

I Etude de la source laser

1. $E = E_2 - E_1 = 1,45 - 0,2 = 1,25 \text{ e.V} = 2 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Relation de Planck-Einstein: $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{hc}{E} = 1 \mu\text{m} \in \text{I.R}$

2. $E_s = (E_1 \sin \omega_1 t + E_2 \sin \omega_2 t)^2$
 $= E_1^2 \sin^2 \omega_1 t + E_2^2 \sin^2 \omega_2 t + 2E_1 E_2 \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t$
 $= E_1^2 \frac{1 - \cos 2\omega_1 t}{2} + E_2^2 \frac{1 - \cos 2\omega_2 t}{2} + E_1 E_2 [\cos(\omega_1 - \omega_2)t - \cos(\omega_1 + \omega_2)t]$

Les pulsations présentes dans le spectre de E_s sont: $2\omega_1, 2\omega_2, |\omega_1 - \omega_2|, \omega_1 + \omega_2$

Si les ondes incidentes sur le cristal sont celles issues du laser: $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$
 \Rightarrow on obtient la pulsation $2\omega_0$ en sortie donc la longueur d'onde $\frac{\lambda_0}{2}$

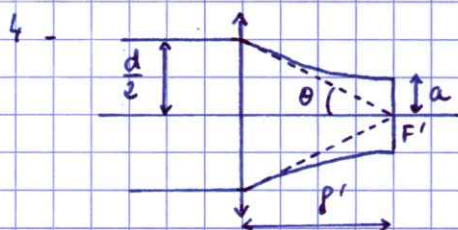
Si les ondes incidentes sur le cristal sont celles déjà sorties: $\omega_1 = \omega_2 = 2\omega_0$
 \Rightarrow on obtient la pulsation $4\omega_0$ en sortie donc la longueur d'onde $\frac{\lambda_0}{4}$

Si les ondes incidentes sont une issue du laser et une déjà sortie: $\omega_1 = \omega_0$ et $\omega_2 = 2\omega_0$
 \Rightarrow on obtient les pulsations $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, 4\omega_0$ en sortie donc $\lambda_0, \frac{\lambda_0}{2}, \frac{\lambda_0}{3}, \frac{\lambda_0}{4}$

Conclusion: Les longueurs d'onde accessibles sont $\lambda_0, \frac{\lambda_0}{2}, \frac{\lambda_0}{3}, \frac{\lambda_0}{4}$

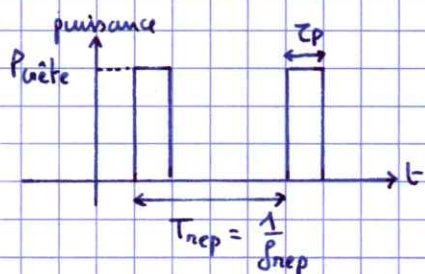
3. Le minimum d'absorbance est à $1000 \text{ nm} = 1 \mu\text{m}$
 On peut proposer comme fenêtre de transparence [$800 \text{ nm}; 1200 \text{ nm}$]

Parmi les longueurs d'onde de la question 2, seule $\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$ appartient à cette fenêtre



Propriété d'un faisceau gaussien: $\theta \approx \frac{\lambda_0}{\pi a}$
 Et aussi: $\tan \theta = \frac{d}{2f'} \approx \theta$

La surface de la tache focale est: $S = \pi a^2 = 1,3 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2$



On a: $P_{\text{moyen}} = \frac{\tau_p}{T_{\text{rep}}} \cdot P_{\text{crête}} = \tau_p \cdot f_{\text{rep}} \cdot P_{\text{crête}}$

On veut: $P_{\text{moyen}} \leq \Phi \cdot S$

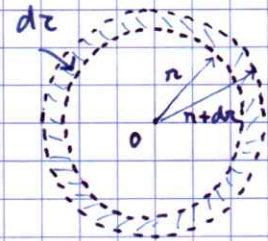
$\Rightarrow P_{\text{crête}} \leq \frac{\Phi S}{\tau_p \cdot f_{\text{rep}}}$ A.N: $P_{\text{crête}} \leq 25 \text{ W}$

II Génération photo-acoustique

5. L'énergie optique absorbée peut être convertie en chaleur
 Interactions lumière-matière: absorption, émission spontanée, émission induite

6. D'après la figure 2, l'absorbance est faible pour la longueur d'onde $\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$
 \Rightarrow l'eau n'absorbe pas l'impulsion laser

Premier principe de la thermodynamique entre t et $t+dt$ pour le volume $dZ = 4\pi r^2 dr$ compris entre les sphères de rayons r et $r+dr$:



$$dU = \delta Q_{\text{entrant}} \text{ en } r + \delta Q_{\text{entrant}} \text{ en } r+dr$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dt} = \Phi_{\text{entrant}} \text{ en } r + \Phi_{\text{entrant}} \text{ en } r+dr$$

$$\text{On a: } U = \rho \cdot 4\pi r^2 dr \cdot v(r,t) \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \rho \cdot 4\pi r^2 dr \frac{\partial v}{\partial t}(r,t) = \rho \cdot 4\pi r^2 dr c_p \frac{\partial T}{\partial t}(r,t)$$

$$\Phi_{\text{entrant}} \text{ en } r = j_Q(r,t) \cdot 4\pi r^2 \text{ et } \Phi_{\text{entrant}} \text{ en } r+dr = -j_Q(r+dr,t) \cdot 4\pi (r+dr)^2$$

$$\text{donc: } \rho \cdot 4\pi r^2 dr c_p \frac{\partial T}{\partial t}(r,t) = - [j_Q(r+dr,t) \cdot 4\pi (r+dr)^2 - j_Q(r,t) \cdot 4\pi r^2]$$

$$= -4\pi \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_Q(r,t)) \cdot dr$$

$$\Rightarrow \rho c_p r^2 \frac{\partial T}{\partial t}(r,t) = - \frac{\partial}{\partial r} (r^2 (-\kappa \frac{\partial T}{\partial r}(r,t)))$$

$$\text{Finalement: } \boxed{\frac{\partial T}{\partial t}(r,t) = \frac{\kappa}{\rho c_p} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial T}{\partial r}(r,t))}$$

7. Dans la nanoparticule il faut ajouter: $\delta Q_{\text{absorbé}} = P_V(r,t) \cdot 4\pi r^2 dr \cdot dt$

$$\text{Finalement: } \boxed{\frac{\partial T}{\partial t}(r,t) = \frac{K_g}{\rho_g c_{p_g}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial T}{\partial r}(r,t)) + \frac{P_V(r,t)}{\rho_g c_{p_g}}}$$

8. On définit les diffusivités thermiques en $m^2 s^{-1}$: $D_e = \frac{\kappa}{\rho c_p}$ et $D_g = \frac{K_g}{\rho_g c_{p_g}}$

$$\text{On a alors: } \boxed{\tau_e = \frac{a^2}{D_e}} \text{ et } \boxed{\tau_g = \frac{a^2}{D_g}}$$

$$\text{A.N: } \tau_e \approx 10^{-7} \text{ s ; } \tau_g \approx 10^{-10} \text{ s}$$

$$\text{On a: } \boxed{\tau_e \gg \tau_p \gg \tau_g}$$

$\tau_g \ll \tau_p$: L'or s'échauffe très vite pendant l'impulsion laser. Sa température est alors uniforme

$\tau_e \gg \tau_p$: La chaleur accumulée dans la particule d'or pendant la durée τ_p va ensuite diffuser plus lentement dans l'eau pendant la durée τ_e .

Le retour à l'équilibre thermique va se faire avant l'impulsion suivante car $\frac{1}{\tau_{rep}} = 1 \text{ ms} \gg \tau_e$

9. On suppose $P_V(r,t) = P_V = \text{constante}$. Volume élémentaire en sphériques: $dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$

$$\int_{\text{nano}} \frac{\partial T}{\partial t}(r,t) dV = \frac{K_g}{\rho_g c_{p_g}} \int_{\text{nano}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial T}{\partial r}(r,t)) dV + \int_{\text{nano}} \frac{P_V}{\rho_g c_{p_g}} dV$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\text{nano}} T(r,t) dV = \frac{K_g}{\rho_g c_{p_g}} \int_{\text{a}} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial T}{\partial r}(r,t)) \cdot dr \sin\theta d\theta d\varphi + \frac{P_V}{\rho_g c_{p_g}} \cdot \frac{4\pi a^3}{3}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{4\pi a^3}{3} T_g(t) \right) = \frac{K_g}{\rho_g c_{p_g}} \int_0^a \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial T}{\partial r}(r,t)) dr \cdot \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi + \frac{P_V}{\rho_g c_{p_g}} \cdot \frac{4\pi a^3}{3}$$

$$\frac{4\pi a^3}{3} \frac{dT_g}{dt} = \frac{K_g}{\rho_g c_{p,g}} \left[r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right]_0^a \cdot 4\pi + \frac{P_v}{\rho_g c_{p,g}} \cdot \frac{4\pi a^3}{3}$$

$$= \frac{K_g}{\rho_g c_{p,g}} a^2 \frac{\partial T}{\partial r}(a,t) \cdot 4\pi + \frac{P_v}{\rho_g c_{p,g}} \cdot \frac{4\pi a^3}{3}$$

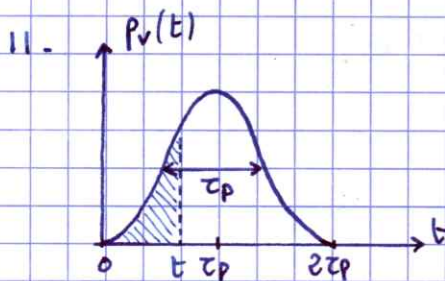
Finalement: $\frac{dT_g(t)}{dt} = \frac{3K_g}{\rho_g c_{p,g} a} \frac{\partial T}{\partial r}(a,t) + \frac{P_v}{\rho_g c_{p,g}}$

10. Pour $r > a$: $\alpha_g = \frac{3K_g}{\rho_g c_{p,g} a}$ et $\beta_g = \frac{1}{\rho_g c_{p,g}}$

Pour $r < a$: On a: $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2}$ d'après le formulaire

L'équation de la question 6 devient: $\frac{\partial T}{\partial t}(r,t) = \frac{K}{\rho c_p} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2}$

Soit: $\frac{\partial (rT)}{\partial t} = \frac{K}{\rho c_p} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2}$ donc: $D = \frac{K}{\rho c_p}$



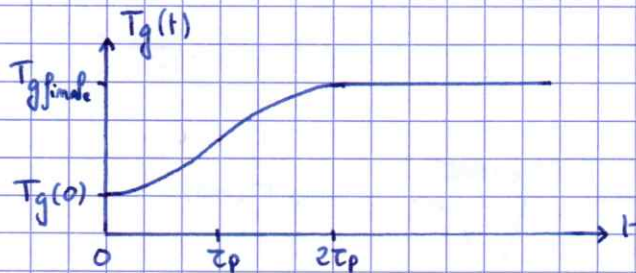
On néglige le terme $\frac{\partial T}{\partial r}(a,t)$ dans l'équation de la question 10

$$\frac{dT_g(t)}{dt} = \beta_g P_v(t)$$

en intégrant: $T_g(t) = T_g(0) + \beta_g \int_0^t P_v(t) dt$

aire sous la courbe
entre les instants 0 et t

On en déduit:



12. La diffusivité thermique dans l'eau est $D = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ en $m^2 s^{-1}$

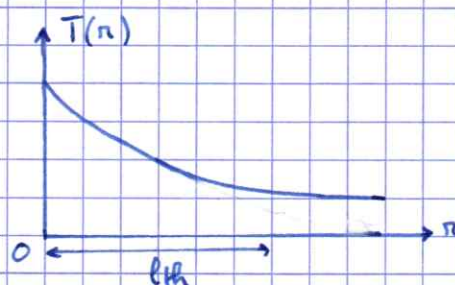
Après l'impulsion laser et avant la suivante, la durée caractéristique de diffusion est $\frac{1}{f_{rep}}$

On a: $D = \frac{l_{th}^2}{\left(\frac{1}{f_{rep}}\right)}$ d'où: $l_{th} = \sqrt{D}$

Pour $r > a$, en supposant le régime quasi-stationnaire car $\frac{1}{f_{rep}} \gg \tau_c$: $\frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} \approx 0$

$$\Rightarrow rT = Ar + B$$

Donc: $T = A + \frac{B}{r}$



III. Génération acoustique et formation d'image

13. $\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial p_a}{\partial t} + \rho_0 \text{div} \vec{v}_a = 0}$

14. Equation d'Euler: $(\rho_0 + \rho_a) \left[\underbrace{\frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t}}_{\text{ordre 2}} + \underbrace{(\vec{v}_a \cdot \text{grad}) \vec{v}_a}_{\text{ordre 2 (car } \|\vec{v}_a\| \ll c_0)} \right] = -\text{grad}(P_0 + p_a)$

Il reste: $\boxed{\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} = -\text{grad} p_a}$

15. On applique l'opérateur div à l'équation d'Euler linéarisée: $\rho_0 \text{div} \left(\frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} \right) = -\text{div}(\text{grad} p_a)$

$\Rightarrow \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{v}_a) = -\Delta p_a$

$\Rightarrow -\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = -\Delta p_a$ d'où: $\boxed{\Delta p_a = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \rho_0 \beta \frac{\partial^2 T_a}{\partial t^2}}$

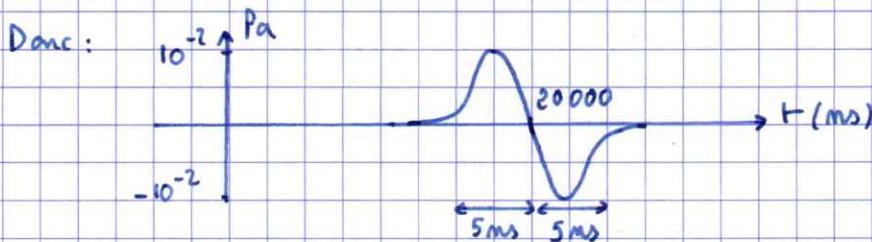
16. Si source ponctuelle en 0 \Rightarrow solution en onde sphérique progressive
 \Rightarrow l'amplitude décroît en $\frac{1}{r}$ à grande distance

17. On lit une durée de perturbation de 15 ms $\Rightarrow f = 6,7 \cdot 10^7$ Hz
 $\Rightarrow \lambda = \frac{c_0}{f} = 23 \mu\text{m}$

On a $\lambda \gg a$ donc la source (nanoparticule) peut être supposée ponctuelle

18. L'onde parcourt $3 \cdot 10^{-2}$ m à la vitesse de $1500 \text{ ms}^{-1} \Rightarrow$ retard $\frac{3 \cdot 10^{-2}}{1500} = 20 \mu\text{s} = 2 \cdot 10^{-7}$ ms

Amplitude en $r = a$: $\frac{A}{a} = 3 \text{ kPa} \Rightarrow$ Amplitude en $r = 3 \text{ cm}$: $\frac{A}{r} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-7}}{3 \cdot 10^{-2}} = 10^{-2} \text{ Pa}$



19. Le signal émis avec une période $\frac{1}{f_p}$ parcourt la distance $d = \frac{c_0}{f_p} = 1,5$ entre deux émissions

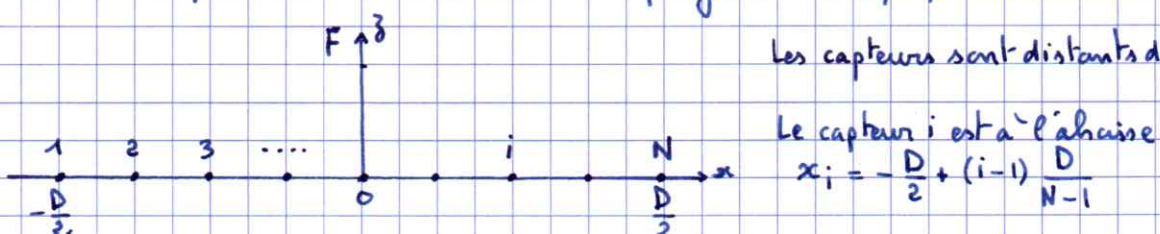
On peut explorer une profondeur de 1,5 m ce qui est largement suffisant pour le corps humain

20. Le signal émis pendant une durée $3\tau_p = 15 \text{ ns}$ a une extension spatiale $\lambda = c_0 3\tau_p = 23 \mu\text{m}$
 Pour être distingués, deux nanoparticules doivent donc être espacées de $23 \mu\text{m}$

21. Un seul capteur ne donne qu'une image à une seule dimension. Or le milieu étudié est à trois dimensions.

22. ? La notion de pouvoir de résolution est hors-programme en optique.

23. Les capteurs sont distants de $\frac{D}{N-1}$



Le temps de propagation de F jusqu'au capteur i est: $t_i = \frac{\sqrt{x_i^2 + F^2}}{c_0}$

Le temps de propagation maximal jusqu'au capteur 1 (ou au capteur N) est: $t_{\max} = \frac{\sqrt{\frac{D^2}{4} + F^2}}{c_0}$

Pour synchroniser les signaux, il faut appliquer au capteur i le délai $t_{\max} - t_i$

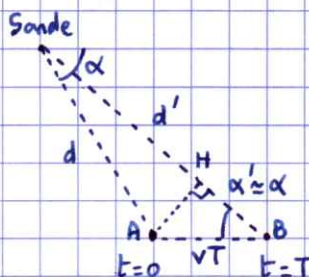
Plus faible délai: 0 pour les capteurs extrêmes

Plus long délai: $\frac{\sqrt{\frac{D^2}{4} + F^2}}{c_0} - \frac{F}{c_0}$ pour le capteur en $x=0$

La différence entre ces deux délais vaut: $\frac{\sqrt{\frac{D^2}{4} + F^2} - F}{c_0} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ s}$

IV Mesure de la vitesse du sang

24.



L'onde émise à $t=0$ arrive à la sonde S à $t_1 = \frac{d}{c_0}$

L'onde émise à $t=T$ arrive à la sonde S à $t_2 = \frac{d'}{c_0} + T$

La période mesurée par la sonde est: $T' = t_2 - t_1 = T + \frac{d' - d}{c_0}$

vT étant petit devant d et d' , on a: $d' - d \approx HB = vT \cos \alpha$

Donc: $T' = T \left(1 + \frac{v \cos \alpha}{c_0}\right) \Rightarrow f' = f \left(1 + \frac{v \cos \alpha}{c_0}\right)^{-1} \approx f \left(1 - \frac{v \cos \alpha}{c_0}\right)$

D'où: $\Delta f \approx -f \frac{v \cos \alpha}{c_0}$

25. aorte: $v \approx 48 \text{ cm s}^{-1}$ capillaire: $v = 0,3 \text{ mm s}^{-1}$

26. $Re = \frac{\rho v D}{\eta}$ aorte: $Re \approx 3800$ capillaire: $Re \approx 2,4 \cdot 10^{-3}$

27. Invariance par rotation autour de $Oz \Rightarrow \vec{v}$ et P ne dépendent pas de θ
Ecoulement selon Oz : $\vec{v} = v_z(r, z) \vec{u}_z$

Ecoulement incompressible: $\text{div } \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \vec{v} = v_z(r) \vec{u}_z$

On néglige la pesanteur \Rightarrow P ne dépend pas de $r \Rightarrow P = P(z)$ uniforme sur toute section du cylindre

Ecoulement stationnaire: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ et on calcule: $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = (v_z \frac{\partial}{\partial z}) v_z(r) \vec{u}_z = \vec{0}$

L'équation de Navier-Stokes devient: $\vec{0} = -\text{grad} P + \eta \Delta \vec{v}$

$\Rightarrow \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{dP}{dz} = \text{constante} = K$
me dépend que de r me dépend que de z

donc: $P(z) = Kz + K'$ or $P(0) = P_e$ et $P(L) = P_s \Rightarrow P(z) = \frac{P_s - P_e}{L} z + P_e$

28. On a aussi: $\eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{P_s - P_e}{L} \Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{P_s - P_e}{\eta L} r \Rightarrow r \frac{dv_z}{dr} = \frac{P_s - P_e}{2\eta L} r^2 + A$

$$\Rightarrow \frac{dv_z}{dr} = \frac{P_s - P_e}{4\eta L} r + \frac{A}{r} \Rightarrow v_z = \frac{P_s - P_e}{4\eta L} r^2 + A \ln r + B$$

Conditions aux limites:

- v_z finie pour $r=0 \Rightarrow A=0$
- $v_z(R) = 0 \Rightarrow B = -\frac{P_s - P_e}{4\eta L} R^2$

Finalement: $v_z(r) = \frac{P_e - P_s}{4\eta L} (R^2 - r^2)$

Le débit volumique est: $q_v = \int_{\text{section}} v_z(r) \cdot r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{P_e - P_s}{4\eta L} (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi (P_e - P_s) \cdot R^4}{2\eta L}$

La vitesse moyenne est alors: $\bar{v} = \frac{q_v}{\pi R^2}$ donc: $\bar{v} = \frac{(P_e - P_s) R^2}{8\eta L}$

29. Erreur d'inertie (voir figure 4): $\xi = \frac{2D}{\rho \bar{v}^2 L} (P_e - P_s)$

Donc: $\xi = \frac{2D}{\rho \bar{v}^2 L} \cdot \frac{8\eta L \bar{v}}{R^2} = \frac{16D\eta}{\rho \bar{v} \left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{64\eta}{\rho \bar{v} D} = \frac{1}{Re}$ donc: $\xi = \frac{64}{Re}$

A.N: pour un capillaire $\xi = 2,7 \cdot 10^4$

$$\Delta P_{\text{cap}} = \frac{\rho \bar{v}^2 L}{2D} \cdot \xi = 720 \text{ Pa}$$

30. Pour l'aorte: $Re \approx 3800 \rightarrow$ on suppose l'écoulement complètement turbulent car $Re \gg 1$
 \rightarrow on lit $\xi \approx 0,1$ pour $Re \approx 4000$ sur le diagramme de Moody

A.N: $\Delta P_{\text{aorte}} = \frac{\rho \bar{v}^2 L}{2D} \cdot \xi \approx 100 \text{ Pa}$

31. On a: $D_v = \pi R^2 \cdot \bar{v} \Rightarrow R = \frac{\Delta P}{\pi R^2 \bar{v}}$

A.N: $R_{\text{capillaire}} = 7,6 \cdot 10^{15} \text{ Pa} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

$R_{\text{aorte}} = 6,6 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

Pour N capillaires en parallèle: $\frac{1}{R_{\text{cap totale}}} = \frac{N}{R_{\text{cap}}} \Rightarrow R_{\text{cap totale}} = \frac{R_{\text{capillaire}}}{N}$

On veut: $R_{\text{capillaire totale}} = R_{\text{aorte}} \Rightarrow N = \frac{R_{\text{capillaire}}}{R_{\text{aorte}}}$

A.N: $N \approx 10^{10}$ capillaires