

① Etude de l'équilibre d'une corde suspendue en deux points

1. Le tronçon est soumis à : son poids $\mu ds \vec{g}$
 la tension $\vec{T}(s+ds)$ à son extrémité droite
 la tension $-\vec{T}(s)$ à son extrémité gauche

Equilibre: $\vec{0} = \mu ds \vec{g} + \vec{T}(s+ds) - \vec{T}(s)$

Selon Ox: $0 = T(s+ds) \cos \alpha(s+ds) - T(s) \cos \alpha(s)$

$0 = \frac{d}{ds} (T(s) \cos \alpha(s)) \cdot ds$

$\Rightarrow T(s) \cos \alpha(s) = \text{constante} = A$ donc: $T(s) = \frac{A}{\cos \alpha(s)}$

2. Selon Oy: $0 = -\mu ds g + T(s+ds) \sin \alpha(s+ds) - T(s) \sin \alpha(s)$

$= -\mu ds g + \frac{d}{ds} (T(s) \sin \alpha(s)) ds$ donc: $\frac{d}{ds} (T(s) \sin \alpha(s)) = \mu g$

3. On en déduit: $T(s) \sin \alpha(s) = \mu g s + K$ K: constante

puis: $A \tan \alpha(s) = \mu g s + K$

en B: $s = L$ donc: $A \tan \alpha_B = \mu g L + K$

en A: $s = 0$ et $\alpha_A = -\alpha_B$ donc: $-A \tan \alpha_B = K$

$\Rightarrow A = \frac{\mu g L}{2 \tan \alpha_B}$

4. On a donc: $\tan \alpha(s) = \frac{\mu g}{A} s - \tan \alpha_B$ avec: $\frac{\mu g}{A} = \frac{2 \tan \alpha_B}{L}$

Or: $\tan \alpha(s) = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ donc: $f'(x) = \frac{2 \tan \alpha_B}{L} s - \tan \alpha_B$

On dérive par rapport à x: $f''(x) = \frac{2 \tan \alpha_B}{L} \frac{ds}{dx}$

Et $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ donc: $f''(x) = \frac{2 \tan \alpha_B}{L} \sqrt{1 + f'(x)^2}$ $k_2 = \frac{2 \tan \alpha_B}{L}$

5. $f(a) = 0 \Rightarrow \frac{1}{k} \cosh[k(a-b)] + c = 0$
 $f(-a) = 0 \Rightarrow \frac{1}{k} \cosh[k(-a-b)] + c = 0$ } $\Rightarrow \cosh[k(a-b)] = \cosh[k(-a-b)]$

On en déduit: $k(a-b) = k(-a-b)$ ou $k(a-b) = -k(-a-b)$
 \Downarrow $a=0$ ou \Downarrow $b=0$

Or $a \neq 0$ donc forcément: $b=0$ et $c = -\frac{1}{k} \cosh(ka)$

Donc: $f(x) = \frac{1}{k} [\cosh[kx] - \cosh[ka]]$

6. La forme de la corde ne peut dépendre que de sa longueur L et des points de fixation \Rightarrow k_2 dépend de L et a

7. On a: $L = \int_A^B ds = \int_A^B \frac{ds}{dx} dx \Rightarrow L = \int_{-a}^a \sqrt{1+f'(x)^2} dx$

Cette relation permet de calculer k

8. On cherche l'intersection de la courbe $\sinh(K)$ avec la droite qK (pente $q = \frac{L}{2a} = 3,3$)

On trouve: $K = 2,9 \Rightarrow k = \frac{K}{a} \Rightarrow \underline{k \approx 10 \text{ m}^{-1}}$

9. Le poids est la seule force conservative appliquée à la corde. Donc Φ est l'énergie potentielle de pesanteur.

10. Le segment de corde de longueur ds a pour énergie potentielle de pesanteur: $dE_p = \mu ds g f(x)$

Donc: $E_p = \int_A^B \mu g ds f(x) = \int_A^B \mu g \frac{ds}{dx} dx f(x) \Rightarrow E_p = \int_{-a}^a \mu g f(x) \sqrt{1+f'(x)^2} dx$

11. On donne à la corde différentes formes mais sa longueur doit rester constante. La condition (C) est celle de la question 7:

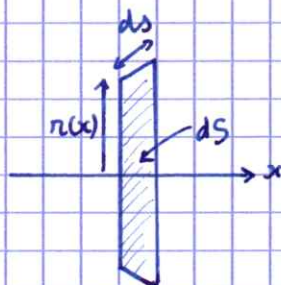
(C): $L = \int_{-a}^a \sqrt{1+f'(x)^2} dx = \text{cte}$

12. L'intégrale de l'énergie potentielle E_p est identique à l'intégrale Ψ en remplaçant $f(x)$ par $f(x) - c$. La condition (C) permet donc de faire apparaître la constante c dans la forme d'équilibre $f(x)$

13. $E_x = \delta S$ où S est la surface du film d'eau savonneuse.

$dS = 2\pi r(x) ds = 2\pi r(x) \frac{ds}{dx} dx = 2\pi r(x) \sqrt{1+r'(x)^2} dx$

donc: $E_x = 2\pi \delta \int_{-a}^a r(x) \sqrt{1+r'(x)^2} dx$



14. Analogies: $E_x \leftrightarrow E_p$; $2\pi \delta \leftrightarrow \mu g$; $r(x) \leftrightarrow f(x)$

Différences: $r(x) > 0$ / $f(x) < 0$; $r(\pm a) = R$ / $f(\pm a) = 0$

• Pour la corde on a la contrainte $L = \text{cte}$ due au caractère inextensible de la corde. Pour le film d'eau il n'y a pas de contrainte similaire: sa longueur L peut varier en fonction de l'épaisseur du film.

15. L'analogie $r(x) \leftrightarrow f(x)$ permet d'écrire $r(x)$ sous la forme d'un $\cosh()$

16. L'absence de condition analogue à (C) pour le film d'eau savonneuse impose: $c = 0$

17. Condition aux limites: $R = R_0 \cosh\left(\frac{a}{R_0}\right) \Rightarrow \frac{R}{a} \cdot \frac{a}{R_0} = \cosh\left(\frac{a}{R_0}\right) \Rightarrow s \cdot u = \cosh(u)$

On cherche l'intersection de $\cosh(u)$ avec la droite $s \cdot u$ où $s = \frac{R}{a} = 2$

$\Rightarrow u = 0,6 \Rightarrow R_0 = \frac{a}{u} = \frac{1}{0,6} \Rightarrow \underline{R_0 = 1,7 \text{ cm}}$ (il y a une autre solution pour $u = 2,5 \Rightarrow R_0 = 4 \text{ mm}$ mais la surface n'est pas minimale)

18. Le cas limite à partir duquel il n'y aura plus d'intersection correspond à la droite $s \cdot u$ tangente à $\cosh(u) \Rightarrow$ pente $s_c = \frac{1,8}{1,2} = 1,5 \Rightarrow a_c = \frac{R}{s_c} = \underline{1,3 \text{ cm}}$

On a alors: $R_{oc} = \frac{a_c}{1,2} = \underline{1,1 \text{ cm}}$

② Propagation d'ondes transverses le long d'une corde pendante

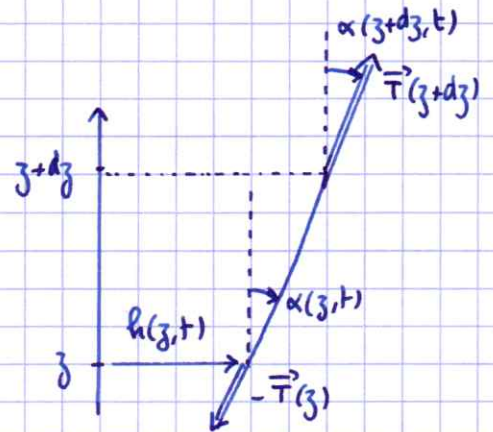
19. $a \ll \lambda$

20. Système: la partie $[0, z]$ de corde de masse μz
Actions: - poids $-\mu z g \vec{u}_z$
 - tension exercée en M par la partie $[z, L]$: $T(z) \vec{u}_z$

A l'équilibre: $T(z) = \mu g z$

21. Système: l'élément de corde entre z et $z+dz$
 de masse μdz

Actions: - poids $-\mu dz g \vec{u}_z$
 - tension en haut: $\vec{T}(z+dz)$
 - tension en bas: $-\vec{T}(z)$



Loi de la quantité de mouvement: $dm \vec{a} = \vec{T}(z+dz) - \vec{T}(z) + dm \vec{g}$

Selon Oy: $\mu dz \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(z, t) = T(z+dz) \sin \alpha(z+dz, t) - T(z) \sin \alpha(z, t)$
 $= \frac{\partial}{\partial z} (T(z) \sin \alpha(z, t)) dz$

Pour de petites déformations: $\sin \alpha \approx \alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial h}{\partial z}$

D'où: $\mu \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(z, t) = \frac{\partial}{\partial z} (T(z) \frac{\partial h}{\partial z}(z, t))$

22. On a: $\mu \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} = T \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \mu g \frac{\partial h}{\partial z}$

On évalue: $\frac{|\mu g \frac{\partial h}{\partial z}|}{|T \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}|} \sim \frac{\mu g \frac{a}{\lambda}}{\mu g L \frac{a}{\lambda^2}} = \frac{\lambda}{L}$

On pourra négliger le terme en $\mu g \frac{\partial h}{\partial z}$ devant le terme $T \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}$ si: $\lambda \ll L$

23. On a: $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}$
 $\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial H(z, t)}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial z} \frac{dz}{dz} = \frac{\partial H}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{Lz}} = \frac{\partial H}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{Lz}}$
 $\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{Lz}} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{Lz}} \right) \frac{dz}{dz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{Lz}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{Lz}}$
 $= \left(\frac{1}{\sqrt{Lz}} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \frac{\partial H}{\partial z} \left(-\frac{1}{2\sqrt{Lz}^3} \right) \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{Lz}} = \frac{1}{4L^2 z^2} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - \frac{1}{4L^2 z^3} \frac{\partial H}{\partial z}$

L'équation: $\rho \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \rho g z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}$ devient (avec $z = LZ^2$):

$$\rho \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \rho g \cdot LZ^2 \left[\frac{1}{4LZ^2} \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} - \frac{1}{4LZ^3} \frac{\partial H}{\partial Z} \right]$$

d'où: $\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{g}{4L} \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} - \frac{g}{4LZ} \frac{\partial H}{\partial Z}$

24. On évalue: $\frac{\left| \frac{g}{4LZ} \frac{\partial H}{\partial Z} \right|}{\left| \frac{g}{4L} \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} \right|} = \frac{\left| \frac{\partial H}{\partial Z} \right|}{\left| Z \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} \right|} \sim \frac{\sqrt{\frac{a}{L}}}{1 \cdot \frac{a}{\left(\sqrt{\frac{\lambda}{L}}\right)^2}} = \sqrt{\frac{\lambda}{L}}$ en prenant: $Z \sim 1$; $dZ \sim \sqrt{\frac{\lambda}{L}}$; $dH \sim a$

On pourra négliger le terme en $\frac{\partial H}{\partial Z}$ si: $\lambda \ll L$

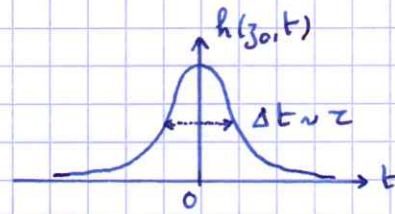
On a alors: $\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{g}{4L} \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2}$ d'où: $c_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{L}}$

25. A.N: $c_0 = 1,6 \text{ s}^{-1}$

26. $h(z_0, t)$ est une gaussienne dont la largeur temporelle est de l'ordre de τ .

⇒ extension "spatiale" en variable Z : $c_0 \tau$
 ⇒ extension spatiale en variable $z = LZ^2$:

$$\lambda = L(c_0 \tau)^2$$



Puisque $c_0 \tau \ll 1$, on a bien $\lambda \ll L$

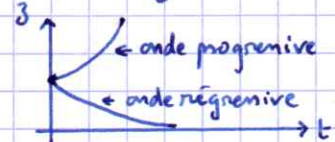
27. Onde progressive: ce que l'on voit en Z à t = ce qu'il y avait en Z_0 à $t - \frac{Z-Z_0}{c_0}$ ($Z > Z_0$)

$$\Rightarrow H(Z, t) = H(Z_0, t - \frac{Z-Z_0}{c_0}) = h(z_0, t - \frac{\sqrt{z} - \sqrt{z_0}}{\sqrt{L} c_0})$$

donc: $h^+(z, t) = a e^{-\left(t - \frac{\sqrt{z} - \sqrt{z_0}}{\sqrt{L} c_0}\right)^2 / \tau^2}$

Onde régressive: ce que l'on voit en Z à t = ce qu'il y avait en Z_0 à $t - \frac{Z_0 - Z}{c_0}$ ($Z < Z_0$)

donc: $h^-(z, t) = a e^{-\left(t - \frac{\sqrt{z_0} - \sqrt{z}}{\sqrt{L} c_0}\right)^2 / \tau^2}$



28. Le maxima de $h^+(z, t)$ est obtenu pour: $t - \frac{\sqrt{z} - \sqrt{z_0}}{\sqrt{L} c_0} = 0 \Rightarrow z_{\text{max}} = (\sqrt{z_0} + \sqrt{L} c_0 t)^2$

Sur la figure 7 les courbes ont bien l'air de varier en t^2 . L'onde progressive atteint le haut de la corde à $t = 0,2 \text{ s}$ puis se propage ensuite vers le bas après s'être réfléchi.

De même pour l'onde régressive: $z_{\text{max}} = (\sqrt{z_0} - \sqrt{L} c_0 t)^2$. Le bas de la corde est atteint en $0,4 \text{ s}$.

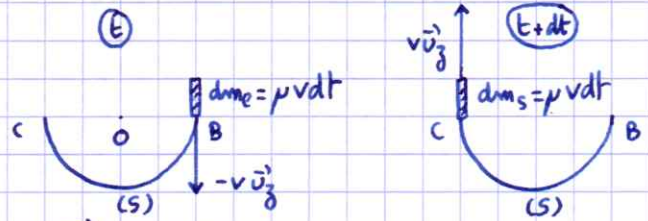
29. $H(Z, t)$ varie en $t \pm \frac{Z-Z_0}{c_0} \Rightarrow$ les courbes sont linéaires sur la figure 8

30. $\Delta Z = 1 - 0,7 = 0,3$ est parcouru en $\Delta t = 0,2 \text{ s} \Rightarrow c_0 = \frac{0,3}{0,2} = 1,5 \text{ s}^{-1}$

C'est à peu près égal à la valeur théorique.

3. Propagation d'une onde transverse le long d'une corde en défilement

31. Système ouvert (S): la corde entre C et B
 Système fermé (S*) = (S)_t + dm_e
 = (S)_{t+dt} + dm_s



Régaliléen

Loi de la quantité de mouvement à (S*): $\frac{d\vec{P}(S^*)}{dt} = \vec{T}(B) + \vec{T}(C) - \mu \pi R g \vec{u}_z$

$$\frac{d\vec{P}(S^*)}{dt} = \frac{\vec{P}_{(S^*)}(t+dt) - \vec{P}_{(S^*)}(t)}{dt} = \frac{\vec{P}_{(S)}(t+dt) + \vec{P}_{dm_s} - \vec{P}_{(S)}(t) - \vec{P}_{dm_e}}{dt} \quad (\vec{P}_{(S)}(t+dt) = \vec{P}_{(S)}(t) \text{ car régime stationnaire})$$

$$= \frac{dm_s \vec{v} - dm_e (-\vec{v})}{dt} = \frac{2 dm_s \vec{v}}{dt} = 2 \mu v^2 \vec{u}_z$$

Loi de la quantité de mouvement selon Oz : $2\mu v^2 = T_B + T_C - \mu \pi R g$

$$\Rightarrow \boxed{T_B + T_C = 2\mu v^2 + \mu \pi R g}$$

Loi du moment cinétique en O à (S*): $\frac{d\vec{L}(S^*)_{(O)}}{dt} = \vec{M}_{\vec{T}(B)}(O) + \vec{M}_{\vec{T}(C)}(O) + \vec{M}_{\text{pois}}(O)$

• $\vec{M}_{\text{pois}}(O) = \vec{OG} \wedge (-\mu \pi R g \vec{u}_z) = \vec{0}$ car \vec{OG} selon \vec{u}_z

• $\vec{M}_{\vec{T}(B)}(O) = \vec{OB} \wedge \vec{T}(B) = R \vec{u}_y \wedge T_B \vec{u}_z = R T_B \vec{u}_x$

• $\vec{M}_{\vec{T}(C)}(O) = \vec{OC} \wedge \vec{T}(C) = -R \vec{u}_y \wedge T_C \vec{u}_z = -R T_C \vec{u}_x$

• $\frac{d\vec{L}(S^*)_{(O)}}{dt} = \frac{\vec{L}_{dm_s}(O) - \vec{L}_{dm_e}(O)}{dt}$ or: $\vec{L}_{dm_s}(O) = \vec{OC}' \wedge dm_s \vec{v}$
 $\vec{L}_{dm_e}(O) = \vec{OB} \wedge dm_e (-\vec{v}) = -\vec{OC} \wedge dm_s (-\vec{v}) = \vec{L}_{dm_s}(O)$
 $= \vec{0}$

donc: $0 = R(T_B - T_C) \Rightarrow \boxed{T_B = T_C}$

On en déduit: $2T_B = 2\mu v^2 + \mu \pi R g \Rightarrow \boxed{T_B \approx \mu v^2}$ si $v^2 \gg Rg$

32. La célérité $c(z) = \sqrt{\frac{TM}{\mu}}$ est mesurée dans le référentiel où la corde n'a pas de mouvement de μ défilement selon Oz .
 Dans le référentiel R lié au laboratoire, la loi de composition des vitesses fait intervenir la vitesse d'entraînement: $\vec{v}_e = v \vec{u}_z$ ou $\vec{v}_e = -v \vec{u}_z$ selon le sens de propagation de l'onde par rapport au sens de défilement de la corde

donc: $c^+(z) = \sqrt{\frac{TM}{\mu}} + v$ pour une onde qui va dans le même sens que la corde

$c^-(z) = \sqrt{\frac{TM}{\mu}} - v$ pour une onde qui va dans le sens opposé à celui de la corde

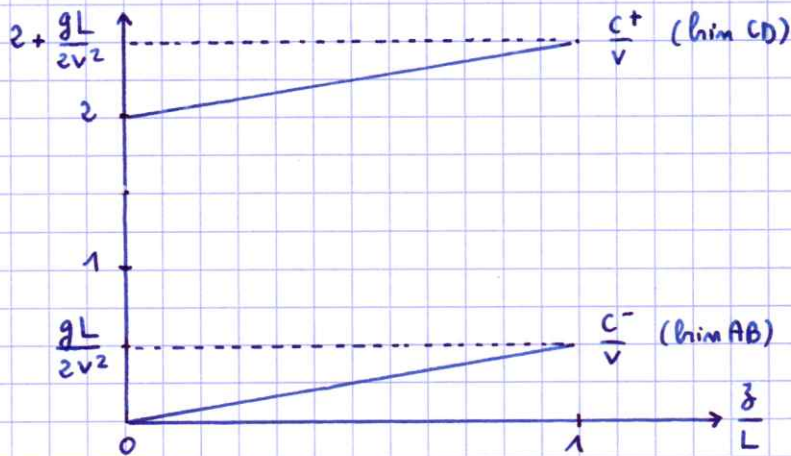
Évaluation de TM: pour le lim MB on a: $0 = T(M) - T_B - \mu g z$

$$\Rightarrow T(M) = \mu v^2 + \mu g z = \mu(v^2 + g z)$$

donc: $c^+(z) = \sqrt{v^2 + gz} + v$ $c^-(z) = \sqrt{v^2 + gz} - v$

On a: $\frac{c^+}{v} = \sqrt{1 + \frac{gz}{v^2}} + 1$ $\frac{c^-}{v} = \sqrt{1 + \frac{gz}{v^2}} - 1$
 $= \sqrt{1 + \frac{gL}{v^2} \frac{z}{L}} + 1$ $= \sqrt{1 + \frac{gL}{v^2} \frac{z}{L}} - 1$
 $\approx 1 + \frac{gL}{2v^2} \frac{z}{L} + 1$ $\approx 1 + \frac{gL}{2v^2} \frac{z}{L} - 1$
 $= 2 + \frac{gL}{2v^2} \frac{z}{L}$ $\approx \frac{gL}{2v^2} \frac{z}{L}$

On: $\frac{gL}{v^2} = \frac{10}{100} = 0,1 \ll 1$



(figure non à l'échelle car $\frac{gL}{2v^2} = 5 \cdot 10^{-2}$)

33

