Physique

Fiche – Formulaire mathématique

L. Torterotot

1 Dérivées usuelles

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln(x)\right] = \frac{1}{x} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\exp(x)\right] = \exp(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\alpha\right] = \alpha x^{\alpha-1}\,, \quad x>0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[a^x\right] = a^x \ln a\,, \quad a>0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sin(x)\right] = \cos x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sinh(x)\right] = \cosh x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos(x)\right] = -\sin x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cosh(x)\right] = \sinh x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\tan(x)\right] = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\tanh(x)\right] = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1-\tanh^2(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)g(x)\right] = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)^n\right] = nf'(x)f(x)^{n-1}$$

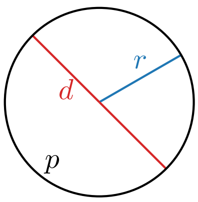
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f\left(g(x)\right)\right] = g'(x)f'(g(x))$$

2 Géométrie, trigonométrie et vecteurs

2.1 Une dimension : longueurs

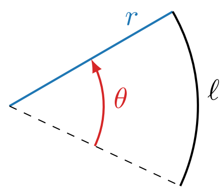
Périmètre du cercle de rayon r, soit de diamètre $d = 2r$,

$$p = 2\pi r = \pi d$$



Longueur de l'arc de cercle pour un angle θ

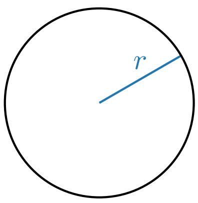
$$\ell = r\theta$$



2.2 Deux dimensions : surfaces

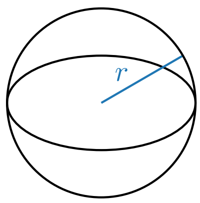
Disque de rayon r

$$S = \pi r^2$$



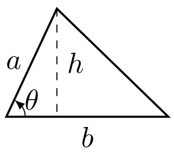
Sphère de rayon r

$$S = 4\pi r^2$$



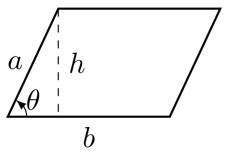
Triangle

$$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}ab\sin\theta$$



Parallélogramme

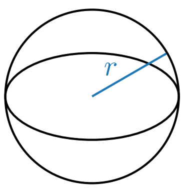
$$S = bh = ab\sin\theta$$



2.3 Trois dimensions : volumes

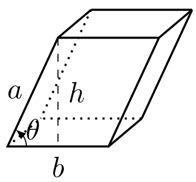
Sphère de rayon r

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



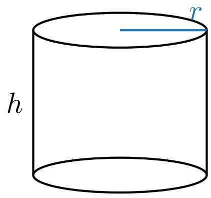
Parallélépipède

$$V = bh\,c = abc\sin\theta$$



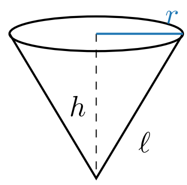
Cylindre $V = \pi r^2 h$
Surface latérale

$$S = 2\pi r\, h$$



Cône $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$
Surface latérale

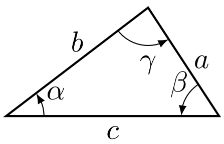
$$S = \pi r \ell$$



2.4 Relations dans les triangles et trigonométrie

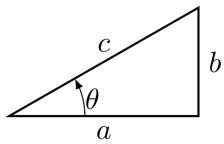
Triangle quelconque

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



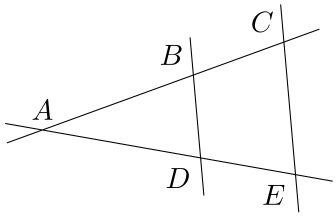
Triangle rectangle

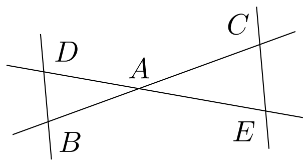
$$\cos\theta = \frac{a}{c}\,, \quad \sin\theta = \frac{b}{c}$$
$$\tan\theta = \frac{b}{a}\,, \quad a^2 + b^2 = c^2$$



Théorème de Thalès :
Si BD et CE sont parallèles, alors

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}\,.$$





2.5 Relations trigonométriques

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$
$$\cos(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\,, \quad \sin(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$$
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}$$
$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$
$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$$
$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a)\tan(b)}$$
$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin(a) \pm \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a\pm b}{2}\right)\cos\left(\frac{a\mp b}{2}\right)$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$
$$\cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\,, \quad \sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}$$
$$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$$
$$\cosh(a \pm b) = \cosh(a)\cosh(b) \pm \sinh(a)\sinh(b)$$
$$\sinh(a \pm b) = \sinh(a)\cosh(b) \pm \cosh(a)\sinh(b)$$
$$\tanh(a \pm b) = \frac{\tanh(a) \pm \tanh(b)}{1 \pm \tanh(a)\tanh(b)}$$
$$\cosh(a) + \cosh(b) = 2\cosh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cosh(a) - \cosh(b) = 2\sinh\left(\frac{a+b}{2}\right)\sinh\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sinh(a) \pm \sinh(b) = 2\sinh\left(\frac{a\pm b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a\mp b}{2}\right)$$

3 Nombres complexes

Un nombre complexe $\underline{z} \in \mathbb{C}$ peut s'écrire sous forme cartésienne ou polaire,

$$\underline{z} = x + \mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\,, \quad x = \Re(\underline{z}) \in \mathbb{R}\,, \quad y = \Im(\underline{z}) \in \mathbb{R}\,,$$
$$r = |\underline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}\,, \quad \theta = \arg(\underline{z}) \in \left]-\pi;\pi\right]\,, \quad \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\,, \quad \tfrac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\,.$$

✎ *En physique, le nombre* i *tel que* $\mathrm{i}^2 = -1$ *est souvent noté* j.

$$\frac{a + b\mathrm{i}}{c + d\mathrm{i}} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,, \quad r^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}\,, \quad \theta = \arg(a + b\mathrm{i}) - \arg(c + d\mathrm{i})\,.$$

4 Développements limités

$$f(a+\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\epsilon^n = f(a) + f'(a)\epsilon + \frac{1}{2}f''(a)\epsilon^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(a)\epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4)$$

$$(1+\epsilon)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} = 1 + \alpha\epsilon + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

$$\exp(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} = 1 + \epsilon + \frac{1}{2}\epsilon^2 + \frac{1}{6}\epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4)$$

$$\cos(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\epsilon^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \qquad \cosh(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4)$$

$$\sin(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\epsilon^{2n+1}}{(2n+1)!} = \epsilon - \frac{1}{6}\epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^5) \qquad \sinh(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^{2n+1}}{(2n+1)!} = \epsilon + \frac{1}{6}\epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^5)$$

$$\tan(\epsilon) = \epsilon + \frac{1}{3}\epsilon^3 + \frac{2}{15}\epsilon^5 + \mathcal{O}(\epsilon^7) \qquad \tanh(\epsilon) = \epsilon - \frac{1}{3}\epsilon^3 + \frac{2}{15}\epsilon^5 + \mathcal{O}(\epsilon^7)$$

$$\frac{1}{1+\epsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\epsilon^n = 1 - \epsilon + \epsilon^2 - \epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \qquad \frac{1}{1-\epsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n = 1 + \epsilon + \epsilon^2 + \epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4)$$

$$\ln(1+\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\epsilon^n}{n} = \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{3} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \qquad \ln(1-\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{\epsilon^n}{n} = -\epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^3}{3} + \mathcal{O}(\epsilon^4)$$

$$\arcsin(\epsilon) = \epsilon + \frac{1}{2}\frac{\epsilon^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{\epsilon^5}{5} + \mathcal{O}(\epsilon^7) \qquad \arccos(\epsilon) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\epsilon)$$

$$\arctan(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\epsilon^{2n+1}}{2^{n+1}} = \epsilon - \frac{1}{3}\epsilon^3 + \frac{1}{15}\epsilon^5 + \mathcal{O}(\epsilon^7)$$

5 Vecteurs

Scalaire Nombre donnant par exemple la masse d'un corps, le temps, etc.

Vecteur On utilise les vecteurs lorsqu'un seul nombre ne suffit plus pour décrire la situation donnée. Un vecteur rassemble plusieurs nombres (scalaires), ce sont ses *composantes*. Les composantes sont les projections du vecteur sur les vecteurs de base choisis (voir ci-après). Un vecteur donne plus de renseignements qu'un scalaire, par exemple le vecteur vitesse $\vec{v}$ donne la valeur de la vitesse v (sa norme), mais aussi sa direction (droite portant le vecteur) et son sens.

Produit scalaire C'est une opération à partir de deux vecteurs (ici $\vec{a}$ et $\vec{b}$) dont le résultat est un scalaire (ici d). Elle se note $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Il s'agit du produit entre a et la projection de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$, comme sur la figure 1a, $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$.

> ✎ *La projection du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur la droite Δ est la longueur AH avec H le projeté orthogonal de B sur l'axe Δ, comme sur la figure 1b, c'est-à-dire $AH = AB\cos\alpha$.*

Composantes d'un vecteur Les composantes a_1, a_2 et a_3 sont les projections du vecteur $\vec{a}$ sur les axes définis par les vecteurs de base $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3\,, \quad a_1 = \vec{a}\cdot\vec{e}_1 = a\cos\alpha_1\,, \quad a_2 = \vec{a}\cdot\vec{e}_2 = a\cos\alpha_2\,, \quad a_3 = \vec{a}\cdot\vec{e}_3 = a\cos\alpha_3\,,$$

avec α_i l'angle formé entre $\vec{a}$ et $\vec{e}_i$.

(a) **(b)**

Figure 1

Produit scalaire avec les composantes La plupart du temps, le système de coordonnées est basé sur des vecteurs de base *orthonormés*, c'est-à-dire que les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ sont *unitaires* (« normés », de norme 1) et *orthogonaux entre eux* (« ortho »). De plus, les bases seront choisies *directes*, c'est-à-dire si $\vec{e}_1$ pointe dans la direction du pouce de la *main droite*, alors $\vec{e}_2$ pointe dans la direction de l'index et $\vec{e}_3$ dans celle du majeur, et $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$. Alors,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \vec{b} \cdot \vec{a}\,.$$

Norme et vecteur unitaire Il s'agit de la longueur du vecteur,

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}\,, \quad \vec{a} = a\vec{u}_a\,, \quad \vec{u}_a = \frac{1}{a}\vec{a} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

avec $\vec{u}_a$ le vecteur unitaire (de norme 1), de mêmes direction et sens que $\vec{a}$.

Somme de vecteurs Il faut sommer les composantes dans la base choisie,

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}\,.$$

Multiplication par un scalaire Chaque composante est multipliée par ce scalaire,

$$k\vec{a} = k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$$

Produit vectoriel C'est une opération à partir de deux vecteurs (ici $\vec{a}$ et $\vec{b}$) dont le résultat est un autre vecteur (ici $\vec{c}$). Elle se note $\vec{a} \wedge \vec{b}$ ou parfois $\vec{a} \times \vec{b}$. Le vecteur $\vec{c}$ est de norme $ab|\sin\theta|$, de direction orthogonale à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$, de sens déterminé par la règle de la main droite. Une illustration est donnée en figure 2.

✎ *La norme de $\vec{c}$ correspond donc à la surface S du parallélogramme de côtés définis par $\vec{a}$ et $\vec{b}$.*

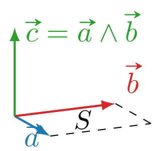


Figure 2

Références

[1] R. Taillet, L. Villain & P. Febvre. *Dictionnaire de physique.* 3e éd. De Boeck, 2013.