

I Questions préliminaires et ordres de grandeurs

1.  $Re = \frac{\|\rho_c (\vec{v}' \cdot \text{grad}) \vec{v}'\|}{\|\eta_c \Delta \vec{v}'\|} = \frac{\rho_c U L}{\eta_c}$  donc:  $Re = \frac{UL}{\nu_c}$

A.N:  $Re \approx \frac{10^{-7} \cdot 10^{-5}}{10^{-3}} = 10^{-9} \ll 1$  Le terme convectif de l'équation de Navier-Stokes est mégligeable

2.  $\left| \rho_c \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} \right| \approx \left| \eta_c \Delta \vec{v}' \right| \Rightarrow \rho_c \frac{U}{\tau_{inertie}} \approx \eta_c \frac{U}{L^2} \Rightarrow \tau_{inertie} \approx \frac{\rho_c L^2}{\eta_c}$

A.N:  $\tau_{inertie} \approx \frac{10^3 \cdot 10^{-10}}{1} = 10^{-7} \text{ s} \ll 1 \text{ ms}$

Le terme inertiel varie rapidement au cours des expériences de rhéologie cellulaire donc on ne peut pas le négliger

3. L'équation de Navier-Stokes devient:  $\rho_c \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = \eta_c \Delta \vec{v}'$  ou  $\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = \nu_c \Delta \vec{v}'$

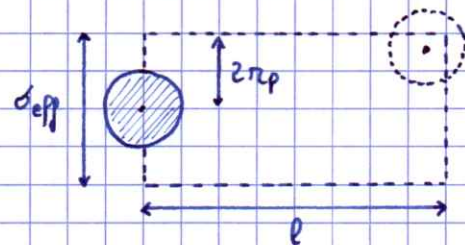
C'est une équation de diffusion:  $\nu_c$  est un coefficient de diffusion

II Suivi de particule unique et viscosité du cytoplasme

II.A Approche microscopique de la diffusion dans un gaz

4. On a:  $l = \bar{v} \cdot \tau_{col}$

Une particule subit une collision si le centre d'une autre particule se situe à l'intérieur du cylindre de volume  $\sigma_{eff} \cdot l$ . Il s'agit donc du volume moyen dont dispose une particule



$\Rightarrow$  il y a en moyenne une particule dans le volume  $\sigma_{eff} \cdot l$

La densité particulaire  $n$  vérifie alors:  $n = \frac{1}{\sigma_{eff} \cdot l}$  donc:  $l = \frac{1}{n \sigma_{eff}}$

5. Les particules qui entrent dans  $V$  pendant  $dt$  sont contenues dans le cylindre d'abscisse  $x-l$ , de base  $S$ , de hauteur  $\bar{v} dt$  donc de volume  $S \bar{v} dt$   
Leur nombre est:

$dN_e = n(x-l) \cdot S \bar{v} dt$

Les particules qui sortent de  $V$  pendant  $dt$  sont contenues dans le cylindre d'abscisse  $x+l$ , de base  $S$ , de hauteur  $\bar{v} dt$  donc de volume  $S \bar{v} dt$   
Leur nombre est:

$dN_s = n(x+l) \cdot S \bar{v} dt$

On a:  $\Phi_{diff,x} = \Phi_{diff,e} - \Phi_{diff,s} = \frac{1}{S} \frac{dN_e}{dt} - \frac{1}{S} \frac{dN_s}{dt} = \bar{v} [n(x-l) - n(x+l)]$

Or  $n(x)$  varie lentement donc:  $n(x+l) - n(x-l) \approx \frac{dn}{dx} \cdot 2l$

D'où:  $\Phi_{diff,x} = -2l \bar{v} \frac{dn}{dx}$

6. Loi de Fick:  $\vec{\Phi}_{cp} = -D \text{grad } n = -D \frac{dn}{dx} \vec{e}_x = -\frac{1}{3} \bar{v} l \frac{dn}{dx} \vec{e}_x \Rightarrow \boxed{D = \frac{1}{3} \bar{v} l}$

7. On a:  $\bar{v}^2 = \frac{3k_B T}{m}$  et  $D = \frac{1}{3} \bar{v} \cdot l = \frac{1}{3} \bar{v}^2 \tau_{col}$  d'où:  $\boxed{D = \frac{k_B T}{m} \tau_{col}}$

## II.B Mouvement brownien et modèle de marche au hasard

8.  $\vec{AP}_{i+1} = \vec{AP}_i + \vec{P}_i \vec{P}_{i+1} \Rightarrow \overline{AP_{i+1}^2} = \overline{AP_i^2} + \overline{P_i P_{i+1}^2} + 2 \overline{AP_i \cdot P_i P_{i+1}}$   
 $\Rightarrow \overline{AP_{i+1}^2} = \overline{AP_i^2} + d_i^2 + 2 \overline{AP_i \cdot \vec{d}_i}$

Donc:  $\boxed{\langle AP_{i+1}^2 \rangle = \langle AP_i^2 \rangle + \langle d_i^2 \rangle + \langle 2 \overline{AP_i \cdot \vec{d}_i} \rangle}$

9. On a:  $\langle 2 \vec{d}_i \cdot \vec{AP}_i \rangle = \langle 2 \|\vec{d}_i\| \|\vec{AP}_i\| \cos \theta_i \rangle$   
 $= 2 \langle \|\vec{d}_i\| \rangle \cdot \langle \|\vec{AP}_i\| \rangle \cdot \langle \cos \theta_i \rangle$  car grandeurs indépendantes  
 $= 0$  car  $\langle \cos \theta_i \rangle = 0$  par isotropie

On a:  $\langle d_i^2 \rangle = \langle d_{ix}^2 + d_{iy}^2 + d_{iz}^2 \rangle = \langle d_{ix}^2 \rangle + \langle d_{iy}^2 \rangle + \langle d_{iz}^2 \rangle = 3l^2$

Donc:  $\boxed{\langle AP_{i+1}^2 \rangle = \langle AP_i^2 \rangle + 3l^2}$

10. On a:  $\langle \|\vec{s}\|^2 \rangle = \langle AB^2 \rangle$   
 $= \langle AP_N^2 \rangle$   
 $= \langle AP_{N-1}^2 \rangle + 3l^2$   
 $= \langle AP_{N-2}^2 \rangle + 2 \cdot (3l^2)$   
 $= \vdots$   
 $= \langle AP_1^2 \rangle + (N-1)(3l^2)$   
 $= \langle AP_0^2 \rangle + N \cdot (3l^2) \quad \text{or } \langle AP_0^2 \rangle = \langle AA^2 \rangle = 0$

donc:  $\boxed{\langle \|\vec{s}\|^2 \rangle = 3Nl^2}$

11. On a:  $t = N \tau_{col}$  d'où:  $\boxed{\langle \|\vec{s}\|^2 \rangle = 3 \frac{t}{\tau_{col}} \cdot l^2}$

12. D'après l'hypothèse ergodique:  $\langle \|\vec{s}\|^2 \rangle = \overline{\|\vec{s}\|^2} \Rightarrow \frac{3t l^2}{\tau_{col}} = 6Dt \Rightarrow \boxed{D = \frac{1}{2} \frac{l^2}{\tau_{col}}}$   
 A un facteur près, c'est la même expression qu'au 6.

## II.C Particule brownienne mésoscopique et modèle de Langevin

13. Théorème d'équipartition de l'énergie:  $\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow \frac{1}{2} m (\langle \dot{x}^2 \rangle + \langle \dot{y}^2 \rangle + \langle \dot{z}^2 \rangle) = \frac{3}{2} k_B T$

Or  $\langle \dot{x}^2 \rangle = \langle \dot{y}^2 \rangle = \langle \dot{z}^2 \rangle$  par isotropie  $\Rightarrow \frac{3}{2} m \langle \dot{x}^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow \boxed{\langle \dot{x}^2 \rangle = \frac{k_B T}{m}}$

14. PFD à une particule:  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - 6\pi\eta r_p \vec{v} \Rightarrow m \dot{x} = f_x - 6\pi\eta r_p x \dot{x}$  selon Ox

On multiplie par x:  $m x \dot{x} = x f_x - 6\pi\eta r_p x^2 \dot{x}$

Or  $\frac{d}{dt}(x \dot{x}) = x \ddot{x} + \dot{x}^2$  d'où:  $m \left( \frac{d}{dt}(x \dot{x}) - \dot{x}^2 \right) = x f_x - 6\pi\eta r_p x^2 \dot{x}$

On prend la moyenne sur un grand nombre de particules:

$$m \left\langle \frac{d(x\dot{x})}{dt} \right\rangle - m \langle \dot{x}^2 \rangle = \langle x f_x \rangle - 6\pi\eta r_p \langle x\dot{x} \rangle$$

$$m \frac{d}{dt} \langle x\dot{x} \rangle - m \frac{k_B T}{m} = \langle x \cdot \underbrace{\langle f_x \rangle}_{=0} \rangle - 6\pi\eta r_p \langle x\dot{x} \rangle$$

$$\text{d'où: } \boxed{\frac{d}{dt} \langle x\dot{x} \rangle + \frac{6\pi\eta r_p}{m} \langle x\dot{x} \rangle = \frac{k_B T}{m}}$$

15. Solution:  $\langle x\dot{x} \rangle = A e^{-t/\tau} + \frac{k_B T}{6\pi\eta r_p}$  avec:  $\tau = \frac{m}{6\pi\eta r_p}$

Pour  $t \gg \tau$ :  $\langle x\dot{x} \rangle = \frac{k_B T}{6\pi\eta r_p}$  = valeur en régime permanent

16. Pour  $t \gg \tau$ :  $\langle x\dot{x} \rangle = \frac{k_B T}{6\pi\eta r_p}$  or:  $\langle x\dot{x} \rangle = \left\langle \frac{d(\dot{x}^2)}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \dot{x}^2 \rangle$

Donc:  $\frac{d}{dt} \langle \dot{x}^2 \rangle = \frac{k_B T}{3\pi\eta r_p}$  s'intègre en:  $\langle \dot{x}^2 \rangle = \frac{k_B T}{3\pi\eta r_p} t + \underbrace{\langle \dot{x}^2 \rangle(t=0)}_{=0}$

On a bien:  $\langle \dot{x}^2 \rangle = 2Dt$  avec:  $\boxed{D = \frac{k_B T}{6\pi\eta r_p}}$

## II.D Rhéologie passive du cytoplasme cellulaire par suivi de particule unique

17. On a:  $s^2(t) = \langle x_p^2 + y_p^2 \rangle = \langle x_p^2 \rangle + \langle y_p^2 \rangle = 2Dt + 2Dt$

Donc:  $s^2(t) = 4Dt$  Droite de pente  $4D$

La mesure de la pente permet d'accéder à  $D$  puis

à  $\eta_c$  par la formule:  $D = \frac{k_B T}{6\pi\eta_c r_p}$

18. pente =  $\frac{(0,2 \cdot 0,05 \cdot 10^{-6})^2}{(\frac{1}{8})} = 6 \cdot 10^{-16} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \Rightarrow D = 1,5 \cdot 10^{-16} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$$\Rightarrow \eta_c = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 310}{6\pi \cdot 10^{-6} \cdot 1,5 \cdot 10^{-16}}$$

$$\Rightarrow \eta_c = 1,5 \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

19. On suppose que la dérive a lieu selon  $Ox$ :

$$x_p(t) = x_{\text{aléatoire}}(t) + \bar{v}_{\text{mot}} \cdot t$$

D'où:  $s^2(t) = \langle x_p^2(t) \rangle + \langle y_p^2(t) \rangle$

$$= \langle x_{\text{aléatoire}}^2 \rangle + \bar{v}_{\text{mot}}^2 t^2 + 2\bar{v}_{\text{mot}} t \underbrace{\langle x_{\text{aléatoire}} \rangle}_{=0} + \langle y_p^2(t) \rangle$$

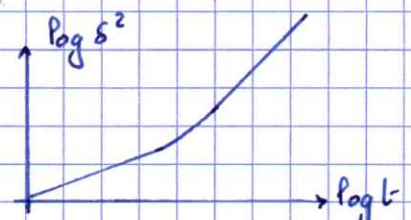
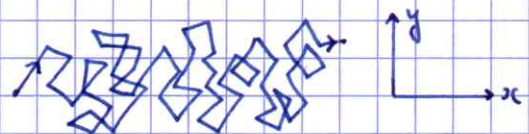
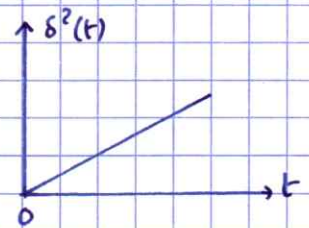
$$= 2Dt + \bar{v}_{\text{mot}}^2 t^2 + 2Dt$$

Donc:  $\boxed{s^2(t) = 4Dt + \bar{v}_{\text{mot}}^2 t^2}$

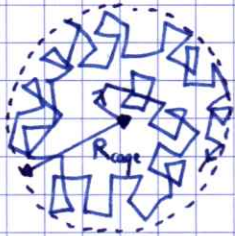
Au temps courts le terme en  $t^2$  l'emporte sur le terme en  $t^2$

$\Rightarrow s^2(t) \approx 4Dt$  le mouvement est diffusif

En échelle log-log: droite de pente 1 aux temps courts  
droite de pente 2 aux temps longs



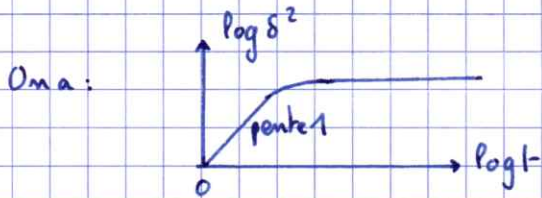
20.



Pour  $t \gg \frac{R_{cage}^2}{4D}$  :  $\delta^2(t) \approx \alpha R_{cage}^2 = \text{cste}$   
Le mouvement est restreint dans une cage de rayon  $R_{cage}$  (en supposant  $\alpha \approx 1$ )

Pour  $t \ll \frac{R_{cage}^2}{4D}$  :  $\delta^2(t) \approx \alpha R_{cage}^2 \left(1 - \left(1 - \frac{4Dt}{R_{cage}^2}\right)\right) \approx 4Dt$

Le mouvement est diffusif sans confinement aux temps courts



### III. Expérience d'indentation et d'élasticité de la cellule

#### III.A Déformation d'un solide élastique

21. Conservation du volume :  $\pi n_0^2 L_0 = \pi (n_0 + \Delta n)^2 (L_0 + \Delta L)$   
 $= \pi n_0^2 \left(1 + \frac{\Delta n}{n_0}\right)^2 L_0 \left(1 + \frac{\Delta L}{L_0}\right)$

$$1 \approx \left(1 + 2 \frac{\Delta n}{n_0}\right) \left(1 + \frac{\Delta L}{L_0}\right)$$

$$1 \approx 1 + 2 \frac{\Delta n}{n_0} + \frac{\Delta L}{L_0}$$

Donc :  $\frac{\Delta n}{n_0} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L_0}$      $\nu = -\frac{1}{2}$

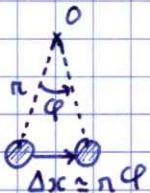
22.  $E$  en  $\text{Pa} = \text{N} \cdot \text{m}^{-2} \Rightarrow [E] = \text{ML}^{-1} \text{T}^{-2}$

23.  $\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\pi n_0^2 L_0 \left(1 + 2 \frac{\Delta n}{n_0}\right) \left(1 + \frac{\Delta L}{L_0}\right) - \pi n_0^2 L_0}{\pi n_0^2 L_0} = 2 \frac{\Delta n}{n_0} + \frac{\Delta L}{L_0} = -2\nu \frac{\Delta L}{L_0} + \frac{\Delta L}{L_0}$   
 $= \frac{\Delta L}{L_0} (1 - 2\nu) = \epsilon_{//} (1 - 2\nu)$

On  $\epsilon_{//} = \frac{\sigma}{E}$  donc :  $\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\sigma}{E} (1 - 2\nu)$

24.  $\sigma = G \epsilon_{//} = G \tan \theta \approx G \theta$  donc :  $\frac{F}{S} \approx G \theta$  soit :  $G = \frac{F}{S \theta}$

25. On a :  $\epsilon = \frac{\Delta x}{L} \Rightarrow \epsilon \approx \frac{r \varphi}{L}$



26.  $\sigma = G \epsilon_{//} \Rightarrow \frac{dF}{dS} = G \frac{r \varphi}{L}$  donc :  $d\vec{F} = G \frac{r \varphi}{L} dS \vec{e}_\varphi$

27. Moment élémentaire en O :  $d\vec{M}(O) = \vec{OM} \wedge d\vec{F} = G \frac{r^2 \varphi}{L} dS \vec{e}_z$  avec :  $dS = r dr d\alpha$   
 ..  $(\alpha \in [0, 2\pi])$   
 $\vec{M} = \iint_{\text{surface}} d\vec{M}(O) = \iint_{\text{surface}} \frac{G r^2 \varphi}{L} dS \vec{e}_z = \frac{G \varphi}{L} \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\alpha \vec{e}_z$   
 $= \frac{G \varphi}{L} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R \cdot 2\pi \vec{e}_z$

donc :  $\vec{M} = \frac{\pi G R^4}{2L} \varphi \vec{e}_z$      $C = \frac{\pi G R^4}{2L}$

III. B Indentation par pointe AFM

28. PFD appliqué à la pointe en équilibre:  $\vec{0} = \vec{F}_{\text{cellule} \rightarrow \text{pointe}} + \vec{F}_{\text{levier} \rightarrow \text{pointe}}$

$$\text{On } \vec{F}_{\text{cellule} \rightarrow \text{pointe}} = -\vec{F}_{\text{pointe} \rightarrow \text{cellule}} = -F \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{F}_{\text{levier} \rightarrow \text{pointe}} = k_{\text{AFM}} \xi \vec{e}_z$$

En projection selon  $Oz$ , on a donc:  $F = k_{\text{AFM}} \xi$

La mesure de la position de l'extrémité du levier et de la position de la pointe permet d'accéder à  $\xi$  donc à  $F$ .

29. La cellule 2 subit la même indentation que la cellule 1 pour une force  $F$  plus faible. C'est la cellule 2 qui est la plus déformable.


$$\text{On a } E^* = \frac{F}{C \delta^2}$$

$$\text{Pour la cellule 2: } E^* = \frac{10^{-9}}{0,5 \cdot (2 \cdot 10^{-6})^2} = 500 \text{ Pa}$$

$$\text{Pour la cellule 1: } E^* = \frac{2,1 \cdot 10^{-9}}{0,5 \cdot (2 \cdot 10^{-6})^2} = 1050 \text{ Pa}$$

30. Le trajet aller n'est pas le même que le trajet retour: c'est un phénomène d'hystérésis.

Le travail de la force  $F$  sur l'aller et retour est:  $W = \oint F d\delta = \text{aire entre les deux courbes}$   
 $W \neq 0$  engendre une dissipation d'énergie due à la viscosité de la cellule.  
 En effet le théorème de l'énergie cinétique pour une évolution quasi-statique donne:  $0 = W + W_{\text{int}} \Rightarrow W_{\text{int}} = -W < 0$  correspond à la dissipation visqueuse.


III. C Oscillations de la pointe AFM et réponse harmonique

$$31. \text{On a: } F(\delta) - F_0 = CE^*(\delta^2 - \delta_0^2) = CE^*(\delta - \delta_0)(\delta + \delta_0)$$

$$\text{On } \delta \text{ est proche de } \delta_0 \text{ pour de petites amplitudes d'oscillations: } F(\delta) - F_0 = 2CE^*\delta_0(\delta - \delta_0)$$

$$32. G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E^*(1-\nu^2)}{2(1+\nu)} = \frac{1-\nu}{2} \frac{F(\delta) - F_0}{2C\delta_0(\delta - \delta_0)} \quad \text{donc: } G = \frac{1-\nu}{4C\delta_0} \frac{F(\delta) - F_0}{\delta - \delta_0}$$

$$33. \text{On a: } \underline{Z} = \frac{4C\delta_0}{1-\nu} (G' + jG'')$$

$$\text{Donc: } \underline{F} = \frac{4C\delta_0}{1-\nu} (G' + j\omega \frac{G''}{\omega}) \underline{\delta}$$

$$\text{En notation réelle: } F = \frac{4C\delta_0}{1-\nu} G' \delta + \frac{4C\delta_0}{1-\nu} \frac{G''}{\omega} \frac{d\delta}{dt}$$

force proportionnelle à l'indentation  $\delta$   
 $\Rightarrow G'$  est associée à l'élasticité de la cellule

force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse d'indentation  $\dot{\delta}$   
 $\Rightarrow G''$  est associée à la viscosité de la cellule

$$\text{On a: } \tan \varphi = \text{Arg}(\underline{Z}) = \text{Arg}(\underline{G}) \Rightarrow \tan \varphi = \frac{G''}{G'}$$

$\varphi = 0$  :  $G'' = 0$  La cellule a un comportement élastique  
 $\varphi = \frac{\pi}{2}$  :  $G' = 0$  La cellule a un comportement visqueux

34. Quand la fréquence augmente,  $\varphi$  augmente car l'ellipse est de moins en moins aplatie. On en déduit que la cellule est de moins en moins élastique et de plus en plus visqueuse.

#### IV Modèles visco-élastiques du cytoplasme cellulaire

##### IV.A Cas élémentaires : solide de Hooke et fluide newtonien

35. On a directement :  $\boxed{E(t) = \frac{\sigma_0}{E}}$

36. On a :  $\sigma_0 = \eta \frac{dE}{dt}$  d'où :  $\boxed{E(t) = \frac{\sigma_0 t}{\eta}}$  ( $E(0) = 0$ )

##### IV.B Cas harmonique et aspects énergétiques

37. Solide de Hooke :  $\underline{G} = \frac{\sigma}{\dot{\epsilon}} = E$  car  $\sigma = E \dot{\epsilon}$  donc :  $\boxed{\underline{G} = E \quad G' = E \quad G'' = 0 \quad G_0 = E}$

$\underline{G}$  est un réel  $> 0$  donc :  $\underline{\varphi} = 0$

Fluide newtonien :  $\sigma = \eta \dot{\epsilon} \Rightarrow \underline{\sigma} = \eta i \omega \underline{\epsilon}$  donc :  $\boxed{\underline{G} = i \eta \omega \quad G' = 0 \quad G'' = \eta \omega \quad G_0 = \eta \omega}$

$\underline{G}$  imaginaire pur  $> 0$  donc :  $\underline{\varphi} = \frac{\pi}{2}$

38.  $\boxed{\delta W = \sigma d\epsilon}$  (en  $N \cdot m^{-2} = J \cdot m^{-3} \rightarrow$  c'est bien un travail par unité de volume)

39.  $\delta W = \sigma_0 \cos(\omega t + \varphi) d(\epsilon_0 \cos \omega t)$   
 $= \sigma_0 [\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi] \cdot (-\epsilon_0 \omega \sin \omega t dt)$   
 $= -\epsilon_0 \sigma_0 \omega [\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi] \sin \omega t dt$

donc :  $\boxed{\delta W = -\epsilon_0 \sigma_0 \omega \cos \varphi \cos \omega t \sin \omega t dt + \epsilon_0 \sigma_0 \omega \sin \varphi \sin^2 \omega t dt = \delta W_1 + \delta W_2}$

40.  $W_T = \int_0^T \delta W$  or :  $\int_0^T \cos \omega t \sin \omega t dt = 0$  et  $\int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{T}{2}$

donc :  $W_T = \epsilon_0 \sigma_0 \omega \sin \varphi \cdot \frac{T}{2}$

or :  $\omega T = 2\pi$  donc :  $\boxed{W_T = \pi \epsilon_0 \sigma_0 \sin \varphi}$

Solide de Hooke :  $\varphi = 0$  donc  $W_T = 0$

Fluide newtonien :  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  donc  $W_T = \pi \epsilon_0 \sigma_0$

$W_T$  est l'énergie volumique dissipée pendant une période par les frottements visqueux.

41.  $W_{1\frac{T}{4}} = \int_0^{\frac{T}{4}} -\epsilon_0 \sigma_0 \omega \cos \varphi \cos \omega t \sin \omega t dt = -\epsilon_0 \sigma_0 \omega \cos \varphi \left[ \frac{\sin^2 \omega t}{2\omega} \right]_0^{\frac{T}{4}} = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \sigma_0 \cdot \cos \varphi \underbrace{\sin^2 \left( \frac{\omega T}{4} \right)}_{=1}$

donc :  $\boxed{W_{1\frac{T}{4}} = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \sigma_0 \cos \varphi}$

Solide de Hooke :  $W_{1\frac{T}{4}} = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \sigma_0$

Fluide newtonien :  $W_{1\frac{T}{4}} = 0$

$W_{1\frac{T}{4}}$  est l'énergie volumique élastique emmagasinée pendant un quart de période

42.  $\sin \varphi = \frac{W_T}{\pi E_0 \sigma_0}$  et  $\cos \varphi = -\frac{2W_{1T/4}}{E_0 \sigma_0}$  donc :  $\tan \varphi = -\frac{W_T}{2\pi W_{1T/4}}$

$\tan \varphi$  mesure l'importance de l'énergie dissipée par viscosité ( $W_T$ ) par rapport à l'énergie élastique ( $W_{1T/4}$ )

IV. c Modèle de Kelvin-Voigt d'un fluide visco-élastique

43. Le ressort et l'amortisseur étant en parallèle, on a :
- même déformation pour les deux :  $\epsilon_{KV} = \epsilon_{el} = \epsilon_{visc}$
  - addition des forces donc des contraintes :  $\sigma_{KV} = \sigma_{el} + \sigma_{visc}$

donc :  $\sigma_{KV} = E \epsilon_{el} + \eta \dot{\epsilon}_{visc}$

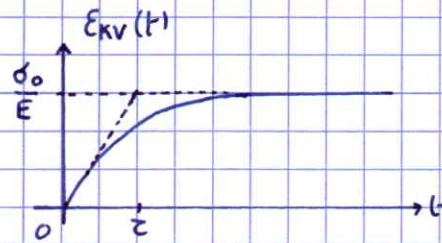
44. Cela se réécrit :  $\sigma_{KV} = E \epsilon_{KV} + \eta \frac{d\epsilon_{KV}}{dt}$

Soit :  $\frac{d\epsilon_{KV}}{dt} + \frac{\epsilon_{KV}}{\tau} = \frac{\sigma_{KV}}{\eta}$  avec :  $\tau = \frac{\eta}{E}$

45. Solution :  $\epsilon_{KV}(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{\sigma_0}{E}$

À  $t=0$  :  $0 = A + \frac{\sigma_0}{E}$

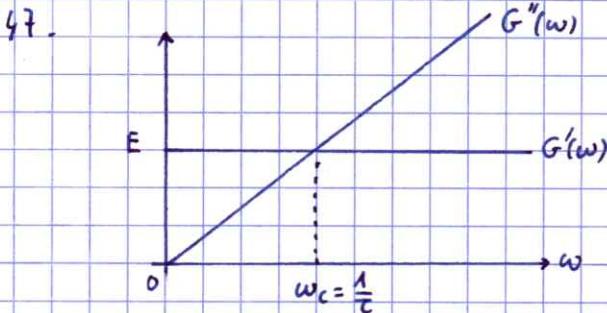
Donc :  $\epsilon_{KV}(t) = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-t/\tau})$



46. En notation complexe, l'équation différentielle :  $(i\omega + \frac{1}{\tau}) \underline{\epsilon}_{KV} = \frac{\sigma_{KV}}{\eta}$   
 $(1 + i\omega\tau) \underline{\epsilon}_{KV} = \frac{\tau}{\eta} \sigma_{KV} = \frac{\sigma_{KV}}{E}$

Donc :  $\underline{\sigma}_{KV} = E(1 + i\omega\tau) \underline{\epsilon}_{KV}$

On a :  $\underline{G}_{KV} = \frac{\sigma_{KV}}{\epsilon_{KV}}$  d'où :  $\underline{G}_{KV} = E(1 + i\omega\tau)$   $G'_{KV} = E$   $G''_{KV} = E\omega\tau$   $\tan \varphi = \omega\tau$



En basse fréquence (temps longs) :  $G' \gg G''$

La cellule a un comportement élastique (solide de Hooke)

En haute fréquence (temps courts) :  $G' \ll G''$

La cellule a un comportement visqueux (fluide newtonien)

48. Le modèle de Voigt-Kelvin est conforme au résultat de la question 34 : la cellule a une élasticité qui décroît et une viscosité qui croît lorsque la fréquence augmente.