Algèbre - Chapitre 1 : Formalisme et notations
Feuille d'exercices

Exercice 1 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Traduire les phrases suivantes avec des quantificateurs :

1. La fonction f s'annule au moins une fois.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. La fonction f s'annule une seule fois sur l'intervalle $[0;1]$.
4. La fonction f s'annule au moins deux fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

Soit $\mathcal{T}$ un triangle. On considère les propositions suivantes :

A : $\mathcal{T}$ est un triangle rectangle.

B : le carré de la longueur du plus grand côté est la somme des carrés des longueurs des deux plus petits.

On attribue à Pythagore les résultats suivants :

T : Aux triangles rectangles, le carré du côté qui soutient l'angle droit, est égal aux carrés des deux autres côtés.

R : Si le carré de l'un des côtés d'un triangle est égal aux carrés des deux autres côtés, l'angle entre ces côtés est droit.

1. Traduisez le théorème T et sa réciproque R en fonction des propositions A et B.
2. Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 6$. Laquelle des deux propositions de Pythagore utiliseriez-vous pour dire que ABC n'est pas rectangle ?

Exercice 3 :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.
Que signifient les assertions suivantes pour cette fonction ?

1. $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = C$.
2. $\forall x \in I, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
3. $\forall x \in I, \forall y \in I, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
4. $\forall x \in I, \forall y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
5. $\forall x \in I, \exists C \in \mathbb{R}, f(x) = C$.
6. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in I, y = f(x)$.
7. $\exists x \in I, \forall y \in \mathbb{R}, y = f(x)$.
8. $\forall x \in I, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.
9. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$.
10. $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) \leq M$.

Exercice 4 :

Soient E et F deux intervalles et soit une fonction $f : E \to F$.

1. Donner la négation de chacune des propositions suivantes :
   A : $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$.
   B : $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$.
   C : $\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
2. Ecrire la contraposée des implications suivantes :
   P : $x \geq \alpha \Rightarrow f(x) \geq \beta$.
   Q : $a \in A \Rightarrow a \leq 1$.
   R : $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Exercice 5 :

Ecrire les relations suivantes à l'aide des symboles $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$. Dire lesquelles de ces propositions sont vraies pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Pour que x soit supérieur ou égal à 0, il faut que x soit strictement supérieur à 1.
2. Pour que x soit supérieur ou égal à 0, il suffit que x soit strictement supérieur à 1.
3. Pour que x^2 soit supérieur ou égal à 4, il est nécessaire que x soit supérieur à 2.
4. x^3 est supérieur ou égal à 1 si et seulement si x est supérieur ou égal à 1.

Exercice 6 :

Montrez que si x et y sont deux réels tels que $xy > 0$ et $x + y \geq 0$, alors $x > 0$ et $y > 0$.

Exercice 7 :

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est pair, alors n est pair également.

Exercice 8 :

Montrez que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont n réels positifs ou nuls, tels que leur somme est nulle, alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i = 0$.

Exercice 9 :

Montrez que les deux assertions proposées sont équivalentes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geq n$ et $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 \geq x$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq 0$.
3. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$, $|u_n| \leq \varepsilon$ et $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$, $|u_n| \leq \varepsilon/2$

Exercice 10 : quelques récurrences

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. On définit la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} = S_n + 2n$. Calculer S_1, S_2, S_3 et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = n(n-1)$.
3. Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout $n \geq 0$ que $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$. On suppose que $u_0 = 1$ et $u_1 = 6$.
   Montrez que pour tout $n \geq 0$, $u_n = (2n+1)2^n$
4. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$ par $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} + 4u_n}{3u_{n+1} + 2u_n}$. Déterminez la valeur de la suite u_n en fonction de n.
5. Soit $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 0$, $v_1 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = v_{n+1} + 3v_n$. Calculer v_2, v_3 et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq n\,5^n$.
6. On considère la suite $\left(w_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_0 = 0$, $w_1 = 1$, $w_2 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+3} = w_{n+2} + 2w_{n+1} + 3w_n$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq w_n \leq 3^n$.