Devoir Surveillé n°1

La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 2h.

Conseils :

1. Lire tout le sujet avant de commencer afin de choisir l'ordre dans lequel vous comptez traiter les exercices. Ils ne sont pas classé par ordre de difficulté, mais par thème.
2. Le but d'un DS est de faire le plus de choses justes, et pas le plus de choses "tout court" : ne chercher pas à tout faire (le sujet est de toute façon trop long), mais soyez rigoureux et attentifs dans ce qui est fait.
3. La rigueur de la rédaction et des justifications est essentielle. L'absence de justification supprime tous les points de la question, même si la réponse finale est juste. En particulier, n'oubliez pas de préciser les liens entre vos calculs ("donc", "si et seulement si", etc....)
4. Une présentation agréable est attendue : laisser une marge à gauche, aérer votre texte et **encadrez vos résultats.**

Exercice 1 (Des récurrences)

1. Soit la suite (u_n) définie par

$$\left\{\begin{array}{rl} u_0 & = 1 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} & = \dfrac{3u_n - 2}{u_n} \end{array}\right.$$

   Calculez les premiers termes de la suite (u_n) afin de donner une conjecture sur la valeur de u_n, puis démontrez cette formule par récurrence.

2. On appelle suite de Fibonacci la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{rl} u_0 & = 1 \\ u_1 & = 1 \\ \forall n \geq 0, u_{n+2} & = u_{n+1} + u_n \end{array}\right.$$

   (a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

   (b) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n$

Exercice 2 (Ensembles de définition)

Déterminez les ensembles de définition des fonctions suivantes. On justifiera soigneusement la réponse.

1. $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 3x + 2}$
3. $f_3 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{2 + x}{3 - x}\right)$
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4}}$

Exercice 3 (Injectivité, surjectivité, bijectivité) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$$

1. Montrez que f est injective.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Justifiez que f est bijective de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et déterminer f^{-1}

Exercice 4 (Injectivité, surjectivité, bijectivité)

Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n+1 \text{ et } g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

1. Justifiez que $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$. Pourquoi cela ne suffit-il pas à dire que f est bijective et que $f^{-1} = g$?
2. Montrez que f est injective mais pas surjective
3. Montrez que g est surjective mais n'est pas injective.

Exercice 5 (Equation avec paramètre) Soit un nombre $m \neq 0$. Le but de l'exercice est de déterminer en fonction du paramètre m les solutions de l'inéquation (I) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$(m+1)x^2 - \frac{x}{m} + 1 \geq m \qquad (I)$$

Pour cela, on se propose d'étudier l'équation (E) :

$$(m+1)x^2 - \frac{x}{m} - (m-1) = 0 \qquad (E)$$

1. CAS PARTICULIER : Résoudre (E) dans le cas où $m = -1$.
2. RÉSOLUTION DE (E) : On suppose à partir de maintenant que $m \neq -1$.
   (a) Calculer le discriminant de (E) en fonction de m et le factoriser complètement *(Indication : pour factoriser le numérateur, on pourra reconnaitre une identité remarquable après avoir factorisé par 4).*
   (b) Déterminer en fonction de m l'ensemble des solutions de l'équation (E). On simplifiera les résultats le plus possible.
3. RÉSOLUTION DE (I) :
   (a) Soient $x_1 = \dfrac{1-m}{m}$ et $x_2 = \dfrac{m}{m+1}$.
   Déterminer en fonction du réel m (avec $m \neq 0$ et $m \neq -1$) le signe de :
   $$x_1 - x_1$$
   (on n'hésitera pas à faire un tableau de signe...)
   (b) En déduire en fonction de m l'ensemble des solutions de (I).