Chapitre 3

Trigonométrie

1 Congruences

Définition 1.1 (Congruences)

Soient $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$. Les réels a et b sont congrus modulo α s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a - b = k\alpha$. On note alors $a \equiv b \mod \alpha$.

Proposition 1.2 (Ensemble des valeurs vérifiant une congruence)

Soit $a, \alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\{x,\ x \equiv a \mod \alpha\} = \{a + k\alpha,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, a - 2\alpha, a - \alpha, a, a + \alpha, a + 2\alpha, \ldots\}.$$

Méthode 1.3 (Congruences et cercle trigonométrique)

Pour placer sur un cercle trigonométrique des valeurs x vérifiant une relation du type $x \equiv a \mod r\pi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$, on place a, puis on ajoute $r\pi$, puis $2r\pi$, etc.., jusqu'à ce qu'on retombe sur a, mais modulo 2π seulement, *cf.* les exemples.

Proposition 1.4

Soient $a, b, a', b', \alpha \in \mathbb{R}$ tels que $a \equiv b \mod \alpha$, $a' \equiv b' \mod \alpha$. Alors $a + a' \equiv b + b' \mod \alpha$.

Remarque.

Attention : en général, $aa' \not\equiv bb' \mod \alpha$.

Proposition 1.5

Soient $a, b, t, \alpha \in \mathbb{R}$ tels que $a \equiv b \mod \alpha$. Alors $ta \equiv tb \mod t\alpha$, et si $t \neq 0$, $a/t \equiv b/t \mod \alpha/t$.

Remarque.

Si $x \equiv y \mod \alpha$, et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $x \equiv y \mod \dfrac{\alpha}{n}$. Être congrus modulo α est plus précis qu'être congrus modulo $\frac{\alpha}{n}$.

Méthode 1.6

Pour résoudre une équation avec des congruences, on utilise les propositions 1.4 et 1.5 pour arriver à une valeur de l'inconnue modulo un réel. Par exemple, si $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{2x}{3} \equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi \iff x \equiv \frac{3\pi}{4} \mod \frac{3\pi}{2},$$

et l'ensemble des solutions est donc

$$\left\{\frac{3\pi}{4} + k\frac{3\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\dots, -\frac{9\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \dots\right\}.$$

2 Fonctions sinus et cosinus

Dans ce paragraphe, nous rappelons les propriétés essentielles des fonctions trigonométriques sinus et cosinus.

2.1 Définitions

Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1, 1]$, et 2π-périodiques, *i.e.* pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

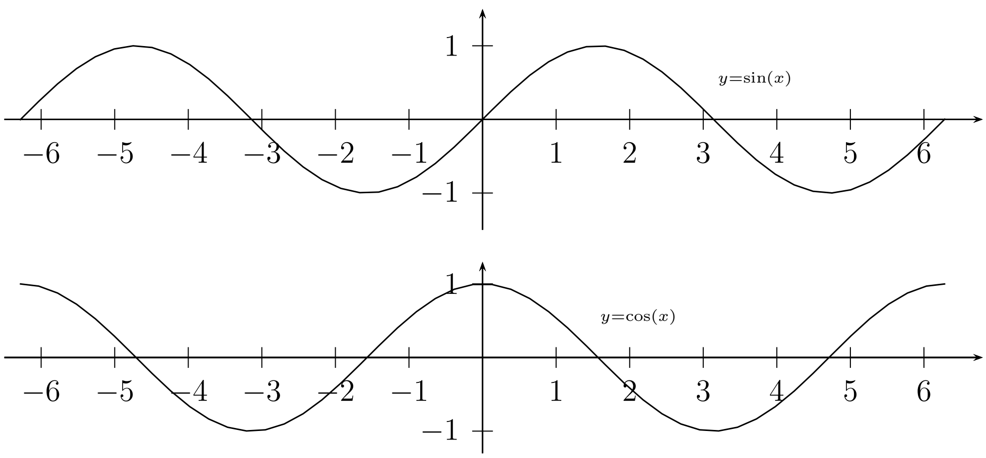
$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

La fonction cosinus est paire, et la fonction sinus est impaire, *i.e.* pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(-x) = \cos(x), \qquad \sin(-x) = -\sin(x).$$

Elles sont dérivables et $\boxed{\sin' = \cos}$, $\boxed{\cos' = -\sin}$.

Voici les graphes de ces fonctions :



Voici quelques valeurs remarquables, qu'il est essentiel de savoir placer sur un cercle trigonométrique.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Proposition 2.1

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

2.2 Formules de trigonométrie

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x), & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x),\\
\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin(x), & \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos(x),\\
\cos(\pi - x) &= -\cos(x), & \sin(\pi - x) &= \sin(x),\\
\cos(\pi + x) &= -\cos(x), & \sin(\pi + x) &= -\sin(x).
\end{aligned}$$

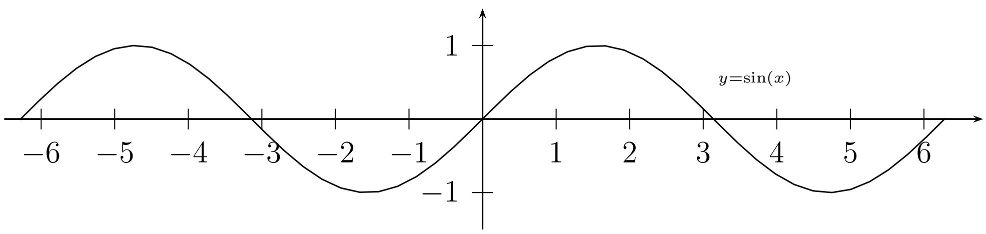
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

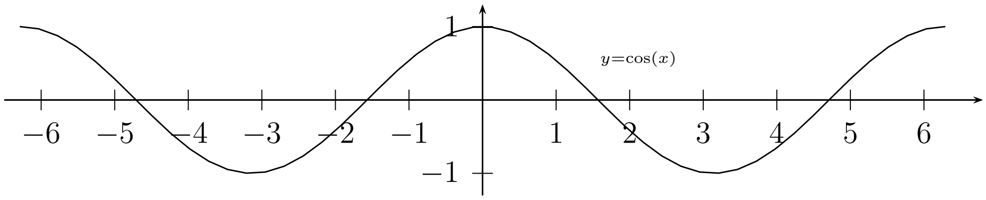
$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1, \qquad \sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}, \qquad \cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2},$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a), \qquad \cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a).$$

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), & \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b),\\
\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a), & \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(a) + \cos(b) &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right), & \cos(a) - \cos(b) &= -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right),\\
\sin(a) + \sin(b) &= 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right), & \sin(a) - \sin(b) &= 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right).
\end{aligned}$$

Voic les graphes des fonctions sinus et cosinus :





En exemple, démontrons la formule $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$. On fixe une base orthonormale directe du plan $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on note $\overrightarrow{u} = \cos(a)\overrightarrow{\imath} + \cos(b)\overrightarrow{\jmath}$, et soit

$$\overrightarrow{u'} = \cos(a+\pi/2)\overrightarrow{\imath} + \sin(a+\pi/2)\overrightarrow{\jmath} = -\sin(a)\overrightarrow{\imath} + \cos(a)\overrightarrow{\jmath}.$$

Alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ forme une base orthonormale directe du plan, et si $\overrightarrow{v}$ est le vecteur formant un angle b avec $\overrightarrow{u}$, alors

$$\overrightarrow{v} = \cos(b)\overrightarrow{u} + \sin(b)\overrightarrow{u'} = \cos(a+b)\overrightarrow{\imath} + \sin(a+b)\overrightarrow{\jmath}.$$

En remplaçant $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ dans cette égalité par leur écriture en fonction de $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$, on obtient la formule d'addition.

2.3 Propriétés et équations

Proposition 2.2 (Équations élémentaires)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sin(a) = \sin(b) \iff \Big(a \equiv b \mod 2\pi \text{ ou } a \equiv \pi - b \mod 2\pi\Big), \tag{1}$$

$$\cos(a) = \cos(b) \iff \Big(a \equiv b \mod 2\pi \text{ ou } a \equiv -b \mod 2\pi\Big), \tag{2}$$

$$\begin{cases} \cos(a) = \cos(b) \\ \sin(a) = \sin(b) \end{cases} \iff a \equiv b \mod 2\pi. \tag{3}$$

Théorème 2.3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$. Il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.

Remarque.

On peut remplacer l'intervalle $[0, 2\pi[$ par n'importe quel intervalle semi-ouvert de longueur 2π, comme par exemple $]-\pi, \pi]$.

Proposition 2.4

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Il existe $R \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ a\cos(x) + b\sin(x) = R\cos(x - \varphi).$$

Remarque.

On peut bien entendu obtenir $R\cos(x + \varphi_1)$ ou $R\sin(x - \varphi_2)$ ou $R\sin(x + \varphi_3)$.

Méthode 2.5

Pour déterminer R et φ, on procède exactement comme dans la démonstration.

Méthode 2.6 (Résolution d'équations/inéquations)

1. Pour résoudre une équation du type $\sin(tx) = a$ ou $\cos(tx) = a$, $x, t, a \in \mathbb{R}$:
   - On vérifie tout d'abord que $a \in [-1, 1]$ (sinon, il n'y a aucune solution).
   - On écrit $a = \sin(\alpha)$ ou $a = \cos(\alpha)$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$ bien choisi.
   - On termine alors la résolution avec la proposition 2.2, en exprimant l'ensemble des solutions en fonction de α. Utilisez le cercle trigonométrique !

2. Pour résoudre les inéquations trigonométriques (**attention à la rigueur :** "$<$" et "$\leqslant$", ce n'est pas pareil)

$$\begin{array}{cccc} \sin(x) < a, & \sin(x) > a, & \sin(x) \leqslant a, & \sin(x) \geqslant a, \\ \cos(x) < a, & \cos(x) > a, & \cos(x) \leqslant a, & \cos(x) \geqslant a \end{array}$$

   Si $a \notin [-1, 1]$, l'ensemble des solutions est soit $\mathbb{R}$, soit $\emptyset$. Sinon, on procède ainsi :
   - Si $a \in [-1, 1]$, on écrit que $a = \sin(\alpha)$ ou $a = \cos(\alpha)$.
   - On résout l'inéquation sur un intervalle de longueur 2π bien choisi. On peut toujours résoudre sur $[0, 2\pi]$, mais on peut aussi le faire sur un intervalle plus simple qui dépend de l'inéquation, *cf* les exemples.
   - On donne l'ensemble des solutions par 2π-périodicité.

3. Pour résoudre les inéquations trigonométriques (**attention à la rigueur :** "$<$" et "$\leqslant$", ce n'est pas pareil)

$$\begin{array}{cccc} \sin(ux+v) < a, & \sin(ux+v) > a, & \sin(ux+v) \leqslant a, & \sin(ux+v) \geqslant a, \\ \cos(ux+v) < a, & \cos(ux+v) > a, & \cos(ux+v) \leqslant a, & \cos(ux+v) \geqslant a \end{array}$$

   avec $u, v \in \mathbb{R}$ et $u \neq 0$.

   On procède ainsi :
   - On pose $t = ux + v$ et on résout l'inégalité avec cette variable t comme le cas 2.
   - On détermine les $x \in \mathbb{R}$ tels que $ux + v$ soit dans l'ensemble de solutions obtenu précédemment. Cela donne l'ensemble des solutions recherché.

3 Fonction tangente

3.1 Définition

Définition 3.1 (Fonction tangente)

La fonction tangente, notée tan, est la fonction à valeurs réelles, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$, par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Remarque.

On rappelle que pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$. La fonction tangente est donc bien définie en tout réel non congru à $\pi/2$ modulo π.

Voici quelques valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ind.

Méthode 3.2 (Tangente et cercle trigonométrique)

Pour déterminer la tangente d'un angle θ à l'aide du cercle trigonométrique, on trace la droite d'équation $x = 1$, que l'on oriente vers le haut, l'origine étant le point de coordonnées $(1, 0)$. La distance algébrique du point d'intersection de cette droite avec le rayon d'angle θ.

Remarque.

Soit dans un repère orthonormal du plan une droite D d'équation $y = px + m$. Le coefficient directeur p (la pente de la droite) est la tangente de l'angle (orienté) formé par l'axe des abscisses et la droite D.

Proposition 3.3

La fonction tangente est impaire et π-périodique.

Proposition 3.4

La fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition, et on a

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

Proposition 3.5 (Limites)

On a

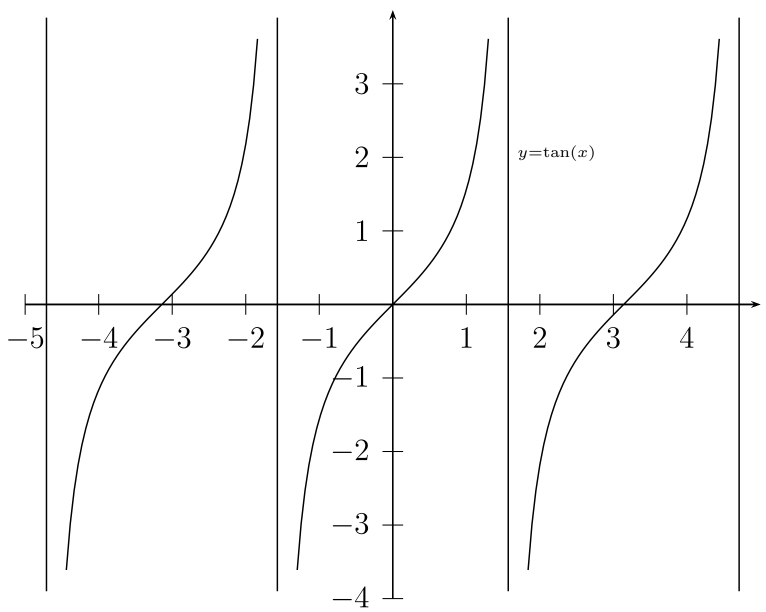
$$\tan(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} +\infty \qquad \tan(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}^+}{\longrightarrow} -\infty$$
$$\tan(x) \underset{x\to-\frac{\pi}{2}^+}{\longrightarrow} -\infty \qquad \tan(x) \underset{x\to-\frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} +\infty$$

Remarque.

On en déduit, par π-périodicité, les limites de tan en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, par valeurs supérieures et inférieures :

$$\tan(x) \underset{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^-}{\longrightarrow} +\infty \qquad \tan(x) \underset{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^+}{\longrightarrow} -\infty$$
$$\tan(x) \underset{x\to(-\frac{\pi}{2}+k\pi)^+}{\longrightarrow} -\infty \qquad \tan(x) \underset{x\to(-\frac{\pi}{2}+k\pi)^-}{\longrightarrow} +\infty$$

Voici le graphe de la fonction tangente (on notera les asymptotes verticales d'équations $x = \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) :



Proposition 3.6

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Si $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$, alors $\pi - x \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$ et $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$.

2. Si $x \not\equiv 0 \mod \frac{\pi}{2}$, alors $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$, $\frac{\pi}{2} - x \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$, $\frac{\pi}{2} + x \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$, $\tan(x) \neq 0$ et

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}, \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan(x)}.$$

Proposition 3.7 (Quelques équations avec la tangente)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\tan(x) = 0 \iff x \equiv 0 \mod \pi$$
$$\tan(x) = 1 \iff x \equiv \frac{\pi}{4} \mod \pi$$
$$\tan(x) = -1 \iff x \equiv -\frac{\pi}{4} \mod \pi.$$

3.2 Formules de trigonométrie pour la tangente

Proposition 3.8

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$. Alors

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Proposition 3.9

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ non congrus à $\pi/2$ modulo π. Alors

$$a + b \equiv \pi/2 \mod \pi \iff \tan(a)\tan(b) = 1.$$

Proposition 3.10 (Formule d'addition pour la tangente)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ non congrus à $\pi/2$ modulo π. Si $a + b \not\equiv \pi/2 \mod \pi$, on a

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)},$$

et si $a - b \not\equiv \pi/2 \mod \pi$, on a

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}.$$

Proposition 3.11 (Tangente de l'angle moitié)

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv \pi \mod 2\pi$. Soit

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right).$$

Alors $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, et si $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$, $\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

Proposition 3.12 (Équations élémentaires)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$. Alors

$$\tan(a) = \tan(b) \iff a \equiv b \mod \pi.$$

Méthode 3.13

Les résolutions d'équations et d'inéquations du type $\tan(x) = a$ ou $\tan(x) < a$ se résolvent en écrivant que $a = \tan(\alpha)$ (ceci est toujours possible : la droite d'équation $y = a$ coupe la courbe représentative de la fonction tangente). Pour une équation, on conclut avec la proposition 3.12, et pour les inéquations, on se sert du cercle trigonométrique.