

1. Ondes de surface

1. Le cylindre est soumis à : son poids $- \rho_c \pi \frac{D^2}{4} L g \vec{u}_y$

la poussée d'Archimède : $\rho \frac{1}{2} \pi \frac{D^2}{4} L g \vec{u}_y$

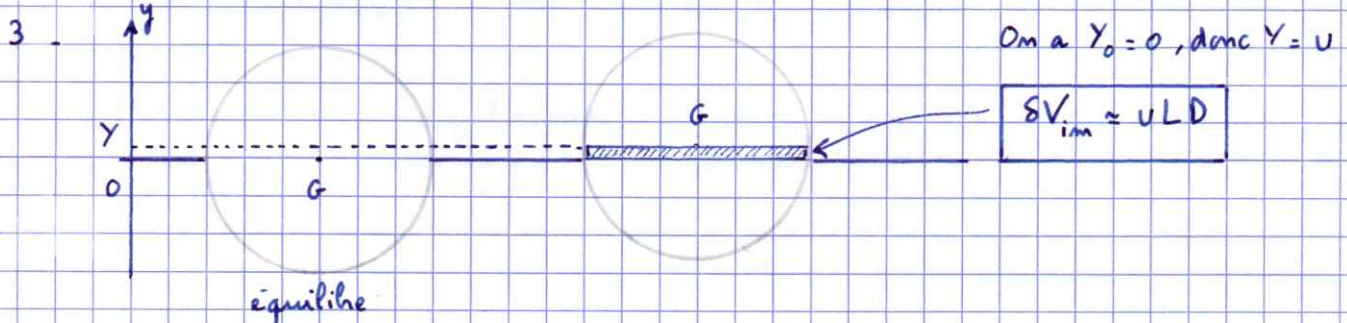
A l'équilibre : $-\rho_c \pi \frac{D^2}{4} L g + \rho \frac{1}{2} \pi \frac{D^2}{4} L g = 0 \Rightarrow \rho_c = \frac{\rho}{2}$ A.N. : $\rho_c = 500 \text{ kg s}^{-1}$

2. Il n'y a pas de mouvement selon Oz donc L ne joue aucun rôle.

Les paramètres du problème sont : g, D, ρ, ρc

ρc étant choisi en fonction de ρ, on peut penser que la masse volumique n'intervient pas

$[\omega_0^2] = T^{-2}$ On peut poser : $\omega_0^2 = \frac{g}{D}$ en s⁻²



4. Loi de la quantité de mouvement pour le flotteur, selon Oy, dans R galiléen :

$$m \ddot{u} = -mg + \rho \left[\frac{1}{2} \pi \frac{D^2}{4} L - SV_{im} \right] g$$

$$\rho_c \pi \frac{D^2}{4} L \ddot{u} = -\rho ULDg \quad \text{avec : } \rho_c = \frac{\rho}{2}$$

$$\frac{\pi D}{8} \ddot{u} = -g u$$

$$\Rightarrow \ddot{u} + \frac{8g}{\pi D} u = 0 \quad \text{On pose : } \omega_0 = \sqrt{\frac{8g}{\pi D}}$$

5. $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ A.N. : $f_0 = 2,1 \text{ Hz}$

6. Pseudo-période entre $t \approx 0,76 \text{ s}$ et $t \approx 1,28 \text{ s}$: $T = 0,52 \text{ s} \Rightarrow f_{exp} = \frac{1}{T} = 1,9 \text{ Hz}$

Amplitude initiale : $u_0 = -10 \text{ mm}$

On voit principalement 3 oscillations, donc : $Q \approx 3$

7. f_{exp} voisin et inférieur à f_0

8. La vitesse de l'eau par rapport au cylindre est l'opposée de la vitesse du cylindre par rapport à l'eau. On prend comme vitesse caractéristique $|v|$

$$Re = \frac{\rho |v| D}{\eta} = \frac{\rho v D}{\eta}$$

On évalue $|\dot{y}|$ lors de remontée initiale du flotteur: $\dot{y} = \frac{3,8 \cdot 10^{-3} - (-10 \cdot 10^{-3})}{0,76 - 0,48} \approx 5 \cdot 10^{-2} \text{ ms}^{-1}$

donc: $Re = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,15}{10^{-6}} \approx 7500 \gg 1$ L'écoulement est turbulent

9. La force de traînée est en V^2 : $\vec{F}_T = -\frac{1}{2} \rho S C_x V^2 \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$ $C_x \approx 0,45$ pour une sphère
 $S = DL$: section droite

10. La force de rappel de la question 4 est: $-\rho V L D g$

donc: $K_{TR} = \frac{\frac{1}{2} \rho \cdot DL \cdot C_x \cdot V^2}{\rho V_0 L D g} \Rightarrow K_{TR} = \frac{C_x V^2}{2 V_0 g}$

11. $K_{TR} \approx \frac{0,5 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot 10^{-2} \cdot 10} \Rightarrow K_{TR} \approx 6 \cdot 10^{-3} \ll 1$

L'effet de traînée est faible. L'amortissement dû à la traînée est peu important: on devrait observer sur la figure 2 beaucoup plus d'oscillations. Ce n'est pas le cas donc la traînée n'est pas à l'origine de l'amortissement du mouvement du flotteur.

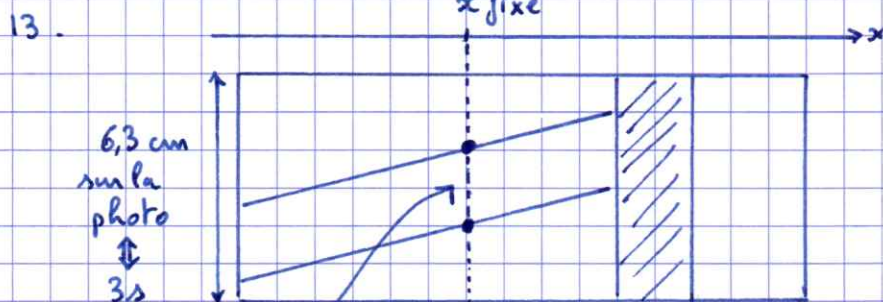
12. Au départ la ligne de référence en pointillés se trouve légèrement en dessous de l'interface eau/air \rightarrow couleur bleu clair

• Si la ligne de référence passe nettement en dessous de l'interface eau/air, cela signifie qu'il y a une vague au dessus \rightarrow couleur bleu foncé

• Si la ligne de référence passe en dessous de l'interface eau/air, cela signifie qu'elle est dans un creux \rightarrow couleur blanche

Une ligne oblique bleue foncée représente une vague qui se propage depuis le flotteur vers le bord de la cuve.

Une ligne oblique blanche représente un creux qui se propage de la même façon.



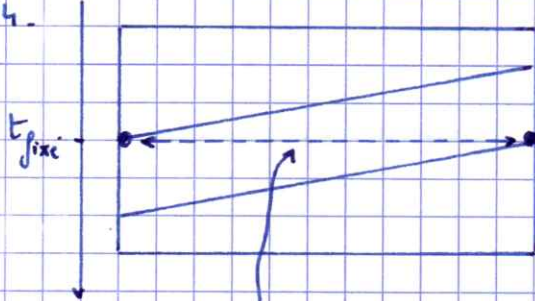
on mesure environ 1 cm entre deux vagues qui passent à la même abscisse x fixée

\Rightarrow cela correspond à une durée $T'_{exp} = \frac{1}{6,3} \cdot 3 = 0,48 \text{ s}$

c'est la pseudo-période des oscillations

$\Rightarrow f'_{exp} = \frac{1}{T'_{exp}} \approx 2,1 \text{ Hz}$

14.



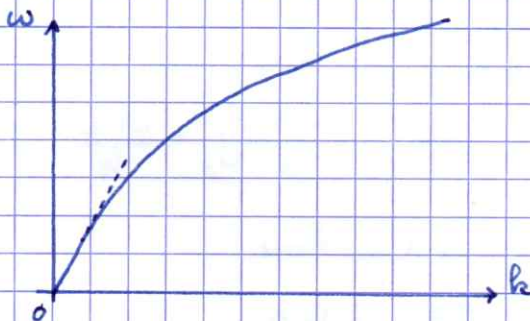
on mesure 1,5 cm sur la photo pour le diamètre du flotteur qui vaut 15 cm
 => photo à l'échelle 1/10

on mesure environ 7,5 cm sur la photo entre deux vagues à t_{fixe}
 => cela correspond à une distance de 75 cm
 => puisque c'est la distance entre deux vagues successives, c'est la longueur d'onde

=> $\lambda_{exp} = 0,75 \text{ m}$

15. $c_{exp} = \lambda_{exp} \cdot f'_{exp}$ A.N: $c_{exp} = 1,50 \text{ m.s}^{-1}$

16. $k \rightarrow 0$: $\tan(kH) \approx kH \Rightarrow \omega^2 \approx gH k^2 \Rightarrow \omega \approx \sqrt{gH} k$ droite passant par l'origine
 $k \rightarrow +\infty$: $\tan(kH) \approx 1 \Rightarrow \omega^2 \approx gk \Rightarrow \omega \approx \sqrt{gk}$



17. Milieu non dispersif si $v_{cp} = \frac{\omega}{k}$ est indépendant de ω => c'est vérifié pour $k \rightarrow 0$, plus précisément pour $kH \ll 1$

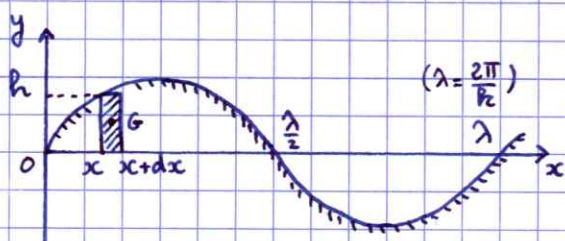
18. c_{exp} : célérité d'une onde réelle => $c_{exp} = v_g$

19. D'après la question 16: $\omega \approx \sqrt{gH} k \Rightarrow \frac{\omega}{k} = \sqrt{gH} = c$ constante

Le milieu est non dispersif: $c = \sqrt{gH}$ A.N: $c = \sqrt{10 \cdot 0,2} = 1,4 \text{ m.s}^{-1}$

C'est assez proche de la valeur obtenue à la question 15.

20.



Petite masse entre x et $x+dx$: $\rho dx \cdot L \cdot h(x,t)$
 Son centre d'inertie est à la cote $\frac{h(x,t)}{2}$
 => énergie potentielle $\rho dx \cdot L \cdot h(x,t) \cdot \frac{h(x,t)}{2} \cdot g$

L'énergie potentielle de l'eau entre 0 et $\frac{\lambda}{2}$: $E_{p1} = \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \rho L g \frac{h^2(x,t)}{2} dx$
 $= \frac{1}{2} \rho L g A^2 \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \sin^2(\Omega t - kx) dx$

$$\int_0^{\frac{\lambda}{2}} \sin^2(\Omega_0 t - kx) dx = \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos 2(\Omega_0 t - kx)) dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin 2(\Omega_0 t - kx)}{2k} \right]_0^{\frac{\lambda}{2}} = \frac{\lambda}{4}$$

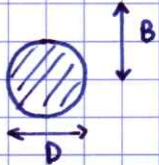
donc: $E_{p1} = \frac{1}{8} \rho L g A^2 \lambda$

Par rapport à l'énergie potentielle nulle à l'équilibre, il faut retrancher l'énergie E_{p2} potentielle négative de la masse d'eau qui n'est plus présente entre $\frac{\lambda}{2}$ et λ
On a $E_{p2} = -E_{p1}$

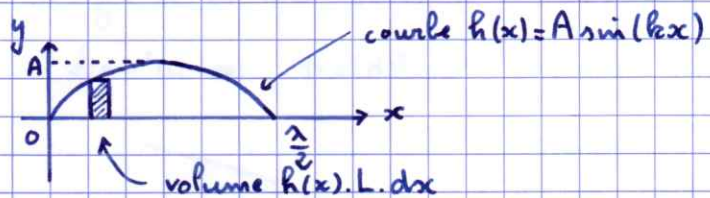
Donc: $E_p = E_{p1} - E_{p2} = 2E_{p1} \Rightarrow E_p = \frac{1}{4} \rho L g A^2 \lambda$

21. Cette énergie potentielle traverse une section verticale en un temps $T = \frac{2\pi}{\Omega_0}$

Donc: $\Phi_p = \frac{E_p}{T} = \frac{1}{4} \rho L g A^2 \frac{\lambda}{T} = c$ d'où: $\Phi_p = \frac{1}{4} \rho L g A^2 c$

22.  En une demi-période, le flotteur monte et descend de B
 \Rightarrow volume balayé = 2 · BLD

On cherche le volume d'une bosse:



$$\text{volume d'une bosse} = \int_0^{\frac{\lambda}{2}} A \sin(kx) L dx = AL \left[-\frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^{\frac{\lambda}{2}} = \frac{2AL}{k} \quad (k \frac{\lambda}{2} = \pi)$$

D'après l'énoncé: volume balayé = 2 x volume d'une bosse

$$2BLD = \frac{4AL}{k} = \frac{4AL}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)} = \frac{2AL\lambda}{\pi} \Rightarrow A = \frac{\pi BD}{\lambda}$$

23. Le mouvement du flotteur est décrit par: $Y(t) = B \sin \omega_0 t$

\Rightarrow énergie cinétique du flotteur: $E_c = \frac{1}{2} m \dot{Y}^2 = \frac{1}{2} (\rho_c \pi \frac{D^2}{4} L) B^2 \omega_0^2 \cos^2 \omega_0 t$
 $= \frac{1}{8} \rho_c \pi D^2 L B^2 \cdot \frac{8g}{\pi D} \cos^2 \omega_0 t$
 $= \rho_c D L B^2 g \cos^2 \omega_0 t$

Le flotteur est soumis à la force de rappel: $-\rho_v L D g Y = -\rho Y L D g$

\Rightarrow énergie potentielle du flotteur: $E_p = \frac{1}{2} \rho L D g Y^2 = \rho_c L D g B^2 \sin^2 \omega_0 t \quad (\rho_c = \frac{\rho}{2})$

L'énergie mécanique du flotteur est donc: $E = E_c + E_p$

$$= \rho_c L D g B^2 (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t)$$

$$= \rho_c L D g B^2$$

Cette énergie diminue au cours du temps à cause des deux flux d'énergie potentielle qui partent de chaque côté du flotteur:

$$\frac{dE}{dt} = -2\Phi_p$$

$$\Rightarrow \rho_c \cancel{L} D g \cdot 2B \dot{B} = -2 \cdot \frac{1}{4} \rho_l g A^2 c \quad \text{or: } \rho_c = \frac{\rho}{2} \quad \text{et } A = \frac{\pi B D}{\lambda}$$

$$\Rightarrow 2 D B \dot{B} = - \left(\frac{\pi B D}{\lambda} \right)^2 c$$

$$\Rightarrow 2 \dot{B} = - \frac{\pi^2 B D}{\lambda^2} c$$

$$\Rightarrow \dot{B} + \frac{\pi^2 D c}{2 \lambda^2} B = 0$$

$$\tau = \frac{2 \lambda^2}{\pi^2 D c}$$

24. Pour un oscillateur amorti, l'enveloppe exponentielle décroissante est en $e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$

Ici la décroissance de l'amplitude B des oscillations est en $e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$\Rightarrow \tau = \frac{2Q}{\omega_0}$$

$$\text{donc: } Q = \frac{\omega_0 \tau}{2} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} = \frac{\pi}{T} \cdot \frac{2 \lambda^2}{\pi^2 D c} = \frac{2 c^2 T^2}{\pi T D c}$$

$$\text{soit: } Q = \frac{2 c T}{\pi D}$$

$$25. \quad Q = \frac{2 \cdot 1,4 \cdot 0,5}{\pi \cdot 0,15} \Rightarrow \underline{Q = 3} \quad \text{On retrouve l'estimation de la question 6.}$$

2 - Ondes internes

$$26. \quad \text{Equilibre au flotteur à l'altitude } Y_0 : 0 = -\rho_c \frac{\pi D^2}{4} L g + \rho_o(Y_0) \frac{\pi D^2}{4} L g$$

$$\Rightarrow \rho_c = \rho_o(Y_0) = \rho_o(0) - \bar{\rho} \frac{Y_0}{\ell}$$

$$\Rightarrow \underline{Y_0 = \ell \frac{\rho_o(0) - \rho_c}{\bar{\rho}}}$$

Loi de la quantité de mouvement au flotteur:

$$\rho_c \frac{\pi D^2}{4} L \ddot{Y} = -\rho_c \frac{\pi D^2}{4} L g + \rho_o(Y) \frac{\pi D^2}{4} L g$$

$$\rho_c \ddot{Y} = -\rho_c g + \left[\rho_o(0) - \bar{\rho} \frac{Y}{\ell} \right] g$$

$$= -\rho_c g + \left[\rho_o(0) - \bar{\rho} \frac{Y_0}{\ell} - \bar{\rho} \frac{Y}{\ell} \right] g$$

$$\rho_c \ddot{Y} = -\bar{\rho} \frac{Y}{\ell} g$$

$$\text{soit: } \ddot{Y} + \frac{\bar{\rho} g}{\rho_c \ell} Y = 0$$

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{\bar{\rho} g}{\rho_c \ell}}$$

27. Puisque la masse volumique de l'eau varie de façon affine entre 0 et H, on en déduit que: $\bar{\rho} = \rho_0 \left(\frac{H}{2}\right)$

Or $Y_0 = \frac{H}{2} \Rightarrow \bar{\rho} = \rho_0(Y_0)$

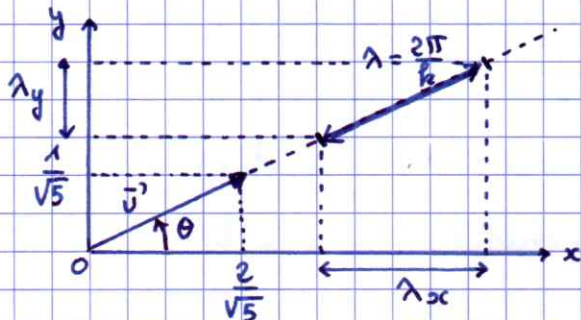
Or $\rho_0(Y_0) = \rho_c \Rightarrow \bar{\rho} = \rho_c$

D'où: $\Omega_0^2 = \frac{g}{l}$

28. $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$ A.N: $T_0 = 6,3 \cdot 10^3$ s

29. $\vec{k} = k_x \vec{u}_x + k_y \vec{u}_y = k \vec{u}$ ($k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$) $\Rightarrow \vec{u} = \frac{\vec{k}}{k} = \frac{2k_y \vec{u}_x + k_y \vec{u}_y}{\sqrt{4k_y^2 + k_y^2}}$

$\vec{u} = \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{u}_x + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{u}_y$



On a: $\lambda_x = \lambda \cos \theta = \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{k_x}{k} \Rightarrow \lambda_x = \frac{2\pi k_x}{k_x^2 + k_y^2}$ de même: $\lambda_y = \frac{2\pi k_y}{k_x^2 + k_y^2}$

30. (1): équation $\text{div } \vec{v} = 0$ traduisant l'incompressibilité

(2): équation de conservation de la masse linéarisée

(3) et (4): projections de l'équation d'Euler linéarisée

31. (1) $\Rightarrow -ik_x A_{vx} - ik_y A_{vy} = 0 \Rightarrow k_x A_{vx} + k_y A_{vy} = 0$

(2) $\Rightarrow i\omega A_p + A_{vy} \left(-\frac{\bar{\rho}}{l}\right) = 0 \Rightarrow A_p = A_{vy} \frac{\bar{\rho}}{i\omega l}$

(3) $\Rightarrow \bar{\rho} i\omega A_{vx} = +ik_x A_p \Rightarrow A_p = \frac{\bar{\rho} \omega}{k_x} A_{vx}$

(4) $\Rightarrow \bar{\rho} i\omega A_{vy} = ik_y A_p - g A_p \Rightarrow \bar{\rho} \omega A_{vy} = k_y A_p + ig A_p$

32. On reporte (2) et (3) dans (4): $\bar{\rho} \omega A_{vy} = \frac{k_y \bar{\rho} \omega}{k_x} A_{vx} + \frac{g \bar{\rho}}{\omega l} A_{vy}$

$(\omega^2 - \frac{g}{l}) A_{vy} = \frac{k_y}{k_x} \omega^2 A_{vx}$
 $= \frac{k_y}{k_x} \omega^2 \left(-\frac{k_y}{k_x} A_{vy}\right)$ d'après (1)

$(\omega^2 - \frac{g}{l}) k_x^2 = -k_y^2 \omega^2$

d'où: $\omega^2 (k_x^2 + k_y^2) = \frac{g}{l} k_x^2$

$\alpha^2 = \frac{g}{l}$

33. On a: $\cos \theta = \frac{k_x}{k} = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}$ d'où: $\omega^2 = \frac{g}{l} \cos^2 \theta$

34. Pour les lames pulsations (ω proche de 0) on a: $\cos^2 \theta \approx 0 \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{2}$

\Rightarrow Les lames pulsations se propagent verticalement

On a: $\omega \leq \omega_{\max} = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ω_{\max} est obtenue pour $\cos \theta = \pm 1 \Rightarrow \theta = 0$ ou π

\Rightarrow Les pulsations proches de ω_c se propagent horizontalement

35. $\vec{v}_\phi = \frac{\omega}{k} \vec{v} = \frac{\omega}{k^2} \vec{k}$ avec $\omega = \frac{\alpha k_x}{k}$ d'après la relation de dispersion
 $= \frac{\alpha k_x}{k^3} \vec{k}$

donc: $\vec{v}_\phi = \frac{\alpha}{(k_x^2 + k_y^2)^{3/2}} [k_x^2 \vec{v}_x + k_x k_y \vec{v}_y]$

36. $v_{g_x} = \frac{d\omega}{dk_x} = \frac{d}{dk_x} \left(\frac{\alpha k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \right) = \frac{\alpha}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} - \frac{1}{2} \alpha k_x \cdot \frac{2k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}^3} = \frac{\alpha k_y^2}{(k_x^2 + k_y^2)^{3/2}}$

$v_{g_y} = \frac{d\omega}{dk_y} = \frac{d}{dk_y} \left(\frac{\alpha k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \right) = -\frac{1}{2} \alpha k_x \cdot \frac{2k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}^3} = -\frac{\alpha k_x k_y}{(k_x^2 + k_y^2)^{3/2}}$

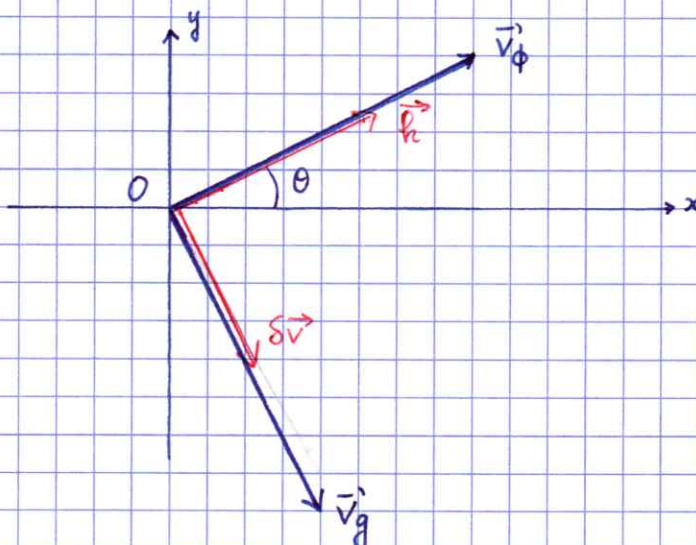
donc: $\vec{v}_g = \frac{\alpha}{(k_x^2 + k_y^2)^{3/2}} [k_y^2 \vec{v}_x - k_x k_y \vec{v}_y]$

37. $\vec{v}_g \cdot \vec{v}_\phi = \frac{\alpha^2}{(k_x^2 + k_y^2)} (k_x^2 k_y^2 - k_x^2 k_y^2) = 0 \Rightarrow \vec{v}_g \perp \vec{v}_\phi$

Les expressions des questions 35 et 36 montrent que v_{ϕ_x} et v_{g_x} sont de même signe

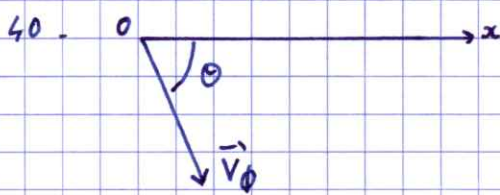
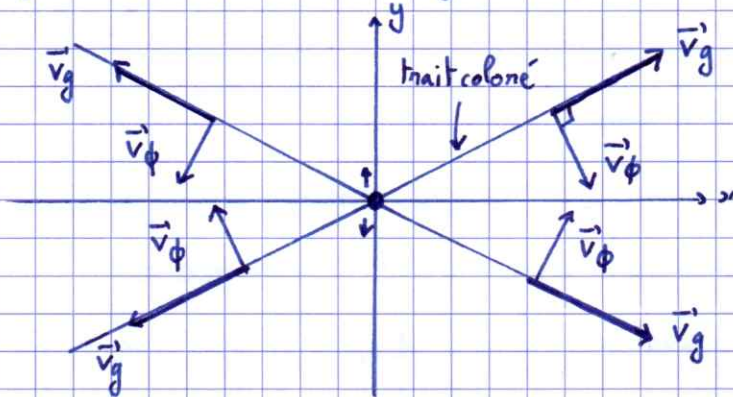
$k_x A_{v_x} + k_y A_{v_y} = 0 \Rightarrow k_x \delta v_x + k_y \delta v_y = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \delta \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \delta \vec{v}$

38.



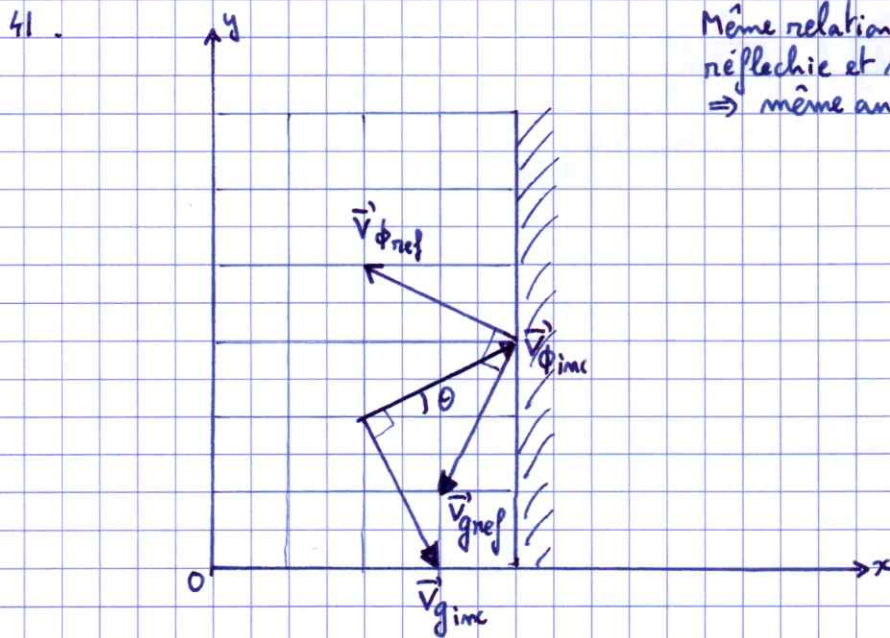
(v_{ϕ_x} et $v_{g_x} > 0$)

39. Un trait oblique coloré représente un état ondulatoire donné, donc un "plan de phase"
 $\Rightarrow \vec{v}_\phi$ est perpendiculaire aux plans de phase, donc perpendiculaire aux traits colorés
 $\Rightarrow \vec{v}_g \perp \vec{v}_\phi$ est parallèle aux traits colorés. Les traits colorés sont les rayons.
 L'énergie se propage à la vitesse \vec{v}_g et rayonne à partir du cylindre oscillant central.
 De plus v_{gx} et $v_{\phi x}$ sont de même signe, ce qui conduit à la figure suivante:

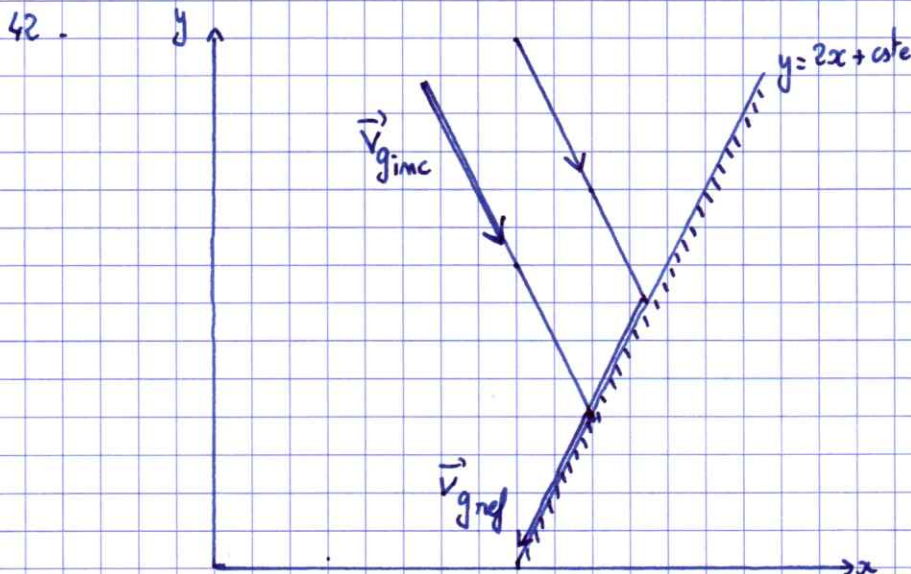


On lit sur la figure $\theta = 60^\circ$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{2}} \cos \theta$ A.N: $\omega = 0,45 \text{ rad s}^{-1}$



Même relation de dispersion pour l'onde réfléchi et même pulsation ω
 \Rightarrow même angle θ



Les deux rayons réfléchis tangent la paroi et sont confondus.

L'énergie transportée par les deux rayons incidents est donc concentrée après réflexion dans un faisceau plus mince.