Algèbre - Pack de démarrage

Rappel (et un peu plus) sur le calcul et les équations

I Calcul élémentaire

1) Rappels

a) Fractions

Définition :

Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$.
On appelle **quotient de** a **par** b**,** noté $\dfrac{a}{b}$ le résultat de la division de a par b, c'est à dire le nombre réel qui, multiplié par b, donne a.
Dans la fraction $\dfrac{a}{b}$, a est appelé **numérateur**, et b est appelé **dénominateur**.

Propriété 1 :

On ne change pas la valeur d'une fraction si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur par un même réel non nul : pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}.$$

Propriété 2 :

Pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sous réserve d'existence :

- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$ (**Somme avec dénominateur commum**)
- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bd} + \dfrac{bc}{bd} = \dfrac{ad+bc}{bd}$ (**Réduction au même dénominateur**)
- $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ (**Produit**)
- $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$ (**Diviser, c'est multiplier par l'inverse**)
- $\dfrac{a}{b} \div c = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{1}{c} = \dfrac{a}{bc}$
- $a \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{1} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{d}$.

Au secours ! Et quand il y a plein d'étages ?

Une situation fréquente est d'avoir des fractions de fractions.
Des écritures comme $\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$, $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$, etc.
Dans ce cas là, utiliser la propriété 1 ou la règle "diviser, c'est multiplier par l'inverse" vous aidera à y voir clair ; attention à bien repérer où est la barre de fraction !

Exemples

- $A = \dfrac{\frac{2}{3}}{5} =$
- $C = \dfrac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{y}} =$
- $B = \dfrac{2}{\frac{3}{5}} =$
- $D = \dfrac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{z}} =$

b) Puissances entières

Définition :

- Soit n un entier strictement positif et a un réel. Par définition, a^n est le produit de n termes tous égaux à a :
$$a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}.$$
En particulier $a^1 = a$.
- Par convention $a^0 = 1$.
- Si a est non nul, alors a^{-n} désigne l'inverse de a^n : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
En particulier, a^{-1} est l'inverse de a : $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

Propriété 3 :

Pour tous réels a et b (avec $b \neq 0$) et pour tous entiers relatifs n et p,

- $a^n \times a^p = a^{n+p}$
- $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
- $a^n \times b^n = (ab)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$
- $(a^n)^p = a^{n \times p}$.

c) Priorités calculatoires

Propriété 4 :

Pour calculer une expression numérique **sans parenthèses**, on effectue les calculs de la gauche vers la droite, en commençant par les multiplications et les divisions qui ont priorité sur les additions et les soustractions.
Si l'expression **comprend des parenthèses**, on commence par effectuer les calculs à l'intérieur des parenthèses les plus intérieures. On effectue ces calculs en respectant les priorités définies au paragraphe précédent.

Danger ! — Parenthèses cachées

- Les puissances sont prioritaires. Ainsi pour faire 2×3^3, on calcul d'abord 3^3, puis on multiplie par 2. Tout se passe comme si 3^3 était entre parenthèses. En particulier, $2 \times 3^3 \neq 6^3$
- La barre horizontale des fractions agit comme une parenthèse.
Ainsi $-\dfrac{a+b+c}{d} = \dfrac{-a-b-c}{d}$.

2) Identités remarquables

a) Distributivité

Propriété 5 :
Soient a, b, et c des nombres réels (ou complexes).
Alors
$$a(b+c) = ab + ac \text{ et } (a+b)c = ac + bc$$
On dit que le produit est *distributif* sur la somme (distributivité à gauche pour la première propriété, à droite pour la seconde)

Remarques :

- Quand on distribue, cela correspond à "développer" l'expression.
- Quand on utilise l'égalité dans l'autre sens, on appelle cela "factoriser".

b) Identités remarquables

On rappelle les formules ci dessous, très importantes pour simplifier des expressions et à maîtriser dans les deux sens (forme factorisée ou développée)

Propriété 6 :
Soient a et b deux réels (ou complexes). Alors

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Ces formules se généraliseront à des puissances supérieures dans le chapitre consacré aux sommes.

II Résolution d'équations élémentaires et de systèmes linéaires

1) Généralités :

a) Vocabulaire

▶ **"Equation"**
On appelle **équation** toute expression (E) dépendant d'une variable x (ou de plusieurs variables notées par exemple x_1, x_2, ..., x_n...) et contenant un symbole d'égalité. La variable x est appelée **inconnue**.

▶ **"Résoudre l'équation (E) sur l'ensemble I "**
Cela signifie trouver tous les x possibles appartenant à I tels que l'expression (E) est vraie. On dit alors que x **vérifie** l'équation (E) ou encore que x est **solution** de (E)

▶ **"Equations équivalentes :"**
Soit (E) et (F) deux équations. On dit que (E) et (F) sont équivalentes, et on note $(E) \iff (F)$ si et seulement si (E) et (F) ont les mêmes solutions.

▶ **"Ensemble de définition"**
De par l'utilisation de fonctions dans les équations, il peut y avoir des problèmes de définition.

Exemple :
Soit l'équation (E) : $\sqrt{x+2} = x+1$.
Cette équation n'a pas de sens pour tout les x réels, à cause de la racine.
On doit avoir , et donc l'ensemble de définition de l'équation est

▶ **"Ensemble de résolution"**

Ce qu'on appelle *l'ensemble de résolution* est l'ensemble sur lequel on résout l'équation. On peut en effet être amené à chercher des solutions sur des ensembles plus restreints que l'ensemble de définition.

Exemple :

On reprend (E) : $\sqrt{x+2} = x+1$.

b) Opérations équivalentes :

Méthode : UTILISATION DES OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Soit (E) une équation à résoudre de la forme $A = B$ (où A et B sont des expressions dépendants éventuellement des inconnues).

Alors on peut :

1. Ajouter à chaque membre le même terme :
   Pour n'importe quelle expression C :
   $$A = B \iff A + C = B + C$$
2. Multiplier par un même terme non nul :
   Si C ne s'annule pas :
   $$A = B \iff AC = BC$$

Exemple :

$$(E) \;:\; 4x + 3 = 2x - 1$$

$$(F) \;:\; \frac{x+1}{x-2} = 2$$

c) Utilisation de la factorisation :

Méthode : **UTILISER L'INTÉGRITÉ DE $\mathbb{R}$**

Dans l'ensemble des nombres réels, on dispose de la propriété suivante :

$$xy = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0$$

On pourra donc exploiter cette propriété dans les équations.

Exemple :

$$(G) \ : \ 3x\ln(x) = \ln(x)$$

Cas des inégalités

L'écriture sous forme factorisée est très utile quand on cherche le signe d'une expression. On utilisera fréquemment les *tableaux de signes* pour se repérer.

Exemples :

$$(H) \ : \ \frac{(2x+3)(x-1)}{4-x} \geq 0$$

2) Equations du second degré

Theorème 1 :

Soit a, b et c trois réels avec $a \neq 0$ et soit l'équation (E) : $ax^2 + bx + c = 0$.

Soit P le polynôme défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$.

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, que l'on appelle "discriminant". Alors trois cas se présentent :

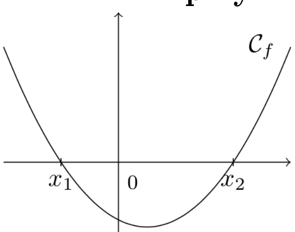
- si $\Delta < 0$, (E) n'a pas de solution réelle et $P(x)$ est de signe constant (le signe de a)
- $\Delta = 0$, (E) admet une unique solution (dite "racine double") : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
  $P(x)$ est alors de signe constant (celui de a) et peut se factoriser sous la forme :
  $$P(x) = a(x - x_0)^2$$
- $\Delta > 0$, (E) admet deux solutions réelles distinctes, que l'on appelle racines de P :
  $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
  $P(x)$ est alors du signe de a à l'extérieur des racines, de $-a$ à l'intérieur.
  On peut factoriser $P(x)$ sous la forme :
  $$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

On traitera plus précisément ce résultat dans le chapitre consacré aux polynômes.

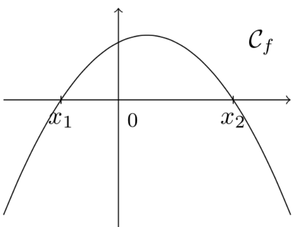
Exemple

$$(E)\ 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

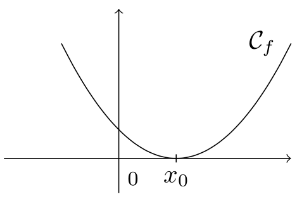
Les propriétés relatives au signe se retiennent bien si on visualise le graphe de la fonction polynôme :



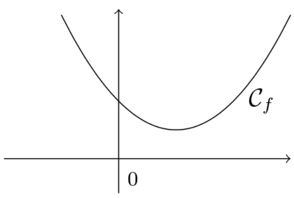
Si $\Delta > 0$ et $a > 0$



Si $\Delta > 0$ et $a < 0$



Si $\Delta = 0$ et $a > 0$



Si $\Delta < 0$ et $a > 0$

On dispose enfin de la propriété ci dessous, très pratique :

Propriété 7 :
Soit $ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré admettant comme solutions x_1 et x_2 (éventuellement égales), alors

(i) $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$

(ii) $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$

▷ *Preuve* : on le vérifie facilement par identification en développant la forme factorisée. ◁

Exemple d'utilisation
Soit à résoudre $x^2 + 12x - 13 = 0$.

A retenir : toujours essayer des racines évidentes avant de se lancer dans des Δ...

3) Systèmes d'équations linéaires

a) Généralités

Définition :
Soit n et p deux entiers naturels. On appelle **système d'équations linéaires** de n équations à p inconnues toutes listes d'équations d'inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ de la forme

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{llll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots\dots\dots & +a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots\dots\dots & +a_{2p}x_p & = b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \dots\dots\dots & +a_{np}x_p & = b_n \end{array} \right.$$

Les coefficients a_{ij} et les termes $b_1, b_2, \dots, b_n$ sont des éléments de $\mathbb{R}$.
Les coefficients $b_1, b_2, \dots, b_n$ constitue ce qu'on appelle le **second membre du système**.
La partie à gauche du signe égal est appelée **premier membre du système**.

Exemples :
$S_1 : \left\{ \begin{array}{ll} 3x + y & = 0 \\ x + 2y & = 0 \end{array} \right.$ est linéaire et $S_2 : \left\{ \begin{array}{ll} 4x^2 + y & = 0 \\ x + y & = 0 \end{array} \right.$ n'est pas linéaire.

Danger ! Toujours bien ranger un système !
Quand on a un système d'équation à résoudre, on veillera à systématiquement le "ranger", avec les inconnues à gauche du signe égal, les constantes à droite.
Les inconnues devront en outre être triées et alignées verticalement.

Exemples :

$$S_3 : \left\{ \begin{array}{rl} 3x+y & = -z \\ z+2y-1 & = 0 \end{array} \right.$$

devra être rangé avant résolution pour devenir

$$S_3 : \left\{ \begin{array}{rl} 3x+y+z & = 0 \\ 2y+z & = 1 \end{array} \right.$$

Notation

Soit un système rangé, de n équations et p inconnues.
Pour tout $i \leq n$, on note souvent L_i la i-ème ligne.
De la même façon, pour tout $j \leq p$, on note C_j la j-ème colonne.

Définition :

Un système est dit **homogène** si tous les b_i sont nuls.

Exemples :
$S_1 : \left\{ \begin{array}{rl} 3x+y & = 0 \\ x+2y & = 0 \end{array} \right.$ est homogène et $S_2 : \left\{ \begin{array}{rl} 3x+y & = 0 \\ x+2y & = 2 \end{array} \right.$ ne l'est pas.

Définition :

Un système est dit **incompatible** si l'ensemble des solutions est vide.

Exemple :
$S_3 : \left\{ \begin{array}{rl} x-2y & = 0 \\ -x+2y & = 1 \end{array} \right.$ est incompatible

b) Systèmes étagés :

Définition :

- Un système, avec inconnues rangées, est dit **étagé** (ou *échelonné*) si chaque ligne dont le premier membre est non nul commence strictement plus tard que la ligne précédente dans l'ordre des inconnues.
- Le premier coefficient de chaque ligne non nulle est appelé **pivot**.
- Le nombre de pivots d'un système étagé (c'est à dire aussi le nombre de lignes non nulles, hors second membre) est appelé **rang**.

Exemples :
Les systèmes ci dessous sont-ils étagés ? si oui, quel est le rang ?

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{rl} 3x+y & = 0 \\ x+2y & = 0 \end{array} \right.$$

$$S_2 : \left\{ \begin{array}{rl} 3x+y & = 0 \\ 2y & = 0 \end{array} \right.$$

$$S_3 : \left\{ \begin{array}{rl} 3x+y & = 0 \\ 0 & = 0 \end{array} \right.$$

$$S_4 : \left\{ \begin{array}{rl} 3x+y+z & = 0 \\ 2y+z & = 2 \\ z & = 3 \end{array} \right.$$

$$S_5 : \left\{ \begin{array}{rl} 3x+y+z & = 0 \\ x+y+2z & = 0 \\ x & = 2 \end{array} \right.$$

$$S_6 : \left\{ \begin{array}{rl} 3x+y+z & = 0 \\ x+y & = 0 \\ x & = 2 \end{array} \right.$$

$$S_7 : \left\{ \begin{array}{rl} 3x+y+z & = 0 \\ y \quad\quad & = 0 \\ 0 & = 0 \end{array} \right.$$

$$S_8 : \left\{ \begin{array}{rl} 3x+y+z & = 0 \\ y+2z & = 0 \\ 0 & = 2 \end{array} \right.$$

Proposition 1 :

Le rang d'un système permet de connaître le nombre d'inconnues "en trop", qu'on appelle **inconnues paramètres** ou **inconnues secondaires** : si le système a p inconnues et que le rang est r, on a $p - r$ inconnues paramètres.

Méthode : RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME ÉTAGÉ

Un système étagé se résout très facilement (et toujours !) par substitution :

Exemples :

1. Une situation "idéale", où il suffit de substituer du bas vers le haut :

$$\begin{cases} 3x + y + z & = 1 \\ 2y + 2z & = 2 \\ z & = 3 \end{cases}$$

   Remarque : un tel système a toujours qu'une seule solution, même si on change le second membre. On dit que c'est un **système de Cramer**.

2. Situation rang plus petit que le nombre d'inconnues :

$$\begin{cases} 4x + y + z & = 2 \\ y - z & = 0 \end{cases}$$

   Le rang est 2, il y a 3 inconnues : il y a alors $3 - 2 = 1$ inconnue qui servira de paramètre.
   Pour ne pas risquer de choisir une mauvaise, on part de la dernière ligne, et on choisi l'une des deux. Par défaut, on peut prendre celle tout à droite.
   On indique alors que z est quelconque en précisant "$z \in \mathbb{R}$" et on remplace ensuite dans chaque ligne, en partant du bas :

$$\begin{cases} x & = \frac{1}{2}(1 - z) \\ y & = z \\ z & \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3. Situation d'incompatibilité :

$$\begin{cases} 3x + y + z & = 1 \\ 2z & = 2 \\ 0 & = 3 \end{cases}$$

   Ce système est étagé de rang 2, mais la dernière ligne est toujours fausse.
   Ce système n'a donc pas de solution et alors dit **incompatible**.

c) Méthode de réduction de Gauss-Jordan

A noter : **OPÉRATION ÉQUIVALENTES**

On s'autorise uniquement les opérations suivantes sur les lignes :

(i) Echanger les lignes i et j : opération notée "$L_i \leftrightarrow L_j$"

(ii) Multiplier une ligne par un scalaire non nul : "$L_i \leftarrow \alpha L_i$"

(iii) Remplacer L_i par une combinaison linéaire de L_i et L_j avec un coeff non nul pour L_i :
"$L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$" (avec $\alpha \neq 0$).

Toutes ces opérations sont réversibles (on peut revenir à la situation précédente facilement) : on obtient donc des systèmes équivalents.

Avec ces opérations là, on peut montrer le résultat ci dessous (admis pour le moment)

Theorème 2 :

Tout système d'équations linéaires (ou toute matrice...) peut se ramener à un système (ou à une matrice) étagé via des opérations équivalentes.
En outre, le nombre de pivots obtenus par cette méthode ne dépend pas des choix d'opération effectuées : ce nombre est appelé rang du système (ou de la matrice associée...) et est habituellement noté r.
Le rang d'un système est toujours inférieur au nombre d'équations et au nombre d'inconnues : $r \leq n$ et $r \leq p$.

La preuve de la possibilité de réduire le système provient de l'algorithme ci dessous, et c'est ce qu'on fera concrètement :

Méthode : **RÉDUCTION D'UN SYSTÈME PAR PIVOT DE GAUSS**

On présente l'algorithme :

1. On "trie" les lignes du système de manière à mettre en L_1 une ligne qui commence par la première inconnue.
2. On utilise la ligne L_1 pour "supprimer" les autres inconnues.
   Pour chaque ligne L_i avec $i > 1$, on cherche des coefficients a et b, avec $a \neq 0$ tels que l'opération $aL_i + bL_1$ fait disparaitre la première inconnue.
3. On recommence les étapes 1 et 2 en prenant cette fois L_2 et la deuxième inconnue (sans toucher la ligne L_1), puis L_3 et la troisième inconnue (sans toucher ni la ligne L_1, ni L_2) et ansi de suite.

l'algorithme s'arrête quand on arrive à la dernière ligne ou inconnue.

On dit qu'on a alors "réduit" le système via le pivot de Gauss.

Exemples :

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ -2x + y & = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z &= 1 \\ -2x + y - z &= 4 \\ x + 7y + 2z &= 7 \end{cases}$$