

Chapitre 1

Techniques de démonstration

Objectifs du chapitre (liste non exhaustive) :

1. Connaître les différents types de raisonnements. Les utiliser avec rigueur.
2. Apprendre à énoncer clairement les hypothèses, les arguments, les objectifs d'une démonstration.
3. Apprendre à rédiger correctement (apprentissage de phrases types pour certaines démonstrations).

1 Logique

Définition 1.1 (Proposition)

Une *proposition* est un assemblage de mots qui admet une valeur de vérité : *vraie* ou *fausse*.

Définition 1.2 (Connecteurs élémentaires)

Il y a trois *connecteurs élémentaires*, qui permettent de créer des propositions à partir de propositions existantes. Ce sont (avec P et Q deux propositions)

1. **non** : ($\text{non } P$), qui est une proposition vraie si et seulement si P est fausse.
2. **ou** : (P ou Q), qui est une proposition vraie si *au moins* l'une des deux propositions P, Q est vraie, fausse sinon.
3. **et** : (P et Q) , qui est une proposition vraie si et seulement si les deux propositions P, Q sont vraies.

Remarque.

Le "ou" mathématique est un "ou" *inclusif*. Ce n'est pas celui de langage courant.

Proposition 1.3 (Table de vérité)

Voici la table de vérité de ces connecteurs élémentaires :

P	Q	non P	non Q	P ou Q	P et Q	non(P ou Q)	(non P) et (non Q)	non (P et Q)	(non P) ou (non Q)
V	V	F	F	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V	V	V

En particulier, la proposition " $\text{non}(P \text{ ou } Q)$ " a la même valeur de vérité que " $(\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$ ", et la proposition " $\text{non}(P \text{ et } Q)$ " a la même valeur de vérité que " $(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$ ". Ces propositions sont *identiques*, et on note

- $\text{non}(P \text{ ou } Q) \equiv (\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$
- $\text{non}(P \text{ et } Q) \equiv (\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$

Définition 1.4 (Implication, équivalence)

Soient P et Q deux propositions. On définit les propositions " $P \implies Q$ " (" P implique Q ") et " $P \iff Q$ " (" P équivalent à Q ") par

1. $P \implies Q \equiv ((\text{non } P) \text{ ou } Q)$.
2. $P \iff Q \equiv (P \implies Q \text{ et } Q \implies P)$.

Proposition 1.5

On a la table de vérité suivante :

P	Q	$P \implies Q$	$P \iff Q$	non($P \implies Q$)	P et (non Q)
V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F

En particulier, la proposition " $\text{non}(P \implies Q)$ " est identique à " P et (non Q)", mais pas à " $(\text{non } P) \implies (\text{non } Q)$ ".

Remarques.

1. On peut vérifier directement la valeur de vérité de " $\text{non}(P \implies Q)$ ", car :

$$\text{non}((\text{non } P) \text{ ou } Q) \equiv \text{non}(\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q) \equiv P \text{ et } (\text{non } Q).$$
2. Il ne faut pas confondre " \iff " et " \equiv ". En effet, "être identique à" est une constatation d'un fait. Par contre, l'équivalence est une proposition qui peut être fausse.
3. Attention, la proposition $P \implies Q$ peut être vraie sans que Q soit vraie. Par exemple, si P est la proposition "il pleut" et Q est la proposition "de l'eau tombe du ciel", alors la proposition $P \implies Q$ est vraie, pourtant Q n'est pas nécessairement vraie. Par contre, si P est vraie, et $P \implies Q$ est vraie, alors Q est vraie.
4. Pour montrer que l'implication $P \implies Q$ est vraie, il suffit de considérer le cas P vraie, et montrer qu'alors nécessairement Q est vraie. En effet, si P est fausse, l'implication est vraie quelque soit la valeur de Q , *c.f.* le raisonnement par implication.

Définition 1.6 (Quantificateurs)

Soit E un ensemble et $P(x)$ une proposition qui dépend de l'élément x de E . On définit les propositions

1. $\forall x \in E, P(x)$: vraie si $P(x)$ est vraie pour tout élément x de E .
2. $\exists x \in E \mid P(x)$: vraie si $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E .

Proposition 1.7 (Négation des quantificateurs)

Avec les notations précédentes, on a

$$\begin{aligned}\text{non}(\forall x \in E, P(x)) &\equiv (\exists x \in E \mid (\text{non } P(x))), \\ \text{non}(\exists x \in E \mid P(x)) &\equiv (\forall x \in E, (\text{non } P(x))).\end{aligned}$$

Proposition 1.8 (Négation des quantificateurs, deuxième)

Soit E un ensemble et P une proposition qui dépend de deux éléments de E . Alors

$$\begin{aligned}\text{non}(\forall x \in E, \exists y \in E, P(x, y)) &\equiv (\exists x \in E, \forall y \in E, (\text{non } P(x, y))), \\ \text{non}(\exists x \in E, \forall y \in E, P(x, y)) &\equiv (\forall x \in E, \exists y \in E, (\text{non } P(x, y))).\end{aligned}$$

Remarque.

De manière générale, pour obtenir la négation d'une proposition, on inverse les quantificateurs en tête (sans en changer l'ordre), puis on prend la négation de la proposition qui suit ces quantificateurs.

Définition 1.9 (Condition nécessaire, condition suffisante)

Soient P et Q des propositions telles que $P \implies Q$. Alors P est une *condition suffisante* pour Q et Q est une *condition nécessaire* pour P .

Remarque.

On dit souvent : "il suffit que P soit vraie pour que Q soit vraie", et il est nécessaire que Q soit vraie pour que P soit vraie".

2 Ensemble de définition, de résolution, et des solutions d'une équation.

Dans le paragraphe suivant, nous allons être amenés à résoudre des équations. Il faut alors bien savoir distinguer l'ensemble de définition de l'équation, l'ensemble de résolution, et l'ensemble des solutions. Commençons par un exemple.

Soit à résoudre sur \mathbb{R} l'équation $(E) : \sqrt{x+1} = x$ d'inconnue x .

- Tout d'abord, l'énoncé nous demande de "résoudre sur \mathbb{R} ". Cela signifie qu'on ne cherchera pas d'éventuelles solutions complexes non réelles.

- **Ensemble de définition** : C'est en fait l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1} - x$, donc ici, c'est $\boxed{[-1, +\infty[}$.
- **Ensemble de résolution** : Parfois, on peut montrer que certaines valeurs ne sont pas des solutions. On peut alors réduire l'ensemble sur lequel on résout l'équation. Mais il est indispensable de bien prouver que les valeurs qu'on exclue de l'étude ne sont pas solution, au risque d'oublier des solutions. Voici comment on rédige dans notre cas : si x est solution de l'équation, alors $x = \sqrt{x+1} \geq 0$. Donc si $x < 0$, x n'est pas solution, et on résout l'équation sur $\boxed{\mathbb{R}_+}$.
- **Ensemble des solutions** : C'est l'ensemble le plus connu. Dans notre cas, c'est $\boxed{\left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}}$.

On verra plus loin comment on résout cette équation.

3 Méthodes de démonstration

Les règles suivantes sont fondamentales pour les démonstrations en mathématiques. (P , Q et R sont des propositions).

Raisonnement par implication Si P est vraie et $P \implies Q$ est vraie, alors Q est vraie. C'est le raisonnement direct.

Montrons par exemple que si $x > 3$, alors $\ln(x) > 1$. Le raisonnement se rédige ainsi.

Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x > 3$. Comme le logarithme est strictement croissant et $3 > e$, on a $\ln(x) > \ln(3) > \ln(e) = 1$.

Transitivité de l'implication Si P est vraie et si $P \implies Q$ et $Q \implies R$ sont vraies, alors R est vraie. C'est évidemment une succession de raisonnements "direct".

Raisonnement par équivalences Le raisonnement par équivalences est utilisé pour transformer un problème en un autre, que l'on sait résoudre, et qui a même valeur de vérité que le problème initial.

Résolvons l'équation $\sqrt{x+1} = x$. On peut remarquer que si $x \in \mathbb{R}$ est solution, alors $x = \sqrt{x+1} \geq 0$. On résout donc sur \mathbb{R}_+ . Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$\sqrt{x+1} = x \iff x+1 = x^2 \iff x^2 - x - 1 = 0$$

(transformation du problème initial en un autre). Il reste alors à résoudre cette équation du second degré sur \mathbb{R}_+ . Son discriminant est 5, et ses racines sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, dont l'unique solution positive est $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. L'ensemble des solutions de l'équation de départ est donc $\boxed{\left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}}$.

Attention : un raisonnement par équivalence peut être source d'erreurs : pour $x \notin]0, 2[$, si on écrit

$$\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3 \iff x^2 - 2x = (x - 3)^2 \iff x = \frac{9}{4},$$

on pourrait penser que l'équation admet comme unique solution $x = 9/4$. Pourtant, $\sqrt{(9/4)^2 - 2 \times 9/4} = 3/4$ et $9/4 - 3 = -3/4$: $9/4$ n'est visiblement pas solution. L'erreur provient de la première équivalence, qui n'en est pas une. On a bien

$$\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3 \implies x^2 - 2x = (x - 3)^2,$$

mais la réciproque est fautive, car

$$x^2 - 2x = (x - 3)^2 \implies \sqrt{x^2 - 2x} = |x - 3|.$$

Cet exemple (simple!) montre combien la plus grande prudence s'impose lors des raisonnements par équivalences. On peut avantageusement remplacer un raisonnement par équivalence par un raisonnement par double-implication.

Raisonnement par double-implication Plutôt que de démontrer directement que $P \iff Q$ par la méthode précédente (source d'erreurs dans les cas délicats), on peut démontrer que $P \implies Q$ et $Q \implies P$.

Raisonnement par analyse-synthèse C'est un raisonnement qui permet de résoudre des problèmes très variés. Pour déterminer les éléments $x \in E$ qui vérifient une propriété $P(x)$, on détermine une ou des propriétés nécessaires pour qu'un x vérifie la propriété. On vérifie ensuite si ces propriétés sont suffisantes.

Montrons par exemple que toute fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. On raisonne par analyse-synthèse.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et p, i des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} respectivement paire et impaire, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = p(x) + i(x).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a donc $f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$, donc $f(x) + f(-x) = 2p(x)$ et $f(x) - f(-x) = 2i(x)$, donc

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Réciproquement, soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On définit les fonctions $i, p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = p(x) + i(x)$, et de plus

$$p(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = p(x), \quad i(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = -i(x),$$

donc p est paire et i est impaire.

Conclusion : toute fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Démontrer que la proposition $\forall x \in E, P(x)$ est vraie

Pour cela, on choisit un élément de E (quelconque!) et on démontre que la propriété est vraie pour cet élément. Comme cette démonstration est valable pour tout élément de E (l'élément du départ est quelconque), on a démontré la proposition. Ce type de démonstration commence **toujours** par "Soit x un élément de E " (ou "Soit a un élément de E "...).

Montrons par exemple que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 4x - 4.$$

Soit alors $x \in \mathbb{R}$. On a

$$x^2 \geq 4x - 4 \iff x^2 - 4x + 4 \geq 0 \iff (x - 2)^2 \geq 0.$$

La dernière proposition est vraie, donc par équivalences la première aussi. Comme le raisonnement ne dépend pas de x , on a démontré la proposition pour tout réel x .

Démontrer que la proposition $\exists x \in E, P(x)$ est vraie

Il s'agit ici d'exhiber un élément de E qui vérifie la propriété. Il suffit d'en trouver **un seul**. Toute la difficulté consiste à "deviner" ceux qui "marche". On pourra utiliser avantageusement le raisonnement par "analyse-synthèse" expliqué ci-dessus.

Montrons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{3x-1} > x$. On raisonne par analyse-synthèse.

— Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{3x-1} > x$. On cherche des propriétés nécessairement vérifiées par x . Alors $x > 0$ puisque $3x-1 > 0$. Par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^2$ sur \mathbb{R}_+ , on a donc $3x-1 > x^2$ ou encore $x^2 - 3x + 1 < 0$. Les racines de ce polynôme sont

$$\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Le réel x est donc strictement entre les racines, donc

$$x \in \left] \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right[.$$

— Réciproquement (notez bien que nous n'avons pas raisonné par équivalence), on cherche maintenant un réel dans l'intervalle précédent qui serait solution du problème. On prend un simple, par exemple $x = \frac{3}{2}$. Alors $\sqrt{3 \times \frac{3}{2} - 1} > \frac{3}{2}$ et notre affirmation est prouvée.

Démontrer que la proposition $\forall x \in E, P(x)$ est fausse

Il faut démontrer que la négation de la proposition est vraie, *i.e.* que $\exists x \in E$, non $P(x)$ est vraie, c'est-à-dire trouver **un** élément de E qui ne vérifie pas la propriété P : c'est ce qu'on appelle un **contre-exemple**. Insistons sur le fait **qu'un seul** contre-exemple suffit.

Montrons que la proposition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{|3x-1|} > x$$

est fausse. En effet, posons $x = 3$. Alors $\sqrt{|3x-1|} = 2\sqrt{2} < x$, donc x est bien un contre-exemple et la proposition est fausse. Mais comment trouver cette valeur 3? On peut par exemple faire un début de raisonnement par analyse-synthèse : si $x \geq 1/3$ est tel que $\sqrt{|3x-1|} > x$, alors $x^2 - 3x + 1 < 0$. Il est alors facile de voir que 3 ne vérifie pas cette inégalité, donc pas la première.

Démontrer que la proposition $\exists x \in E, P(x)$ est fautive Il faut démontrer que la négation est vraie, *i.e.* que $\forall x \in E$, non $P(x)$ est vraie, c'est-à-dire qu'aucun élément de E ne vérifie la propriété. C'est le même procédé que le cas $\forall x \in E, P(x)$ en remplaçant la propriété " $P(x)$ " par "non $P(x)$ ".

Raisonnement par contraposée $(P \implies Q) \equiv (\text{non } Q \implies \text{non } P)$.

Montrons que si l'entier n^2 est pair, alors n est pair. Il suffit pour cela de démontrer que si n est impair, alors n^2 est impair. Soit alors un entier n impair, *i.e.* $n = 2k + 1$ où $k \in \mathbb{N}$. Alors $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair.

Raisonnement par disjonction des cas Si $(P \text{ ou } Q)$ et $(P \implies R)$ et $(Q \implies R)$ sont vraies, alors R est vraie.

Montrons que le reste de la division euclidienne par 4 de la somme de deux carrés n'est jamais égal à 3. Soit n un entier naturel. Il existe alors $q \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ tels que

$$n = 4q + k$$

(k est le reste), donc

$$n^2 = 4(4q^2 + 2qk) + k^2,$$

et k^2 vaut 0,1,4 ou 9, ce qui prouve (disjonction des cas) que le reste de la division euclidienne de n^2 par 4 est 0 ou 1.

Soit maintenant n' un deuxième entier. Alors le reste de la division euclidienne de n'^2 par 4 est 0 ou 1, donc celui de $n^2 + n'^2$ est $0 + 0 = 0$ ou $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ ou $1 + 1 = 2$ (disjonction des cas), donc jamais 3.

Raisonnement par l'absurde Si $((\text{non } P) \implies Q)$ et $((\text{non } P) \implies (\text{non } Q))$ est vraie, alors P est vraie.

Montrons en raisonnant par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. On suppose donc que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, *i.e.* qu'il existe deux entiers p et q premiers entre eux ($q \neq 0$) tels que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Alors

$$2q^2 = p^2$$

donc 2 divise p^2 donc 2 divise p : il existe $p' \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2p'$ et donc

$$q^2 = 2p',$$

ce qui prouve que 2 divise également q : contradiction, puisque p et q sont premiers entre eux.

Raisonnement par récurrence Soit P une propriété définie sur \mathbb{N} , et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $P(n_0)$ est vraie, et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $P(n) \implies P(n+1)$ est vraie, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Il faut être très rigoureux lorsqu'on rédige une récurrence. Soit par exemple $n_0 \in \mathbb{N}$ et à démontrer une proposition $P(n)$ pour $n \geq n_0$. On commence obligatoirement par écrire "Montrons que $P(n)$

est vraie pour tout $n \geq n_0$ par récurrence sur $n \geq n_0$ ". Puis, bien vérifier l'initialisation. Enfin, on écrit : "Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, tel que $P(n)$ soit vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie".

Soit par exemple la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n}$. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.

Raisonnement par récurrence à deux pas Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, et P une propriété définie sur \mathbb{N} pour $n \geq n_0$. Si $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies, et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $P(n)$ et $P(n+1) \implies P(n+2)$ est vraie, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Soit par exemple la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et $u_{n+2} = 1 + \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$. Montrez que (u_n) est strictement croissante.

Récurrence forte Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, et P une propriété définie sur \mathbb{N} pour $n \geq n_0$. Si $P(n_0)$ est vraie, et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $P(n_0)$ et \dots et $P(n) \implies P(n+1)$ est vraie, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Démontrez par récurrence forte que tout entier > 1 admet un diviseur premier.