Analyse - Pack de démarrage

Rappel (et un peu plus) sur les fonctions.

I Vocabulaire et notation

1) Qu'est-ce qu'une fonction ?

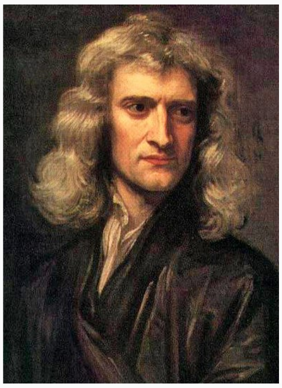
Définition :

On appelle **fonction** tout objet mathématique qui à un élément x appartenant à un ensemble de départ associe un élément appelé **image**, pris dans un ensemble d'arrivée.
Si la fonction s'appelle f, on note alors $f(x)$ l'image de x par f.

Remarques :

- Le plus souvent en ce début d'année, x sera un nombre réel. On pourra faire des "fonctions" sur des éléments autres, comme des vecteurs, des matrices, des événements, etc. On parlera alors d'**applications**.
- Intuitivement, une fonction désigne une sorte de machine qui effectue une opération sur des nombres.
  Par exemple, la machine "élever au carré" prend un nombre (qu'on aime bien appeler x) et le multiplie par lui même (c'est à dire x^2).
- Attention, ce qu'on appelle fonction, c'est la machine. Ainsi, x^2 n'est pas la fonction carré, mais l'image par la fonction carré de x...

? Le saviez-vous ? AU COEUR DE L'ANALYSE : LEIBNIZ ET NEWTON



L'étude des fonctions est au coeur des recherches en mathématiques au XVIIè siècle, et deux célèbres fondateurs de cette étude sont Gottfried Wilhelm Leibniz(Allemagne, 1646-1716) et Isaac Newton (Angleterre, 1642-1727).

Le terme "fonction" est introduit par Leibniz, à partir du mot latin *functio* ("remplir une tâche").

Les deux sont reconnus comme des maîtres aussi bien en sciences (mathématiques et physique) qu'en lettres (philosophie, théologie....).

Leibniz et Newton se sont opposés sur plusieurs points. Les deux ont revendiqué la paternité du calcul infinitésimal (les dérivées, les intégrales, les limites, etc.), mais leur opposition la plus forte concerne la physique. Malgré son éducation fondamentalement religieuse, Newton a établi les lois de la physique à partir d'observations, sans chercher de raison divine derrière ce qu'il découvrait. Leibniz, de son côté, refusait tout ce qui pouvait remettre en question la "perfection divine", ce qui engendra quelques conflits entre les deux hommes....

2) Ensemble de définition :

Définition :

On dit qu'une fonction f est **définie** sur un ensemble D si et seulement si pour tout x dans D, l'image $f(x)$ existe.
On appelle alors **ensemble de définition** le plus grand ensemble sur lequel la fonction est définie.
Si la fonction s'appelle f, cet ensemble est souvent noté D_f (D_g si elle s'appelle g, etc...).

Exemple :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

A noter : **RESTRICTION DE L'ENSEMBLE**

On n'aura pas toujours besoin de travailler sur l'ensemble "maximum" de définition d'une fonction.
Dans l'exemple ci dessus, on pourrait très bien dire que f est définie sur l'intervalle $[2;3]$, puisque "pour tout x dans l'intervalle $[2;3]$, $f(x)$ existe".
Si on étudie f que sur $[2;3]$, on dira qu'on **restreint** f à l'intervalle $[2;3]$.

NOTATION

Si f est définie sur un ensemble E avec des images dans un ensemble F, on pourra utiliser la notation suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

⚠ deux flèches de forme différente : $\to$ et $\mapsto$.

Exemple :

La fonction f définie pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ peut s'écrire :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x-1} \end{array}$$

Si on veut parler de sa restriction à l'intervalle $[2;3]$, on pourra écrire :

$$f : \begin{array}{rcl} [2;3] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x-1} \end{array}$$

Enfin, l'ensemble d'arrivée, ici $\mathbb{R}$, pourrait être affiné avec une étude de la fonction, mais dans un premier temps, indiquer $\mathbb{R}$ en arrivée est suffisant.

3) Composition de fonctions

Définition :

si f et g sont deux fonctions telles que, pour certains nombres x, le calcul de $f(g(x))$ a un sens, on dit qu'on a composé g par f et on peut noter $f \circ g$ la fonction obtenue.

Exemple :

$x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est la composition de $g : x \mapsto$ par $f : x \mapsto$.

Méthode : DÉTERMINATION DE L'ENSEMBLE DE DÉFINITION D'UNE COMPOSITION

Soit une fonction de la forme $x \mapsto f(g(x))$, avec f définie sur un ensemble E et g définie sur un ensemble G, alors :

$x \mapsto f(g(x))$ est définie si et seulement si $g(x)$ est définie **et** f définie en $g(x)$.

On commencera donc toujours par regarder la fonction qui est "à l'intérieur" (ici, g), avant de chercher à quelle(s) condition(s) sur x les images de x par cette fonction sont dans le domaine de définition de la fonction qui "englobe" tout ça (la fonction f).

Exemple :

C'est exactement ce qu'on a fait pour la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$
On commence par la fonction à l'intérieur :
$g : x \mapsto x - 1$ est définie sur $\mathbb{R}$, celle ci ne pose donc pas de problème.
La fonction "qui englobe" est $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
Celle ci est définie sur $\mathbb{R}^*$. On regarde donc quand $g(x)$ est dans $\mathbb{R}^*$.

On résout alors l'inéquation $g(x) \neq 0$, c'est à dire $x - 1 \neq 0$, ou encore $x \neq 1$.

Au final l'ensemble de définition est donc $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

II Rappel sur les fonctions "élémentaires"

1) Puissances entières : $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$

Définition :

Définies sur $\mathbb{R}$ si $n \geq 0$, ou $\mathbb{R}^*$ si $n \leq 0$.

(i) pour $n = 0$: $x^0 = 1$

(ii) si $n > 0$,

$$x^n = x \times x^{n-1} = \underbrace{x \times \ldots \times x}_{n \text{ facteurs}}$$

(iii) si $n < 0$ et $x \neq 0$,

$$x^n = \left(\frac{1}{x}\right)^{-n} = \underbrace{\frac{1}{x} \times \ldots \times \frac{1}{x}}_{-n \text{ facteurs}}$$

Limites :

si $n > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.

si $n < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = 0$.

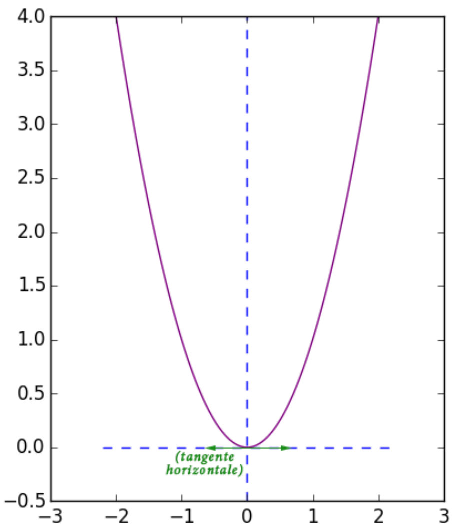
Dérivation et primitive :

Dérivable sur $\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ et sur $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$.
Dérivée : $x \mapsto nx^{n-1}$. (même si $n < 0$...)

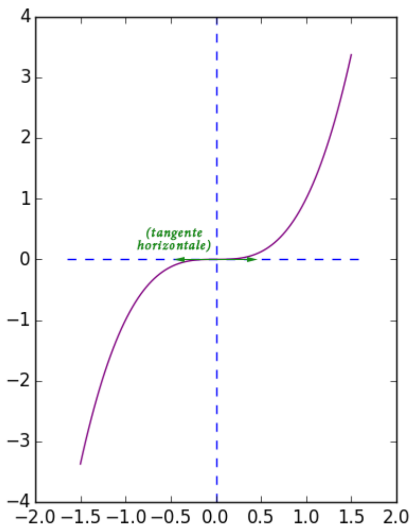
Une primitive :

si $n \neq -1$, $x \mapsto \dfrac{1}{n+1} x^{n+1}$.

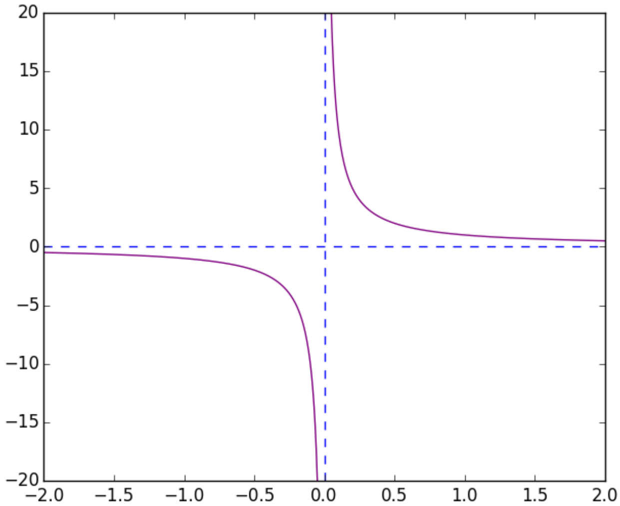
si $n = -1$, $x \mapsto \ln(|x|)$.



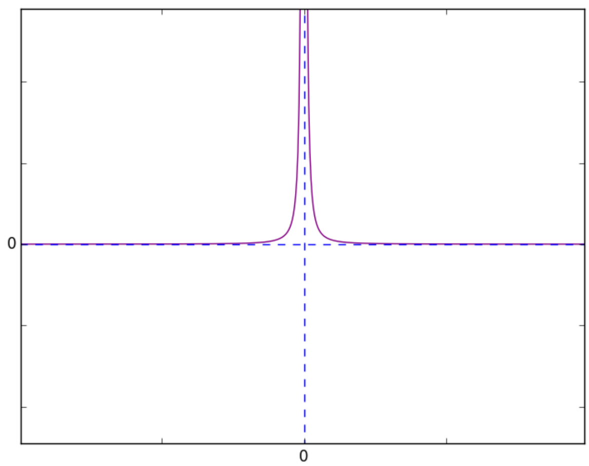
$n > 0$ et pair



$n > 0$ et impair



$n < 0$ et impair



$n < 0$ et pair

2) Racine carré

Définition

Fonction réciproque de $x \mapsto x^2$.
Définie sur $\mathbb{R}_+$.

Propriété de réciprocité :

1. Pour tout $x \geq 0$, $(\sqrt{x})^2 = x$
2. ⚠pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Propriétés de calculs :

Pour tout x et y positifs ou nuls :

1. $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$
2. (si $y \neq 0$) $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

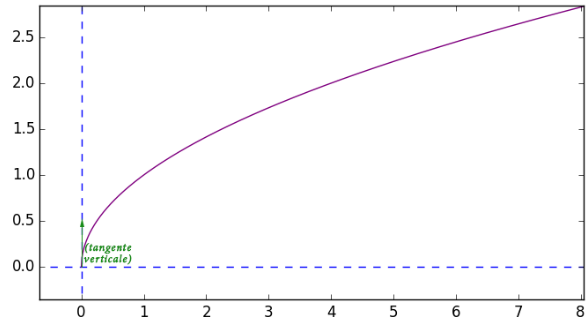
⚠ : L'hypothèse x et y positif est essentielle car $\sqrt{xy}$ peut être défini mais pas $\sqrt{x}$ ni $\sqrt{y}$!
⚠ : $\sqrt{x+y}$ n'est pas en général égal à $\sqrt{x} + \sqrt{y}$...

Dérivation et primitive :

Dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Dérivée : $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Primitive :$x \mapsto \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$



Particularité :

Bien que $x \mapsto \sqrt{x}$ ne soit pas dérivable en 0, elle y est tout de même définie (avec $\sqrt{0} = 0$) et on a une tangente (verticale)

3) Valeur absolue : $x \mapsto |x|$

Définition :

Définie sur $\mathbb{R}$ par :

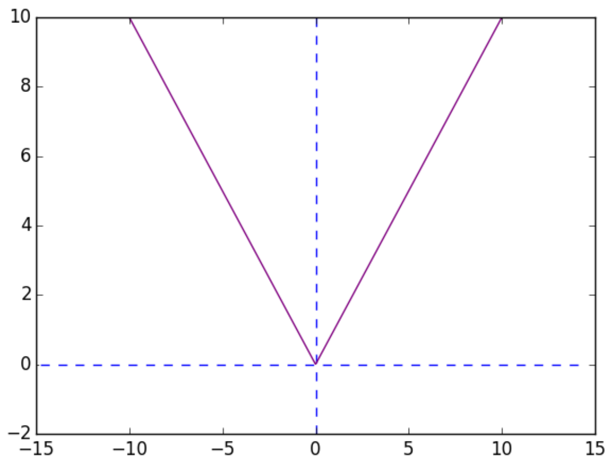
$$|\ | : \begin{array}{rl} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Dérivation et primitive

Non dérivable en 0.
Pour l'intégration comme pour la dérivation de fonctions contenant des valeurs absolues, on restreint l'ensemble d'étude afin de remplacer la valeur absolue.

Propriétés :

Pour tout x et y réels
(i) $|x| \geq 0$
(iii) $|xy| = |x||y|$
(iv) $|x + y| \leq |x| + |y|$



III Fonctions "avancées"

1) Exponentielle : $x \mapsto \exp(x)$ (ou $x \mapsto e^x$)

Ensemble de définition et propriété :

Définie sur $\mathbb{R}$.
Elle vérifie :
(i) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$
(ii) $e^0 = 1$

Limites :

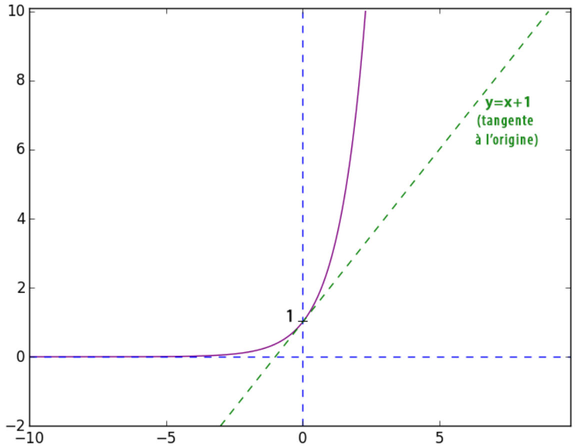
(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Dérivation et primitive :

Dérivable sur $\mathbb{R}$.
Dérivée : exp.
Une primitive : exp.

Propriétés de calcul :

Pour tout x et y réels :
(i) $e^x e^y = e^{x+y}$
(ii) $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$, $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$



2) Logarithme népérien : $x \mapsto \ln(x)$

Définition et propriétés

Définie sur $\mathbb{R}_+^*$ comme étant l'unique primitive à $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1 ou comme bijection réciproque de exp.
Valeurs clés :
(i) $\ln(1) = 0$
(ii) $\ln(e) = 1$

Limites :

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$
(ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Dérivation et primitive :

Dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
Une primitive : $x \mapsto x \ln x - x$.

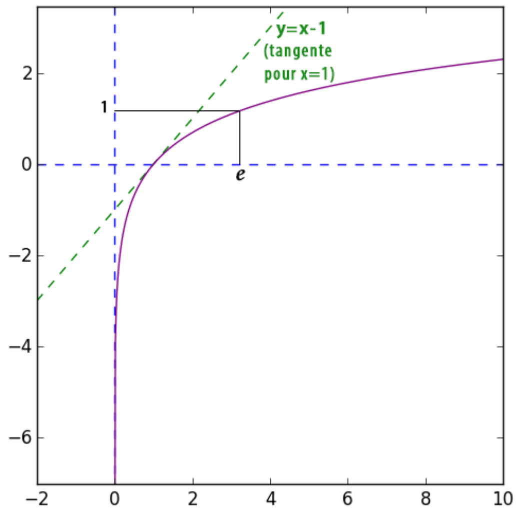
Réciprocité :

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$
(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\ln x} = x$

Propriétés de calcul :

Soient $x > 0$ et $y > 0$
(i) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
(ii) $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.
(iii) $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
(iv) pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
$\ln(x^n) = n \ln(x)$
(v) $\ln(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2} \ln(x)$

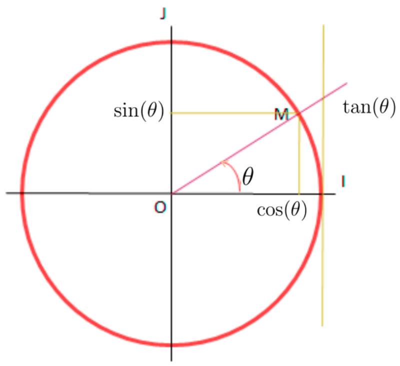
⚠ : toujours vérifier le signe de x et de y dans les propriétés ci dessus...



IV Fonctions trigonométriques : cos, sin et tan

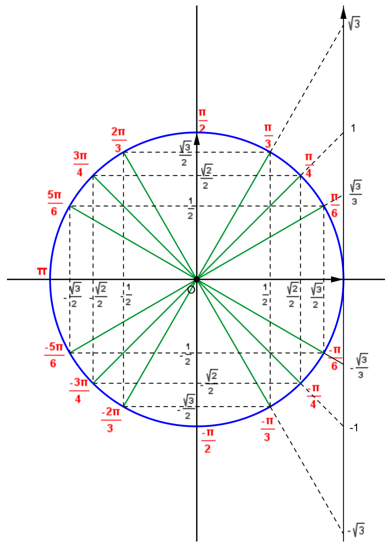
1) Définitions :

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on appelle cercle trigonométrique le cercle de rayon 1 et de centre l'origine du repère.
Soit M un point sur le cercle et θ l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.
On appelle $\cos(\theta)$ l'abscisse de M, $\sin(\theta)$ l'ordonnée.
Pour tout θ tel que $\cos(\theta) \neq 0$, on pose $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.
On peut montrer, avec le théorème de Thalès, que $\tan(\theta)$ se lit alors sur la tangente au cercle au point de coordonnées $(1; 0)$.



a) Valeurs à connaître :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



b) Formules :

Propriétés de calcul :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$,
   $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
   $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
3. $\forall a, b \in \mathbb{R}$,
   $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
   $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Symétrie et parité :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

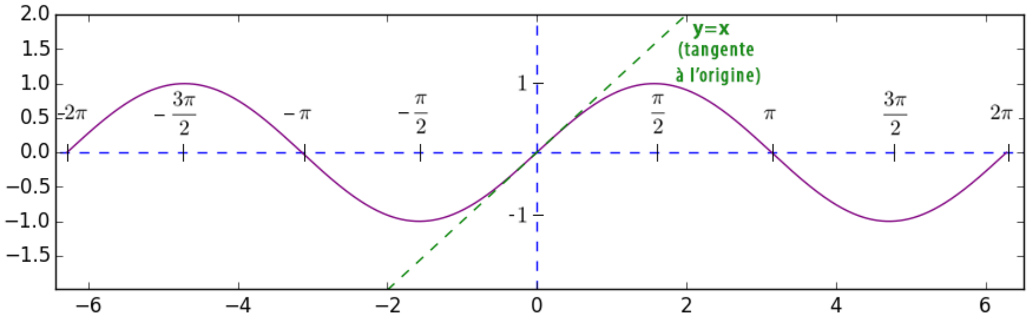
1. $\cos(-x) = \cos x$
2. $\sin(-x) = -\sin x$
3. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
4. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

Dérivabilité et primitives :

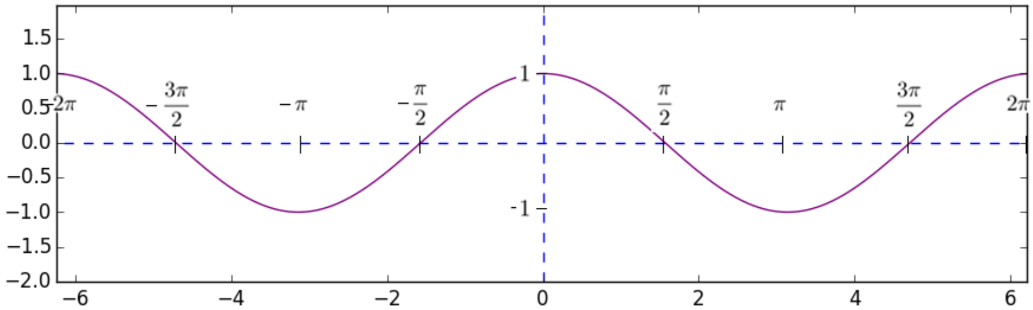
Dérivables sur leurs domaines de définition.
Dérivées :
$(\cos(x))' = -\sin(x)$,
$(\sin(x))' = \cos(x)$,
$(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

Primitives :
une primitive de cos : $x \mapsto \sin(x)$.
une primitive de sin : $x \mapsto -\cos(x)$
une primitive de tan : $x \mapsto -\ln(|\cos(x)|)$

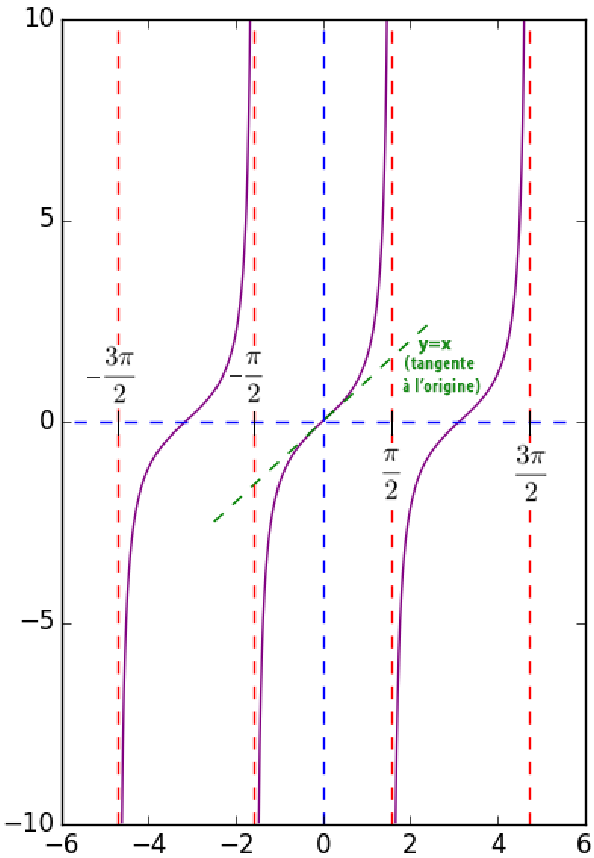
c) Représentations graphiques :



$x \mapsto \sin x$ (définie sur $\mathbb{R}$)



$x \mapsto \cos x$ (définie sur $\mathbb{R}$)



$x \mapsto \tan x$ (définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$)