

Corrigé du DM 1

toutes les classes d'équivalence ont le même cardinal.

Exercice 6 : Théorème de Lagrange

1. • Soit $x \in G$, $xx^{-1} = e \in H$ car H est un sous-groupe de G ; donc \mathcal{R} est réflexive.

- Soit $x, y \in G$ tels que $x\mathcal{R}y$;
donc : $xy^{-1} \in H$, or H est un sous-groupe de G ,
donc : $(xy^{-1})^{-1} \in H$,
donc : $yx^{-1} \in H$.
Donc \mathcal{R} est symétrique.

- Soit $x, y, z \in H$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$;
donc : $xy^{-1} \in H$ et $y^{-1}z \in H$,
donc : $(xy^{-1}) \times (yz^{-1}) \in H$,
donc : $xz^{-1} \in H$.
Donc : \mathcal{R} est transitive.

\mathcal{R} est une relation d'équivalence.

2. Soit $y \in G$,

$$\begin{aligned}y\mathcal{R}x &\Leftrightarrow yx^{-1} \in H \\ &\Leftrightarrow exih \in H \mid yx^{-1} = h \\ &\Leftrightarrow exih \in H \mid y = hx \\ y &\in Hx\end{aligned}$$

Donc :

Hx est la classe d'équivalence de x pour la relation d'équivalence \mathcal{R} .

3. Pour tout $h \in H, hx \in Hx$, donc f est bien définie de H dans Hx et pour $(h, k) \in H \times Hx$

$$\begin{aligned}f(h) = k &\Leftrightarrow hx = k \\ &\Leftrightarrow h = kx^{-1}\end{aligned}$$

et pour tout $k \in Hx$, il existe $k' \in H$ tel que $k = k'x$, donc $kx^{-1} = k' \in H$ (on vérifie que l'antécédent trouvé est bien dans H).

f est bijective de H dans Hx .

4. Soit $x \in G$, d'après la question précédente, Hx est en bijection avec H , donc : la classe d'équivalence de x (c'est à dire Hx) a le même cardinal que H . Ceci est valable pour tout $x \in G$, donc :

5. On sait que les classes d'équivalences de \mathcal{R} réalisent une partition de G , or G est un ensemble fini. Donc le cardinal de G est la somme des cardinaux des classes d'équivalence. De plus, d'après la question précédente, toutes les classes d'équivalence ont le même cardinal : $\text{Card } H$; donc en notant α le nombre de classes d'équivalence, $n = \alpha \times \text{Card } H$.
Donc :

$\text{Card } H \mid n$.

6. Soit $x \in G$, l'ordre de x est : $\text{Card}(\text{gr}(x))$ et $\text{gr}(x)$ est un sous-groupe de G , donc d'après la question précédente : $\text{Card}(\text{gr}(x)) \mid n$. Donc :

l'ordre de tout élément de G divise le cardinal de G .

Exercice 8

Montrons que $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes :

soit $(x, y) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$,

donc : $4 \cdot (x, y) = (4 \cdot x, 4 \cdot y) = (\bar{0}, \bar{0})$. Donc l'ordre de tout élément de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ divise 4. Donc il n'existe pas d'élément d'ordre 8 dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: ce groupe n'est pas cyclique.

Or $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est cyclique, donc :

$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes.