# DEVOIR MAISON 1

*Corrigé*

1. Par définition, une fonction $f$ est concave sur $I$ lorsque $-f$ est convexe sur $I$ c'est-à-dire lorsque :

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0;1], \quad (-f)(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda(-f)(x) + (1-\lambda)(-f)(y).$$

En multipliant cette inégalité par $-1$, on obtient comme $\boxed{\text{caractérisation d'une fonction concave sur } I \text{ :}}$

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0;1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).}$$

2. Utilisons la définition de la convexité pour prouver que la fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Soit $\lambda \in [0;1]$.
On a par inégalité triangulaire :

$$|\lambda x + (1-\lambda)y| \leqslant |\lambda x| + |(1-\lambda)y| = \lambda|x| + (1-\lambda)|y|$$

car $\lambda \geqslant 0$ et $1-\lambda \geqslant 0$.
On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\text{la fonction valeur absolue est convexe sur } \mathbb{R}.}$$

3. Utilisons la définition de la convexité pour prouver que la fonction carrée est convexe sur $\mathbb{R}$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Soit $\lambda \in [0;1]$.
Pour démontrer l'inégalité souhaitée, déterminons le signe de la différence des deux membres.
On a :

$$\begin{aligned}
\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 - \big(\lambda x + (1-\lambda)y\big)^2 \\
&= \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 - \big(\lambda^2 x^2 + (1-\lambda)^2 y^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy\big) \\
&= \lambda(1-\lambda)x^2 + (1-\lambda)(1-(1-\lambda))y^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy \\
&= \lambda(1-\lambda)(x^2 + y^2 - 2xy) \\
&= \lambda(1-\lambda)(x-y)^2
\end{aligned}$$

qui est positif en tant que produit de trois réels positifs.
On en déduit l'inégalité souhaitée :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } f : x \mapsto x^2 \text{ est convexe sur } \mathbb{R}.}$$

4.(a) Comme pour tout $t \in [0;1]$, on a $tx + (1-t)y > 0$ (en tant que somme de deux termes positifs dont l'un au moins est strictement positif), on sait par les théorèmes généraux que la fonction $g$ est bien définie et deux fois dérivable sur $[0;1]$ et on a :

$$\forall t \in [0;1], \quad g'(t) = \frac{x-y}{tx+(1-t)y} - \ln(x) + \ln(y) \quad \text{puis} \quad g''(t) = -\frac{(x-y)^2}{(tx+(1-t)y)^2} < 0 \text{ (car } x \neq y)$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } g' \text{ est strictement décroissante sur } [0;1].}$$

4.(b) La fonction $h = \ln$ est dérivable sur $[x, y]$ (donc continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$) donc par l'égalité des accroissements finis, il existe $z \in ]x, y[$ tel que

$$\frac{h(y) - h(x)}{y - x} = h'(z) \text{ c'est-à-dire } \frac{\ln(y) - \ln(x)}{y - x} = \frac{1}{z}.$$

Comme $0 < x \leqslant z \leqslant y$, on a $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{z} \geqslant \dfrac{1}{y}$.
Ainsi :

$$\boxed{\frac{1}{y} \leqslant \frac{\ln(y) - \ln(x)}{y - x} \leqslant \frac{1}{x}.}$$

4.(c) D'après les calculs effectués en 4.(a), on a :

$$g'(0) = \frac{x - y}{y} - \ln(x) + \ln(y) \text{ et } g'(1) = \frac{x - y}{x} - \ln(x) + \ln(y).$$

D'après la question précédente, comme $y - x > 0$, on a $\dfrac{y - x}{y} \leqslant \ln(y) - \ln(x) \leqslant \dfrac{y - x}{x}$.
On en déduit que :

$$\boxed{g'(0) \geqslant 0 \text{ et } g'(1) \leqslant 0.}$$

4.(d) La fonction $g'$ est continue sur $[0; 1]$, $g'(0) \geqslant 0$ et $g'(1) \leqslant 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [0; 1]$ tel que $g'(t_0) = 0$.
De plus, la fonction $g'$ est strictement monotone sur $[0; 1]$ ce qui garantit l'unicité de $t_0$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } g' \text{ s'annule une et une seule fois sur } [0; 1].}$$

4.(e) Comme la fonction $g'$ est décroissante sur $[0; 1]$ et $g'(t_0) = 0$, on a :

$$\forall t \in [0, t_0],\ g'(t) \geqslant 0 \text{ et } \forall t \in [t_0, 1],\ g'(t) \leqslant 0.$$

On en déduit que la fonction $g$ est croissante sur $[0, t_0]$ et décroissante sur $[t_0, 1]$.
De plus, $g(0) = 0$ et $g(1) = 0$ donc :

$$\boxed{g \text{ est positive sur } [0; 1].}$$

On a donc pour tout $t \in [0; 1]$, $g(t) \geqslant 0$ d'où $\ln(tx + (1 - t)y) \geqslant t\ln(x) + (1 - t)\ln(y)$.
Pour prouver la concavité de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on doit montrer que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall \lambda \in [0; 1],\ \ln(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geqslant \lambda \ln(x) + (1 - \lambda)\ln(y).$$

Par ce qui précède, on a établi cette inégalité dans le cas où $x < y$.
L'inégalité est évidente dans le cas où $x = y$ (les deux membres sont égaux à $\ln(x)$).
Dans le cas où $y < x$, on a par ce qui précède en adaptant les notations :

$$\forall t \in [0; 1],\ \ln(ty + (1 - t)x) \geqslant t\ln(y) + (1 - t)\ln(x).$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in [0; 1]$, en appliquant ceci avec $t = 1 - \lambda \in [0; 1]$, on obtient :

$$\ln((1 - \lambda)y + \lambda x) \geqslant (1 - \lambda)\ln(y) + \lambda \ln(x),$$

ce qui est l'inégalité recherchée.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction ln est concave sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

5.(a) $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose qu'il existe $\lambda \in [0; 1]$ tel que $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$.
Comme $y \geqslant x$ et $1 - \lambda \geqslant 0$, on a $(1 - \lambda)y \geqslant (1 - \lambda)x$ donc en ajoutant $\lambda x$, on obtient $z \geqslant \lambda x + (1 - \lambda)x = x$.

Comme $y \geqslant x$ et $\lambda \geqslant 0$, on a $\lambda y \geqslant \lambda x$ donc en ajoutant $(1-\lambda)y$, on obtient $y = \lambda y + (1-\lambda)y \geqslant z$.
Ainsi, on a bien $z \in [x, y]$.
*N.B. :* On peut aussi prouver ce résultat en utilisant le résultat rappelé au tout début du sujet avec l'intervalle $[x, y]$.
On a $x \in [x, y]$, $y \in [x, y]$ et $\lambda \in [0; 1]$ donc $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in [x, y]$.

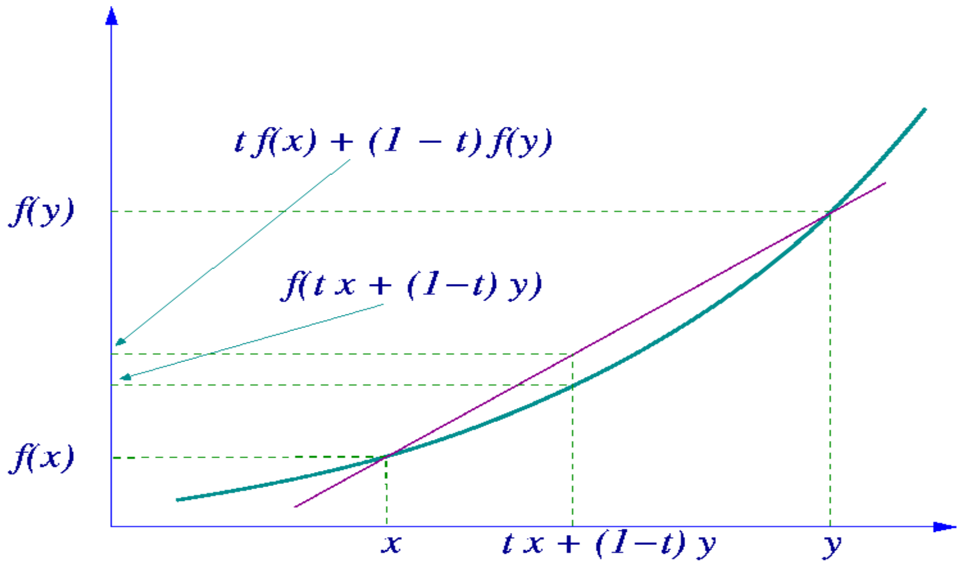
$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $z \in [x, y]$. On souhaite prouver qu'il existe $\lambda \in [0; 1]$ tel que $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.
Raisonnons par analyse-synthèse pour trouver comment définir $\lambda$.
*Analyse :* Si un tel $\lambda$ existe, on a $z = \lambda(x-y) + y$ donc $\lambda = \dfrac{z-y}{x-y}$ (on a bien $x - y \neq 0$).
*Synthèse :* On pose $\lambda = \dfrac{z-y}{x-y}$.
On a alors $(x-y)\lambda = z - y$ donc on a bien $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. Il reste à prouver que $\lambda \in [0; 1]$.
On a $x - y < 0$ et $z - y \leqslant 0$ puisque $z \in [x, y]$ donc $\lambda \geqslant 0$.
Et $1 - \lambda = \dfrac{x-y-z+y}{x-y} = \dfrac{x-z}{x-y}$ avec $x - y < 0$ et $x - z \leqslant 0$ puisque $z \in [x, y]$ donc $1 - \lambda \geqslant 0$ d'où $\lambda \leqslant 1$.
On a donc bien $\lambda \in [0; 1]$.
On a ainsi établi l'équivalence :

$$\boxed{z \in [x, y] \text{ si et seulement s'il existe } \lambda \in [0; 1] \text{ tel que } z = \lambda x + (1-\lambda)y.}$$

5.(b) Illustration de l'inégalité de convexité :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0; 1], \quad f(tx + (1-t)y) \leqslant t f(x) + (1-t) f(y).$$

La courbe représentative de $f$ est en-dessous de ses cordes.




6.(a) Utilisons la définition de la convexité. Soit $(x, y) \in I^2$. Soit $\lambda \in [0; 1]$.
Comme $f$ est convexe sur $I$, on a :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Comme $g$ est convexe sur $I$, on a :

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y).$$

En additionnant ces deux inégalités, on obtient :

$$(f+g)(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda (f+g)(x) + (1-\lambda)(f+g)(y).$$

On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\text{la fonction } f+g \text{ est convexe sur } I.}$$

6.(b) Utilisons la définition de la convexité. Soit $(x,y)\in I^2$. Soit $\lambda\in[0;1]$.
Comme $f$ est convexe sur $I$, on a :

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

Comme $g$ est croissante sur $J$, en notant que $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\in J$ et $\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\in J$ (d'après le résultat rappelé en préambule du sujet puisque $J$ est un intervalle, $f(x)\in J$, $f(y)\in J$ et $\lambda\in[0;1]$), on obtient en appliquant $g$ :

$$g\circ f(\lambda x+(1-\lambda)y)=g\big(f(\lambda x+(1-\lambda)y)\big)\leqslant g\big(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\big).$$

Comme $g$ est convexe sur $J$, en notant que $f(x)\in J$, $f(y)\in J$ et $\lambda\in[0;1]$, on a :

$$g\big(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\big)\leqslant \lambda g(f(x))+(1-\lambda)g(f(y))=\lambda g\circ f(x)+(1-\lambda)g\circ f(y).$$

On déduit de ces deux inégalités que :

$$g\circ f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant \lambda g\circ f(x)+(1-\lambda)g\circ f(y).$$

On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\text{la fonction } g\circ f \text{ est convexe sur } I.}$$

6.(c) En reprenant la question 6.(b) en changeant les symboles $\leqslant$ par des symboles $\geqslant$, on prouve que :

| |
|---|
| si $f$ est une fonction concave sur $I$ à valeurs dans $J$ et $g$ une fonction concave et croissante sur $J$ alors $g\circ f$ est concave sur $I$. |

7. <u>*Initialisation*</u> *:* <u>*cas* $n=1$</u>
On considère $x_1\in I$ et nécessairement $\lambda_1=1$.
On a alors bien $\lambda_1 x_1=x_1\in I$ et $f(\lambda_1 x_1)\leqslant \lambda_1 f(x_1)$ puisque les deux membres sont égaux à $f(x_1)$.
<u>*Hérédité*</u> *:* Soit $n\in\mathbb{N}^*$ pour lequel la propriété est vraie. Montrons-la au rang $n+1$.
Soit $(x_1,\dots,x_{n+1})\in I^{n+1}$. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1})\in(\mathbb{R}_+)^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k=1$.

Remarquons que si $\lambda_{n+1}=1$ alors pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on a $\lambda_k=0$ (car ce sont des réels positifs de somme nulle) et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k=x_{n+1}\in I$ et $f\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k\right)\leqslant\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k f(x_k)$ puisque les deux membres sont égaux à $f(x_{n+1})$.

On suppose désormais qu'on a $\lambda_{n+1}\neq 1$.
On peut écrire :

$$\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k=(1-\lambda_{n+1})\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}x_k+\lambda_{n+1}x_{n+1}.$$

Posons pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\mu_k=\dfrac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}$.
Notons que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\mu_k\geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mu_k=\frac{1}{1-\lambda_{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1$ puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1-\lambda_{n+1}$.
Par hypothèse de récurrence, comme de plus pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $x_k\in I$, on en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n}\mu_k x_k\in I.$$

Comme de plus $x_{n+1} \in I$ et $\lambda_{n+1} \in [0;1]$, on en déduit par le résultat rappelé en préambule que

$$(1-\lambda_{n+1})\sum_{k=1}^{n}\mu_k x_k + \lambda_{n+1}x_{n+1} \in I \text{ c'est-à-dire } \sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k \in I.$$

Comme $f$ est convexe, on a également :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k\right) = f\left((1-\lambda_{n+1})\sum_{k=1}^{n}\mu_k x_k + \lambda_{n+1}x_{n+1}\right) \leqslant (1-\lambda_{n+1})f\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k x_k\right) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}).$$

Or, par hypothèse de récurrence (hypothèses vérifiées ci-dessus), on a également :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\mu_k f(x_k).$$

Comme $1-\lambda_{n+1} \geqslant 0$, on en déduit que :

$$(1-\lambda_{n+1})f\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k x_k\right) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \leqslant (1-\lambda_{n+1})\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}f(x_k) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k f(x_k).$$

On en déduit l'inégalité souhaitée :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k f(x_k).$$

On a ainsi prouvé par récurrence que :

$$\boxed{\text{pour tous } n \in \mathbb{N}^*,\ (x_1,x_2,\dots,x_n) \in I^n \text{ et } (\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \text{ tels que } \sum_{k=1}^{n}\lambda_k = 1, \text{ on a } \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k \in I \text{ et } f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k).}$$

8.(a) Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$.
En appliquant le résultat de la question 7 (adapté au cas de la concavité en passant éventuellement par $-f$) avec la fonction ln concave sur $\mathbb{R}_+^*$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dfrac{1}{3}$, on obtient :

$$\frac{1}{3}\ln a + \frac{1}{3}\ln b + \frac{1}{3}\ln c \leqslant \ln\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c\right) \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{3}\ln(abc) \leqslant \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right).$$

Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$\boxed{e^{\frac{1}{3}\ln(abc)} = \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}.}$$

8.(b) Utilisons le résultat de la question 6.(c) avec $f = \ln$, fonction concave sur $]1,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $g = \ln$, fonction concave et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
On obtient ainsi que la fonction :

$$\boxed{\ln\circ\ln \text{ est concave sur } ]1,+\infty[.}$$

Soit $(x,y) \in (]1,+\infty[)^2$.
En appliquant le résultat de la question 7 (adapté au cas de la concavité) avec la fonction $\ln\circ\ln$ concave sur $]1,+\infty[$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{1}{2}$, on obtient :

$$\ln\circ\ln\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \geqslant \frac{1}{2}\ln\circ\ln(x) + \frac{1}{2}\ln\circ\ln(y) \quad \text{ou encore} \quad \ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \geqslant \frac{1}{2}\ln(\ln(x)\ln(y)).$$

Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$\boxed{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant e^{\frac{1}{2}\ln(\ln(x)\ln(y))} = \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.}$$

9.(a) On a $(t,a) \in I^2$ et $\lambda \in [0;1]$ donc par convexité de $f$ sur $I$, on a :

$$f(u) = f(\lambda t + (1-\lambda)a) \leqslant \lambda f(t) + (1-\lambda)f(a) = \lambda\big(f(t) - f(a)\big) + f(a).$$

On en déduit que :

$$\boxed{f(u) - f(a) \leqslant \lambda\big(f(t) - f(a)\big).}$$

De plus, on a $u = \lambda(t-a) + a$ donc $\lambda = \dfrac{u-a}{t-a}$ (on a bien $t - a \neq 0$).
On en déduit que :

$$f(u) - f(a) \leqslant \frac{u-a}{t-a}\big(f(t) - f(a)\big) \text{ d'où } \frac{f(u)-f(a)}{u-a} \geqslant \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$$

par produit par $\dfrac{1}{u-a} \leqslant 0$.
On a ainsi obtenu :

$$\boxed{\Delta_a(t) \leqslant \Delta_a(u).}$$

9.(b) Tous les cas possibles ayant été étudiés, on a donc établi que :

$$\forall (t,u) \in (I \setminus \{a\})^2 \text{ tel que } t \leqslant u,\ \Delta_a(t) \leqslant \Delta_a(u).$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\text{la fonction } \Delta_a \text{ est croissante sur } I \setminus \{a\}.}$$

10.(a) Comme la fonction $\Delta_a$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$ et $(b,c) \in (I \setminus \{a\})^2$ avec $b \leqslant c$, on a :

$$\Delta_a(b) \leqslant \Delta_a(c) \text{ c'est-à-dire } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

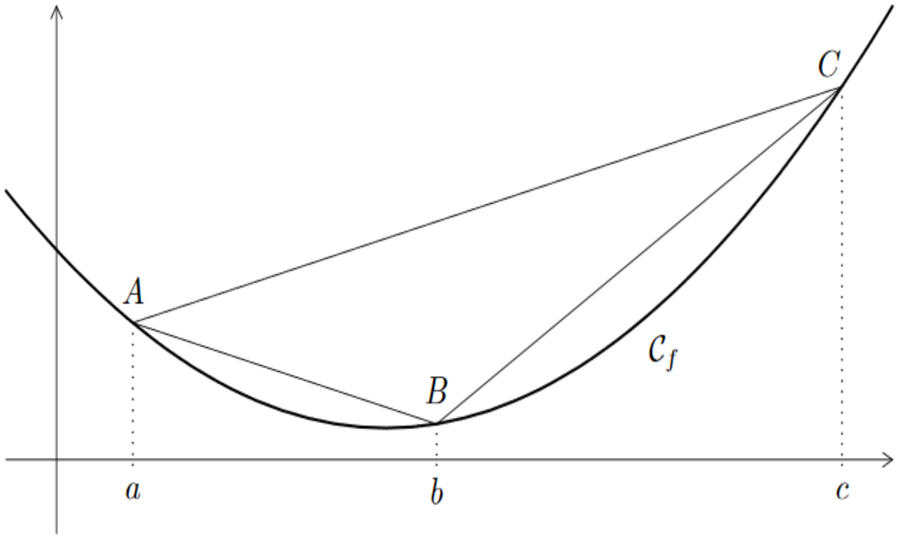
Comme la fonction $\Delta_c$ est croissante sur $I \setminus \{c\}$ et $(a,b) \in (I \setminus \{c\})^2$ avec $a \leqslant b$, on a :

$$\Delta_c(a) \leqslant \Delta_c(b) \text{ c'est-à-dire } \frac{f(a)-f(c)}{a-c} \leqslant \frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

Comme $\dfrac{f(a)-f(c)}{a-c} = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$ et $\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c} = \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$, on en déduit $\boxed{\text{l'inégalié des trois pentes}}$ :

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.}$$

10.(b) Illustration de l'inégalité des trois pentes :
La pente (ou le cœfficient directeur) de la droite $(A,B)$ est inférieure à celle de la droite $(A,C)$, qui est elle-même inférieure à celle de la droite $(B,C)$.




11.(a) Soit $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$.
Comme $f$ est convexe sur $I$, par l'inégalité des trois pentes, on a pour tout $x \in I$ tel que $x < a$ :

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leqslant \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

car $x < a < b$.
On a en particulier $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Comme $f$ est dérivable en $a$, on a $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.
Par passage à la limite $x \to a^-$ dans l'inégalité précédente, on en déduit que $f'(a) \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Procédons de même pour obtenir l'autre inégalité.
Par l'inégalité des trois pentes, on a pour tout $x \in I$ tel que $b < x$ :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

car $a < b < x$.
On a en particulier $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$.
Comme $f$ est dérivable en $b$, on a $\lim\limits_{x\to b^+} \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} = \lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} = f'(b)$.
Par passage à la limite $x \to b^+$ dans l'inégalité précédente, on en déduit que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b)$.
On a donc bien obtenu que :

$$\boxed{f'(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b).}$$

On a ainsi montré que pour tout $(a,b) \in I^2$ tel que $a \leqslant b$, on a $f'(a) \leqslant f'(b)$ (résultat évident lorsque $a = b$) ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{la fonction } f' \text{ est croissante sur } I.}$$

11.(b) Soit $a \in I$.
La tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse $a$ est la droite d'équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

D'après la question précédente, on a pour tout $x \in I$ tel que $a < x$ :

$$f'(a) \leqslant \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ donc } f(a) + f'(a)(x-a) \leqslant f(x) \text{ puisque } x-a > 0$$

et pour tout $x \in I$ tel que $x < a$ :

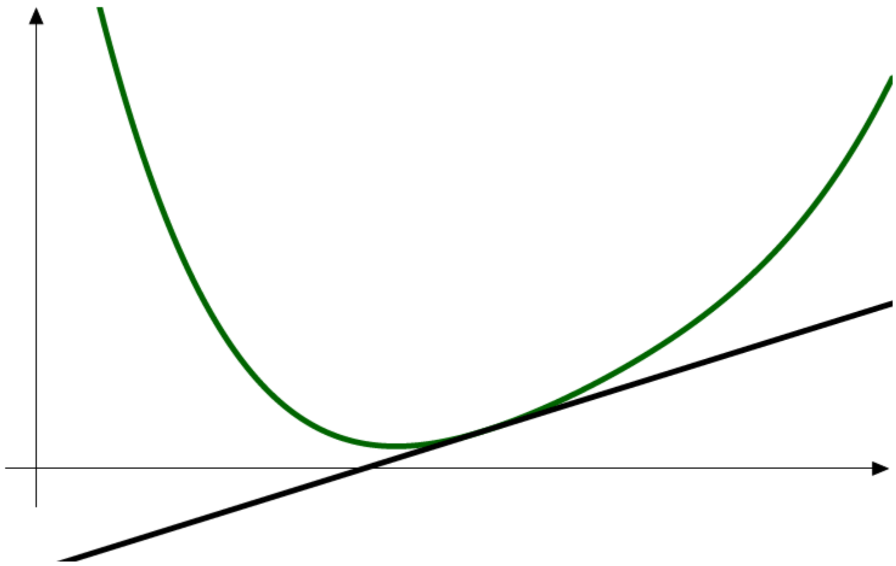
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant f'(a) \text{ donc } f(x) \geqslant f(a)+f'(a)(x-a) \text{ puisque } x-a<0.$$

On en déduit que pour tout $x \in I$ (résultat évident pour $x = a$) :

$$f(x) \geqslant f'(a)(x-a)+f(a)$$

ce qui prouve que la courbe représentative de $f$ est au-dessus de sa tangente en $a$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la courbe représentative de } f \text{ est au-dessus de toutes ses tangentes.}}$$



12.(a) La fonction $t \mapsto tx+(1-t)y$ est dérivable sur $[0;1]$ (en tant que fonction affine) et $f$ est dérivable sur $I$.
Comme $(x,y) \in I^2$, on a pour tout $t \in [0;1]$, $tx+(1-t)y \in I$.
On en déduit par composition que la fonction $t \mapsto f(tx+(1-t)y)$ est dérivable sur $[0;1]$.
Par somme avec la fonction $t \mapsto tf(x)+(1-t)f(y)$ dérivable sur $I$ (car affine), on en déduit que :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{la fonction } \phi \text{ est dérivable sur } [0;1] \text{ et on a pour tout } t \in [0;1] : \\ \phi'(t) = f(x)-f(y)-(x-y)f'(tx+(1-t)y).\end{array}}$$

12.(b) Comme $f$ est dérivable sur $I$, elle est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$ donc d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $z \in ]x,y[$ tel que

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(z).$$

Comme $z \in ]x,y[$, d'après la question 5.(a), il existe $\gamma \in ]0;1[$ tel que

$$z = \gamma x+(1-\gamma)y.$$

On en déduit que $f(x)-f(y) = (x-y)f'(\gamma x+(1-\gamma)y)$.
En remplaçant dans l'expression obtenue à la question précédente pour $\phi'(t)$, on en déduit que :

$$\boxed{\phi'(t) = (x-y)\big(f'(\gamma x+(1-\gamma)y) - f'(tx+(1-t)y)\big).}$$

12.(c) Soit $t \in [0;1]$ tel que $t \leqslant \gamma$.
Comme $x - y \leqslant 0$, on a $y + t(x-y) \geqslant y + \gamma(x-y)$ donc par croissance de $f'$ sur $I$, on obtient :

$$f'(y+t(x-y)) \geqslant f'(y+\gamma(x-y)) \text{ d'où } f'(\gamma x + (1-\gamma)y) - f'(tx+(1-t)y) \leqslant 0.$$

Comme $x - y \leqslant 0$, on en déduit par produit que $\phi'(t) \geqslant 0$.
Procédons de même avec $t \in [0;1]$ tel que $t \geqslant \gamma$.
Comme $x - y \leqslant 0$, on a $y + t(x-y) \leqslant y + \gamma(x-y)$ donc par croissance de $f'$ sur $I$, on obtient :

$$f'(y+t(x-y)) \leqslant f'(y+\gamma(x-y)) \text{ d'où } f'(\gamma x + (1-\gamma)y) - f'(tx+(1-t)y) \geqslant 0.$$

Comme $x - y \leqslant 0$, on en déduit par produit que $\phi'(t) \leqslant 0$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } \phi \text{ est croissante sur } [0,\gamma] \text{ et décroissante sur } [\gamma,1].}$$

12.(d) La fonction $\phi$ est croissante sur $[0,\gamma]$ et décroissante sur $[\gamma,1]$ et on a de plus $\phi(0) = \phi(1) = 0$.
On en déduit que la fonction $\phi$ est positive sur $[0;1]$ d'où pour tout $t \in [0;1]$, on a :

$$tf(x) + (1-t)f(y) \geqslant f(tx+(1-t)y).$$

Ce résultat a ainsi été prouvé pour $(x,y) \in I^2$ tel que $x < y$. Il est évident pour $x = y$ et pour $y < x$, on l'applique avec $\lambda = 1 - t$ pour obtenir l'inégalité souhaitée (on procède comme à la question 4.(e)).
On obtient ainsi que :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est convexe sur } I.}$$

13. Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur $I$.
Comme $f$ est dérivable sur $I$, d'après la question 12, on a l'équivalence :

$$f \text{ est convexe sur } I \text{ si et seulement si } f' \text{ est croissante sur } I.$$

Or, on sait que :

$$f' \text{ est croissante sur } I \text{ si et seulement si } (f')' = f'' \text{ est positive sur } I.$$

On en déduit l'équivalence souhaitée :

$$\boxed{f \text{ deux fois dérivable sur } I \text{ est convexe sur } I \text{ si et seulement si } f'' \text{ est positive sur } I.}$$

14. La fonction exponentielle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp''(x) = \exp(x) \geqslant 0$.
Par la question 13, on en déduit que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
Par la question 11.(b), on en déduit que la courbe représentative de la fonction exponentielle est au-dessus de toutes ses tangentes donc en particulier de la tangente au point d'abscisse 0.
Cette tangente a pour équation :

$$y = \exp'(0)(x-0) + \exp(0) = x + 1.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x+1.}$$

15.(a) Soir $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$.
Comme la fonction $f$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, en appliquant la définition de la concavité avec $\left(\dfrac{x_1}{y_1}, \dfrac{x_2}{y_2}\right) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $\lambda = \dfrac{y_1}{y_1+y_2} \in [0;1]$, on obtient :

$$\frac{y_1}{y_1+y_2} f\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + \frac{y_2}{y_1+y_2} f\left(\frac{x_2}{y_2}\right) \leqslant f\left(\frac{y_1}{y_1+y_2}\frac{x_1}{y_1} + \frac{y_2}{y_1+y_2}\frac{x_2}{y_2}\right)$$

puisque $1-\dfrac{y_1}{y_1+y_2}=\dfrac{y_2}{y_1+y_2}$.
En multipliant par $y_1+y_2\geqslant 0$, on obtient :

$$y_1 f\left(\frac{x_1}{y_1}\right)+y_2\left(\frac{x_2}{y_2}\right)\leqslant (y_1+y_2) f\left(\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\right)$$

ce qui correspond à l'inégalité souhaitée :

$$\boxed{\psi(x_1,y_1)+\psi(x_2,y_2)\leqslant \psi(x_1+x_2,y_1+y_2).}$$

15.(b) On pourrait utiliser directement le résultat de la question 7.
On propose plutôt ici une preuve par récurrence.
*Initialisation : cas $n=1$*
Soit $(x_1,y_1)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$.
On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\psi(x_k,y_k)=\psi(x_1,y_1)$ et $\psi\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k,\sum_{k=1}^{n}y_k\right)=\psi(x_1,y_1)$ donc l'inégalité est clairement vérifiée.
*Hérédité :* Soit $n\in\mathbb{N}^*$ pour lequel la propriété est vraie. Montrons-la au rang $n+1$.
On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}\psi(x_k,y_k) &= \sum_{k=1}^{n}\psi(x_k,y_k)+\psi(x_{n+1},y_{n+1})\\
&\leqslant \psi\left(\sum_{k=1}^{n}x_k,\sum_{k=1}^{n}y_k\right)+\psi(x_{n+1},y_{n+1}) \quad \text{par hypothèse de récurrence}\\
&\leqslant \psi\left(\sum_{k=1}^{n}x_k+x_{n+1},\sum_{k=1}^{n}y_k+y_{n+1}\right) \quad \text{par la question 15.(a)}\\
&= \psi\left(\sum_{k=1}^{n+1}x_k,\sum_{k=1}^{n+1}y_k\right).
\end{aligned}$$

On a donc prouvé par récurrence que :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^* \text{ et tout } (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^{2n}\text{, on a :}\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\psi(x_k,y_k)\leqslant\psi\left(\sum_{k=1}^{n}x_k,\sum_{k=1}^{n}y_k\right).\end{array}}$$

16.(a) La fonction $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ \ f'(t)=\frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1} \ \text{ et } \ f''(t)=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)t^{\frac{1}{p}-2}.$$

Comme $p\geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{p}-1\leqslant 0$ et donc $f''$ est négative sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par le résultat de la question 13 (adapté au cas de la concavité en passant éventuellement par $-f$), on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est concave sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

16.(b) En utilisant $(\star\star)$ avec la fonction $f$, on obtient pour tout $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^{2n}$ :

$$\sum_{k=1}^{n}y_k\left(\frac{x_k}{y_k}\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}y_k\right)\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{\sum_{k=1}^{n}y_k}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{k=1}^{n}y_k^{\frac{1}{q}}x_k^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}y_k\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^{\frac{1}{p}}$$

car $1-\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{q}$.
Soit $(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^{2n}$.
En appliquant cette inégalité avec $x_k=a_k^p$ et $y_k=b_k^q$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on en déduit l'inégalité de Hölder :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.}$$