SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercices

1 Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants.
On précisera de plus la somme dans les cas 1, 2, 3, 12 et 17 (à partir de $n = 0$ pour 1, 2 et 12 et à partir de $n = 1$ pour 3 et 17).

1. $u_n = \dfrac{5.2^{n+1}}{3^{n-1}}$ 2. $u_n = \dfrac{n^2-2}{n!}$ 3. $u_n = \ln\left(\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$ 4. $u_n = \dfrac{n}{(\ln n)^2}$ 5. $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$ 6. $u_n = \dfrac{1}{n\sin^2 n}$

7. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$ 8. $u_n = \dfrac{1}{\ln(\ln n)}$ 9. $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 10. $u_n = \dfrac{\operatorname{ch}(n)}{\operatorname{ch}(2n)}$ 11. $u_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^n}$

12. $u_n = \dfrac{\cos(n\theta)}{2^n}$, $\theta \in \mathbb{R}$ 13. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 14. $u_n = \exp\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - 1$ 15. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} + n\pi\right)$

16. $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$ 17. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k 2^{n-k}}$ 18. $u_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{\sin(u_n)}{n}$

---

2 *Séries de Bertrand*

Discuter, suivant la valeur des réels α et β, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$.

On pourra suivre le plan d'étude suivant.

1. *Cas $\alpha > 1$ puis $\alpha < 1$: comparaisons par « petit o »*
2. *Cas $\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 0$: comparaison par inégalité*
3. *Cas $\alpha = 1$ et $\beta > 0$: comparaison série/intégrale*

---

3 Discuter selon les valeurs des paramètres ($\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$) la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = \dfrac{\alpha^n n!}{n^n}$ 2. $u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ 3. $u_n = n!\alpha^{n^2}$ 4. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$

---

4 *Séries dont le terme général est défini à l'aide d'une somme*

1. Justifier l'existence de $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
2. On pose pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} \ln^2(k)}$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
3. Justifier l'existence pour $n \in \mathbb{N}^*$ de $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ et déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

5 *Produit des racines carrées et maximum*

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes positifs.

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
   En déduire la convergence de la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$.
2. Prouver la convergence de la série $\sum \max(u_n, v_n)$.

---

6 *Série harmonique et série harmonique alternée*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $\tau_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. (a) À l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer qu'on a $H_n \sim \ln n$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = H_n - \ln n$.
   Montrer que $u_{n+1} - u_n \sim -\dfrac{1}{2n^2}$.
   En déduire qu'il existe un réel γ (appelé *constante d'Euler*) tel que :
   $$H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$
2. (a) Montrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer τ_{2n} en fonction de H_{2n} et H_n.
   (c) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.
3. On réordonne les termes de la série harmonique alternée de la manière suivante :
   on commence par le premier terme négatif puis les deux premiers termes positifs, puis le terme négatif suivant, puis les deux termes positifs suivants, etc...
   On obtient donc pour les premiers termes de la nouvelle série : $-1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{8}, \ldots$

   On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles de cette nouvelle série.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{3n} = \dfrac{1}{2}(H_n - H_{2n})$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{3n} = -\frac{\ln 2}{2}$.
   (c) Montrer qu'on a également $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{3n+1} = -\frac{\ln 2}{2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{3n+2} = -\frac{\ln 2}{2}$.
   (d) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = -\frac{\ln 2}{2}$ (on pourra revenir à la définition de limite).

   On en déduit que cette permutation de la série alternée converge et a pour somme $-\dfrac{\ln 2}{2}$.
   La somme n'est donc pas la même ! Avec d'autres permutations, on peut même obtenir une série divergente ! Surpris ?

---

7 *Complément sur la comparaison série/intégrale*

Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$, continue, positive et décroissante.
Montrer que la série $\displaystyle\sum \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \right)$ est convergente.

$\boxed{8}$ *Transformation d'Abel*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle décroissante qui converge vers 0.
Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite complexe.
On pose $B_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = b_1 + \cdots + b_n$. On suppose que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$:
$$\sum_{k=1}^{n} a_k(B_k - B_{k-1}) = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k.$$
2. En déduire que la série $\sum a_n b_n$ converge.
3. *Application :* Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la série $\sum \dfrac{e^{in\theta}}{n}$ converge mais ne converge pas absolument.

$\boxed{9}$ Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$ et une suite de réels u_n strictement positifs tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$.

1. Donner, sous sa forme la plus simple possible, un équivalent de $\ln\left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)$ au voisinage de $+\infty$.
   Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = -\infty$ et en déduire que (u_n) tend vers 0.
2. On pose $\alpha = b - a$, $v_0 = u_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^\alpha u_n$.
   Montrer que la série $\sum \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ converge.
   Montrer qu'il existe un réel A non nul tel que $u_n \sim \dfrac{A}{n^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$.
   Étudier la convergence de $\sum u_n$.
3. On suppose que la série de terme général u_n converge. Montrer que sa somme vaut $u_0 \dfrac{b-1}{b-1-a}$.

$\boxed{10}$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite sommable.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k u_k$.
Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et exprimer sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ en fonction de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

$\boxed{11}$ *Test de condensation de Cauchy*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante de réels positifs.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $2^k u_{2^{k+1}} \leqslant \displaystyle\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} u_n \leqslant 2^k u_{2^k}$.
2. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{p} 2^k u_{2^k} \leqslant \sum_{n=1}^{2^p-1} u_n \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} 2^k u_{2^k}$.
3. Montrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum 2^n u_{2^n}$ converge.
4. *Application :* Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ suivant la valeur de $\alpha > 0$.

12 *Irrationnalité de* $\cos 1$

1. À l'aide de l'inégalité de Taylor, montrer que $\cos 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$.

   On suppose qu'il existe $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\cos 1 = \frac{p}{q}$.

   Montrer qu'on a $S_{2q} - \frac{1}{(4q+2)!} < \frac{p}{q} < S_{2q}$ et en déduire une absurdité. Conclure.

---

13 *Série des inverses des nombres premiers*

Soit $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite ordonnée des nombres premiers.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $V_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$.

1. Montrer que la suite (V_n) est convergente si et seulement si la suite $(\ln V_n)$ est convergente.

   En déduire que la suite (V_n) est convergente si et seulement si la série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{p_k}$ est convergente.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^j} \right)$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$.
4. Quelle est la nature de la série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{p_k}$?
5. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, quelle est la nature de la série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{p_k^\alpha}$?

---

14 *Preuve de la formule de Stirling*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$.
   (a) Étudier la nature de la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
   (b) En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \sim C n^n e^{-n} \sqrt{n}$.
2. Le but de cette question est de déterminer la constante C.

   On utilise pour cela les *intégrales de Wallis* :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) \mathrm{d}t.$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$.
   (c) Montrer que la suite (W_n) est décroissante et strictement positive.
   En déduire que $W_{n+1} \sim W_n$.
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1) W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.
   (e) En déduire que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
   (f) Déterminer C.