DEVOIR MAISON 1 - *Sur la convexité*

À rendre le lundi 18 septembre

On rappelle le résultat suivant que l'on pourra utiliser librement :
si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $(x,y)\in I^2$ et $\lambda\in[0;1]$ alors $\lambda x+(1-\lambda)y\in I$.

Dans ce sujet, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$, non vides et non réduits à un point.

Soit f une fonction, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur I.
On rappelle que f est dite <u>convexe</u> sur I si

$$\forall (x,y)\in I^2, \forall\lambda\in[0;1],\ \ f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \qquad \textit{Inégalité de convexité } (\star)$$

On dit que f est <u>concave</u> sur I si $-f$ est convexe sur I.

On ne pourra utiliser ici aucun résultat vu en cours sur la convexité. On se limitera à cette définition et aux résultats précédemment établis dans le problème.

I. QUELQUES EXEMPLES

1. Écrire une inégalité, analogue à $(\star)$, caractérisant une fonction concave sur I.
2. Démontrer que la fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
4. On cherche à démontrer que la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Soit $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $x<y$. On considère la fonction g définie sur $[0;1]$ par
   $$\forall t\in[0;1],\ \ g(t)=\ln(tx+(1-t)y)-t\ln(x)-(1-t)\ln(y).$$
   (a) Étudier la monotonie de la fonction g', dérivée de g, sur $[0;1]$.
   (b) À l'aide du théorème des accroissements finis, démontrer que :
   $$\frac{1}{y}\leqslant\frac{\ln(y)-\ln(x)}{y-x}\leqslant\frac{1}{x}.$$
   (c) En déduire le signe de $g'(0)$ et de $g'(1)$.
   (d) Déduire des questions précédentes que g' s'annule une et une seule fois sur $[0;1]$.
   (e) Déterminer le signe de g sur $[0;1]$ et conclure.

II. QUELQUES PROPRIÉTÉS

5. **Caractérisation graphique de la convexité**
   (a) Soit $(x,y)\in I^2$ tel que $x<y$. Démontrer que $z\in[x,y]$ si et seulement s'il existe $\lambda\in[0;1]$ tel que $z=\lambda x+(1-\lambda)y$.
   (b) Sans démonstration, illustrer l'inégalité de convexité $(\star)$ par une figure.
6. **Opérations et convexité**
   (a) Soient f et g deux fonctions convexes sur I. Démontrer que $f+g$ est convexe sur I.
   (b) Soient f une fonction convexe sur I à valeurs dans J et g une fonction convexe et croissante sur J. Démontrer que $g\circ f$ est convexe sur I.
   (c) Sans démonstration, énoncer une propriété du même type qui permettrait de conclure que $g\circ f$ est concave.

7. **Généralisation de l'inégalité de convexité**
Soit f une fonction convexe sur I.
Démontrer par récurrence que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in I$$
et
$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

8. **Deux applications**
   (a) À l'aide de la concavité de ln, démontrer que pour tout $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, on a
   $$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}.$$
   (b) Démontrer que $\ln \circ \ln$ est concave sur $]1, +\infty[$.
   En déduire que pour tout $(x, y) \in (]1, +\infty[)^2$, on a
   $$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

III. Inégalité des trois pentes

Soit f une fonction, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur I.

Pour tout $a \in I$, on considère la fonction $\Delta_a : \left\{ \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a} \end{array} \right.$

On suppose dans cette partie III. que la fonction f est convexe sur I.

9. Soient $a \in I$ et $(t, u) \in (I \setminus \{a\})^2$ tel que $t < u$.
   (a) On suppose que $t < u < a$. D'après la question **5.(a)**, on sait qu'il existe $\lambda \in]0; 1[$ tel que $u = \lambda t + (1 - \lambda)a$.
   Démontrer que $f(u) - f(a) \leqslant \lambda\big(f(t) - f(a)\big)$ puis que $\Delta_a(t) \leqslant \Delta_a(u)$.
   (b) On admet que cette dernière inégalité reste vraie pour $a < t < u$ et pour $t < a < u$.
   Que peut-on en déduire pour Δ_a ?

10. (a) Soit $(a, b, c) \in I^3$ tel que $a < b < c$.
   En utilisant la question précédente, démontrer l'inégalité des trois pentes :
   $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$
   (b) Illustrer cette inégalité par une figure.

IV. Caractérisation des fonctions convexes dérivables

Soit f une fonction dérivable sur I. On note f' sa fonction dérivée sur I.

11. Dans cette question, on suppose f convexe sur I.
   (a) Montrer que pour tout $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$, on a
   $$f'(a) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant f'(b),$$
   et en déduire que f' est croissante.
   (b) Justifier que la courbe représentative de f est au-dessus de toutes ses tangentes.

12. Dans cette question, on suppose f' croissante sur I.
Soit $(x,y) \in I^2$ tel que $x < y$. On considère la fonction ϕ définie sur $[0;1]$ par

$$\forall t \in [0;1],\ \ \phi(t) = tf(x) + (1-t)f(y) - f(tx + (1-t)y).$$

   (a) Démontrer que ϕ est dérivable sur $[0;1]$ et déterminer sa dérivée ϕ'.
   (b) En utilisant le théorème des accroissements finis pour f entre x et y, démontrer qu'il existe $\gamma \in]0;1[$ tel que pour tout $t \in [0;1]$,

$$\phi'(t) = (x-y)\big(f'(\gamma x + (1-\gamma)y) - f'(tx + (1-t)y)\big).$$

   (c) En déduire les variations de ϕ.
   (d) En déduire que la fonction f est convexe sur I.
13. Démontrer qu'une fonction f deux fois dérivable sur I est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.
14. **Application**
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ e^x \geqslant x+1$.

V. Différentes inégalités

15. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave.
On définit la fonction $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & yf\left(\dfrac{x}{y}\right) \end{array} \right.$
   (a) Démontrer que pour tout $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$, on a

$$\psi(x_1,y_1) + \psi(x_2,y_2) \leqslant \psi(x_1+x_2, y_1+y_2).$$

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \psi(x_k,y_k) \leqslant \psi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} y_k\right) \qquad (\star\star).$$

16. **Application**
Soient $p, q \in]1,+\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Dans cette question, $f : t \longmapsto t^{\frac{1}{p}}$
   (a) Démontrer que f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$.
   En utilisant $(\star\star)$, démontrer l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$