DEVOIR MAISON 2 - Séries

À rendre le lundi 2 octobre

Exercice 1 Série exponentielle

Le but de cet exercice est de prouver par une autre méthode que celle vue en cours les résultats sur la série exponentielle (convergence et valeur de sa somme). Pour sa résolution, il est donc interdit d'utiliser la Proposition 7 du cours sur les séries exponentielles.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge.
   On note dans la suite :
$$\text{pour tout } z \in \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$
2. Montrer qu'on a :
$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ f(z+z') = f(z)f(z').$$
3. (a) Montrer les inégalités suivantes :
$$\forall x \in]0,1[, \quad 1 \leqslant \frac{f(x)-1}{x} \leqslant \frac{1}{1-x} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]-1,0[, \quad 1 + \frac{x}{2} \leqslant \frac{f(x)-1}{x} \leqslant 1$$
   (pour x négatif, on pourra penser à utiliser le théorème spécial des séries alternées)

   (b) En déduire que f est dérivable en 0 et vérifie $f'(0) = 1$.
4. (a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, on a :
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f(x_0)\frac{f(h)-1}{h}.$$
   (b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f' = f$.

   (c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.
5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(ix).$$
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\frac{g(x)-g(0)}{x} - i = i\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{(n+1)!}$.

   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
$$\left|\frac{g(x)-g(0)}{x} - i\right| \leqslant e^{|x|} - 1.$$
   (c) En déduire que g est dérivable en 0 et vérifie $g'(0) = i$.
6. (a) En utilisant une méthode similaire à celle utilisée dans la question 4, en déduire que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $g' = ig$.

   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(ix) = e^{ix}$.
7. Déduire de ce qui précède que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$.

Exercice 2

A. Questions préliminaires

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.

   (a) Montrer l'équivalence :

   $$\left[u_n \sim v_n\right] \Leftrightarrow \left[\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n \geqslant n_0, \text{ on a } (1-\varepsilon)v_n \leqslant u_n \leqslant (1+\varepsilon)v_n\right].$$

   (b) On suppose qu'on a $u_n \sim v_n$ et que la série $\sum v_n$ converge.
   Montrer qu'on a $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.

2. Soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$, continue, positive et décroissante.
   On souhaite prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ est convergente.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

   $$0 \leqslant f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(n) - f(n+1).$$

   (b) En déduire le résultat souhaité.

B. Développement asymptotique de la suite des sommes partielles de la série harmonique

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. En utilisant la question A.2 avec une fonction f bien choisie, montrer qu'il existe un réel γ tel que :

   $$H_n = \ln n + \gamma + o(1)$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = H_n - \ln n - \gamma$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant n}(u_k - u_{k+1})$ converge et déterminer sa somme.

   (b) i. Montrer que $u_n - u_{n+1} \sim \dfrac{1}{2n^2}$.

   ii. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ de deux manières différentes :

   - en utilisant une comparaison série/intégrale,
   - en remarquant que $\dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ et en utilisant la question A.1.(b).

   iii. En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}(u_k - u_{k+1})$.

   (c) En déduire que :

   $$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. À l'aide d'une méthode similaire à celle de la question 2, déterminer le terme suivant dans le développement asymptotique de H_n.