couplage.

23. Pour le vecteur d'onde complexe: $k_z = \frac{\omega}{c} m$

Pour sa partie réelle traduisant la propagation: $k_z = \frac{\omega}{c} m_r(\omega)$

24. On envoie une impulsion lumineuse de pulsation ω dans le milieu.

Si $\omega = \omega_1$ alors: $\delta\omega = 0$

$\Rightarrow x_1(\delta\omega) = 0$ d'après la question 17

$\Rightarrow m(\omega) = 1$

\Rightarrow Le milieu se comporte comme du vide

\Rightarrow Le milieu est transparent

25. L'intervalle de pulsation pour lequel le gaz d'atomes est transparent à la lumière correspond au creux de la courbe des figures 2b) et 2c).

D'après la question 19: $\Delta\omega = \Omega_R = 0,2\delta_1$ A.N: $\Delta\omega \approx 10^7 \text{ rads}^{-1}$

Sur la figure 3.a), la largeur du pic central correspondant à la zone de transparence est environ: $\Delta\omega \approx 4 \cdot 10^6 \text{ rads}^{-1}$

A un facteur 2 près on retrouve le bon ordre de grandeur.

La largeur de cet intervalle augmente avec Ω_R donc avec l'intensité lumineuse

IV Lumière ralentie

26. $m(\omega_1) = 1$ donc: $v_{cp}(\omega_1) = c$

27. $\frac{dk_z}{d\omega} = \frac{m_r(\omega)}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dm_r}{d\omega}(\omega) = \frac{1}{c} (m_r(\omega) + \omega m_r'(\omega))$

d'où la vitesse de groupe: $v_g = \frac{c}{m_r(\omega) + \omega m_r'(\omega)}$

28. v_g sera minimale quand $m_r'(\omega)$ sera positive et la plus grande possible.

La figure 3.b) montre que c'est pour l'intervalle: $\delta\omega \in [-4 \cdot 10^6 \text{ rads}^{-1}; +4 \cdot 10^6 \text{ rads}^{-1}]$

$$29. \quad m = 1 + \frac{C}{F} x_1$$

$$= 1 + \frac{C}{F} \frac{\frac{2F}{m\omega_1} \delta\omega}{(\Omega_R^2 - 4\delta\omega^2)^2 + 4\gamma_1^2 \delta\omega^2} (\Omega_R^2 - 4\delta\omega^2) - j 2\gamma_1 \delta\omega$$

$$\Rightarrow m_R(\omega) = \text{Re}(m)$$

$$= 1 + \frac{C}{F} \frac{\frac{2F}{m\omega_1} \delta\omega}{(\Omega_R^2 - 4\delta\omega^2)^2 + 4\gamma_1^2 \delta\omega^2} (\Omega_R^2 - 4\delta\omega^2)$$

$$\text{Au voisinage de } \delta\omega = 0 : m_R(\omega) \approx 1 + \frac{2C\delta\omega}{m\omega_1 \Omega_R^2} \Rightarrow m_R(\omega_1) = 1$$

$$\text{puis, } m'_R(\omega) = \frac{2C}{m\omega_1 \Omega_R^2}$$

$$\text{donc : } v_g(\omega_1) = \frac{c}{1 + \frac{2C}{m\Omega_R^2}}$$

$$30. \quad \text{La longueur de } 229 \mu\text{m est parcourue en } 7 \mu\text{s} \Rightarrow v_g(\omega_1) = \frac{229}{7} = \underline{32 \text{ m s}^{-1}}$$

$$31. \quad v_g(\omega_1) \ll c \text{ donc } \frac{2C}{m\Omega_R^2} \gg 1 \text{ d'où : } v_g(\omega_1) \approx c \frac{m\Omega_R^2}{2C}$$

Ω_R est proportionnelle à l'intensité du laser de couplage.
Donc $v_g(\omega_1)$ sera proportionnelle à l'intensité au carré.

32. inconvenient: Augmenter l'intensité du laser de couplage provoque une augmentation de la vitesse de groupe. Le ralentissement de l'impulsion lumineuse est moins important.

avantage: Augmenter l'intensité du laser de couplage provoque un élargissement de la bande de fréquences où le ralentissement a lieu.
L'impulsion peut avoir un spectre un peu plus étendu.