Algèbre - Chapitre 1

Formalisme et notations

I Eléments de logique

1) Propositions logiques, quantificateurs

a) Définition

Définition :

On appelle **proposition logique** ou **assertion** toute affirmation qui est sans ambiguïté vraie ou fausse.

Exemples :

- A : "tous les chats sont noirs" (A est fausse).
- B : "si un nombre réel x est tel que $x \geq 1$, alors $x^2 \geq x$" (B est vraie).
- C : "la Terre est plate" (C est fausse).

b) Quantificateurs mathématiques

NOTATION

Afin de clarifier les écritures, on utilisera en mathématiques les notations suivantes :

(i) $\forall$, qui signifie "pour tout" ou "quel que soit",

(ii) $\exists$, qui signifie "il existe" (sous entendu : "il existe au moins un"),

(iii) $\exists!$, qui signifie "il existe un unique".

Ces notations sont appelées "quantificateurs universels".

Une fois une lettre introduite par un quantificateur, on poursuit avec une virgule. Après l'introduction par $\exists$, cette virgule se lit "tel que". On trouve aussi fréquemment une barre oblique pour dire ce "tel que", même si son usage se raréfie au profit de la virgule.

Exemples :

- D : "$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geq n$" signifie "pour tout entier naturel n, $n^2 \geq n$". Cette affirmation est
- E : "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$". Cette proposition est
- F : $\exists x \in \mathbb{R}/x^2 < x$. Cette assertion est

Danger !

⚠ En mathématiques, chaque lettre utilisée doit être introduite, soit en français, soit via des quantificateurs.
Par exemple dire juste "$n^2 \geq n$" n'est pas une proposition logique si on ne précise pas ce qu'est n : il y a une ambiguïté.

⚠ L'ordre des opérateurs est essentiel ! Chaque lettre introduite peut dépendre des précédentes, mais les premières ne dépendent pas des dernières. Ainsi, les deux phrases suivantes ont des sens très différents

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}/xy = 1$$

$$\exists y \in \mathbb{R}/\forall x \in \mathbb{R}^*, xy = 1$$

⚠ On n'utilise JAMAIS les quantificateurs comme abréviation au milieu de phrases en français.

2) Connecteurs logiques

a) ou (union)

Définition :

Soient A et B deux propositions. La proposition "A ou B est vraie" signifie "A est vraie ou B est vraie (ou les deux sont vrais).

Le "ou" en math sans précision supplémentaire est toujours inclusif...

Table de vérité :

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
A ou B	V	V	V	F

Remarque : on fera le parallèle avec l'idée "d'union" : le connecteur logique "ou" réunit en effet tous les cas favorables.

b) et (intersection)

Définition :

Soient A et B deux propositions. La proposition "A et B est vraie" signifie que "A et vraie et B est vraie" (sous entendu : simultanément)

Table de vérité :

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
A et B	V	F	F	F

Remarque : on fera le parallèle avec l'idée "d'intersection" pour désigner le "et" : le connecteur logique "et" ne conserve que les cas favorables à la fois à A et à B (a priori moins nombreux que ceux favorables à l'union).

c) Négation

Définition :

Soit A une proposition. On note $\bar{A}$ (ou on écrit $nonA$) la proposition qui est fausse si A est vraie, et qui est vraie si A est fausse. $\bar{A}$ est appelé **négation de** A.

Table de l'opérateur :

A	V	F
non A	F	V

Exemple :

- A : "la Terre est plate" se nie en $\bar{A}$:
- B : "tous les chats sont noirs" se nie en $\bar{B}$:
- C : "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$" se nie en $\bar{C}$:
- D : "$\exists x \in \mathcal{D}_f, f(x) \neq 0$" se nie en $\bar{D}$:

Méthode : Traiter les quantificateurs dans une négation

Lors du passage à la négation d'une assertion contenant des quantificateurs, ceux-ci sont intervertis :
Ainsi, $\forall$ se transforme en $\exists$ et $\exists$ devient $\forall$.
L'ordre d'apparition n'est pas affecté.

Pour traiter les "ou" et "et", on utilisera le résultat ci dessous :

Proposition 1 : Lois de Morgan :

Soient A et B deux propositions, alors :

$$\overline{A \text{ } ou \text{ } B} = \bar{A} \text{ } et \text{ } \bar{B}, \quad \overline{A \text{ } et \text{ } B} = \bar{A} \text{ } ou \text{ } \bar{B}$$

▷ *Preuve* :

◁

Exemple :
$x \geq 0$ et $x \leq 1$ se nie en :

Remarque :
En logique formelle (hors programme de PCSI), l'intersection est associée au $\forall$, l'union est associée à $\exists$. D'après les Lois de Morgan, ou devient et, et devient ou, ce qui correspond bien au point méthode donné plus haut sur l'intervertion de $\exists$ et $\forall$.... Les Lois de Morgan sont donc la preuve de cette "méthode".

3) Implications, équivalences, etc.

a) Implication

Définition :

Soit A et B deux propositions. Intuitivement, on dit que $A \Longrightarrow B$ si le fait que A soit vraie entraine que B soit vraie.
Elle est donné par la table suivante :

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
A $\Longrightarrow$ B	V	F	V	V

Si $A \Longrightarrow B$ est vraie, on dit que "A implique B", ou encore "si A, alors B".

Remarque
On peut voir d'après la table de vérité que $A \Longrightarrow B$ est en fait la proposition $\bar{A}$ ou B.

Exemples :

- Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \geq 1 \Longrightarrow x^2 \geq x$ est vraie.
- "il pleut" $\Longrightarrow$ "il y a des nuages" est
- "la Terre est plate" $\Longrightarrow$ "tous les chats sont noirs" est

En pratique :
on utilise $\Longrightarrow$ pour dire "si ... alors ...",

- Si il pleut, alors il y a des nuages.
- Si la Terre est plate, alors tous les chats sont noirs

Attention :
l'utilisation de $\Longrightarrow$ à la place d'un "donc" ou pour dire "on en déduit" dans un raisonnement est impropre : la flèche a un sens mathématiques très précis, qui est de relier deux propositions entre elles, mais elle n'a pas de valeur "démonstrative" pour l'une des propositions. En effet, ce n'est pas parce que vous dites $A \Longrightarrow B$ que B est vraie.

Exemple :
La phrase "la Terre est plate" $\Longrightarrow$ "tous les chats sont noirs" est vraie, mais la phrase "la Terre est plate" donc "tous les chats sont noirs" est fausse, puisque le point de départ est faux...

b) Négation de l'implication :

Soient A et B deux propositions, et P la phrase $A \Longrightarrow B$.
Nier P, c'est dire qu'on peut avoir A, mais pas B : c'est la deuxième colonne de la table de vérité dans la définition.
Autrement dit, la negation d'une implication est la phrase logique "A et non B".

Propriété 1 :

Soit A et B deux propositions, la négation de

$$A \Longrightarrow B$$

est

$$A \text{ et } \bar{B}$$

Exemples :

- la négation de "il y a des nuages" $\Longrightarrow$ "il pleut" est “il y a des nuages et il ne pleut pas”.
- la phrase $\forall x \in \mathbb{R}^*, x > 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{x} < 1$ se nie en

Méthode : UTILISATION DE CONTRE EXEMPLE

En mathématique, un exemple n'a, a priori, pas valeur de preuve.
Néanmoins, si une phrase affirme qu'une propriété est vraie "pour tout" quelque chose, et qu'on veut prouver qu'en fait elle est fausse, il suffira de montre "qu'il existe" quelque chose qui met en cause la proposition.
En procédant ainsi, on aura montré que le contraire de la propriété est vraie, donc que celle qu'on avait au départ est fausse.

Exemple :

Dans l'exemple juste au dessus, il est effectivement faux de dire que pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x} < 1$, puisqu'en prenant $x = 0.5$, on a bien $x > 0$, mais $\dfrac{1}{x} = 2 > 1$.
On a donc montré par un contre exemple que la phrase initiale était fausse.

c) Réciproques et équivalence :

Définition :

On appelle **réciproque** de $A \Longrightarrow B$ la phrase $B \Longrightarrow A$.

En général, ce n'est pas parce que $A \Longrightarrow B$ que $B \Longrightarrow A$.

Exemples :

- Soit $x \in \mathbb{R}$. La phrase ci dessous est vraie :

$$x \geq 0 \Longrightarrow x^2 \geq 0$$

  La phrase $x^2 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 0$ est

- $|x| = 0 \Longrightarrow x = 0$ est vraie, et la réciproque $x = 0 \Longrightarrow |x| = 0$ est

Définition :

Dire que deux propositions A et B sont **équivalentes** signifie que $A \Longrightarrow B$ et $B \Longrightarrow A$.
On note alors $A \Longleftrightarrow B$.

Exemples :

- $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
- $x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

A noter : RESOLUTION D'ÉQUATION ET ÉQUIVALENCE

Quand on résout des équations, il sera essentiel de procéder par équivalence, sous peine de perdre des solutions ou d'en avoir en trop.

d) Contraposée :

Définition :
Soient A et B deux propositions.
On appelle **contraposée** de $A \Longrightarrow B$ la phrase $nonB \Longrightarrow nonA$.

Exemples :

- "il pleut $\Longrightarrow$ il y a des nuages" a pour contraposée :

- "$|x| = 0 \Longrightarrow x = 0$" a pour contraposée

Danger ! PIÈGE MORTEL :
Il ne faut pas confondre contraposée et réciproque.
La contraposée d'une implication n'est pas non plus la négation de l'implication !

Theorème 1 :
$A \Longrightarrow B$ et sa contraposée $nonB \Longrightarrow nonA$ ont même signification.

▷ *Preuve* : On peut utiliser les tables de vérité, ou partir de la traduction formelle :

◁

II Mode de raisonnement :

1) Preuve par contraposition

Méthode : PREUVE PAR CONTRAPOSITION :
Comme une implication et sa contraposée ont même sens, il peut être utile de passer par la contraposée d'une proposition pour établir une propriété...

Ainsi, si on nous demande "montrer que si on a A, alors on a B", on peut montrer que "si on n'a pas B, alors on n'a pas A", ce qui revient en fait au même !

Exemple :
On veut montrer que si x et y sont deux nombres réels non nuls, alors xy est non nul également.
Autrement dit, on veut montrer

$$x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \Longrightarrow xy \neq 0$$

Ce n'est en fait pas si évident directement, et on va raisonner par contraposition.
Commençons par écrire la contraposée :

2) Disjonction de cas :

Méthode : DISJONCTION DE CAS :

Pour démontrer la validité d'une assertion, on sera souvent amené à considérer plusieurs situations qui impliquerait la validité de la proposition.
Si toutes les situations possibles entrainent la validité de l'expression proposée, celle ci sera donc vrai "dans tous les cas".
On dit qu'on a alors raisonné par disjonction de cas.

Exemple :
Montrons que $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un nombre entier pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3) Le raisonnement par l'absurde :

Méthode : **LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE**

Si on veut démontrer qu'une proposition A est vraie, on peut procéder par contradiction

1. On supposons que A est fausse (donc que $\bar{A}$ est vraie).
2. On fait des déductions logiques...
3. On arrive à une proposition B manifestement fausse
4. On en conclut que A est vraie

Exemple : le secret des Dieux

Montrons que $\sqrt{2}$ est "irrationnel", c'est à dire que ce n'est pas une fraction.

4) L'analyse-synthèse :

Le raisonnement par "analyse synthèse" est un raisonnement fréquemment utilisé quand on cherche des solutions à une équation, quand on cherche à prouver l'existence de quelque chose, quand on cherche à construire certains objets, etc.

Méthode : **ANALYSE-SYNTHÈSE**

Le raisonnement par analyse synthèse se produit en deux phases :

1. Etape d'analyse.

   On suppose que le problème est résolu (par exemple : on suppose qu'on a une solution à l'équation). On cherche a aller le plus loin possible sous cette hypothèse, jusqu'à ce qu'on obtienne des conditions qui nous paraissent satisfaisante.

   On a alors obtenu des **conditions nécessaires** à la résolution de notre problème.

2. Etape de synthèse.

   On vérifie que les conditions nécessaires qu'on a obtenu sont en fait des **conditions suffisantes**. Au besoin, on l'ajuste. L'étape de synthèse peut ressembler énormément à l'analyse : il s'agit fréquemment de lire l'analyse en sens inverse, pour vérifier que les implications mises dans l'étape d'analyse sont en fait des équivalences.

Exemple :

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[-a, a]$ ou sur $\mathbb{R}$.
On dit que f est paire si pour tout x de son ensemble de définition, $f(-x) = f(x)$.
on dit qu'elle est impaire si pour tout x de son ensemble de définition, $f(-x) = -f(x)$.

Ainsi, cos est une fonction paire, sin est une fonction impaire. La fonction exp n'est ni l'un ni l'autre.
On va montrer par analyse synthèse qu'en fait, toute fonction peut s'écrire comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

III Le raisonnement par récurrence :

a) Récurrence (simple) :

Theorème 2 :
Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier n et soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si :

1. $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
2. Pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$

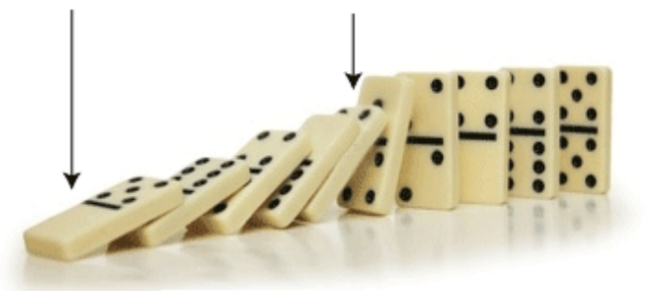
Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

▷ *Preuve* : Il n'y a pas de "vraie preuve" de la récurrence : c'est un axiome. C'est le principe de récurrence qui garantie l'existence même des entiers naturels... ◁

Le principe de récurrence peut être illustré par les dominos :

1. Initialisation :
Le premier domino tombe.

2. Hérédité :
Un domino qui tombe fait tomber le suivant.



3. Conclusion :
Tous les dominos tombent.

Remarque :
Très souvent, on initialise $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$, mais il ne faudra pas être perturbé si ça commence plus tard...

Méthode : PLAN DE RÉDACTION D'UNE RÉCURRENCE SIMPLE

Une récurrence peut être présentée de la façon suivante :

1. On énonce la proposition à démontrer : "Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : ...".
2. On annonce ce qu'on va faire : "Montrons par récurrence que pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie."
3. On initialise : "$\mathcal{P}(n_0)$ est vraie : en effet,...."
4. On montre l'hérédité : "Soit un entier $n \geq n_0$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors ..., donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie"
5. On conclut : "d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple :

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) Récurrence double :

La récurrence double est une variante de la récurrence. Elle est utilisée lorsqu'on a besoin des deux étapes précédentes pour déterminer l'étape suivante.

Méthode : Plan de rédaction d'une récurrence double

Une récurrence double peut être présentée de la façon suivante :

1. On énonce la proposition à démontrer : "Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : ...".
2. On annonce ce qu'on va faire : "Montrons par récurrence double que pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie."
3. On initialise : on montre que $\mathcal{P}(n_0)$ que $\mathcal{P}(n_0+1)$ est vraie (double initialisation)
4. On montre l'hérédité : "Soit un entier $n \geq n_0$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, alors ... , donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie"
5. On conclut : "d'après le principe de récurrence double, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$."

Si on reprend l'analogie des dominos, c'est comme si on avait besoin du poids de deux dominos pour faire chuter le suivant.

Exemple :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Montrez que $u_n = 2^n + (-1)^n$.

Remarque :
On peut tout à fait imaginer une récurrence triple, quadruple, etc... Il faut juste une triple (ou quadruple, etc...) initialisation et supposer que trois (ou quatre, etc...) étapes sont vraies lorsqu'on montre l'hérédité.

c) Récurrence forte

C'est une version assez rarement utilisée, qui est en fait une récurrence simple déguisée. Elle consiste lors de l'hérédité à utiliser tous les pas précédents pour déduire le pas suivant.

Méthode : **PLAN DE RÉDACTION**

Un récurrence forte peut être présentée de la façon suivante :

1. On énonce la proposition à démontrer : "Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : ... ".
2. On annonce ce qu'on va faire : "Montrons par récurrence forte que pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie."
3. On initialise : on montre que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
4. On montre l'hérédité : "Soit $n \in \mathbb{N} \geq n_0$. Supposons que pour tout entier p tel que $n_0 \leq p \leq n$, $\mathcal{P}(p)$ est vraie, alors ... , alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie"
5. On conclut : "d'après le principe de récurrence forte, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple :
Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de nombres premiers uniquement.