DEVOIR SURVEILLÉ 1 - 20/09/23 - *Durée 4h*

Exercice

Les trois questions sont indépendantes.

1. Déterminer la nature des trois séries suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{n}{(\ln n)^2} \quad , \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(\ln n)^2}{n^2}.$$

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\exp\left(-\frac{1}{n}\right)-1\right)$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\exp\left(-\frac{1}{k}\right)-1\right)$.

3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!e^{n-k}}\right)$ converge et déterminer sa somme.

Problème 1

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note $(R_{1,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Si à nouveau la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et on note $(R_{2,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}.$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geqslant 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}.$$

On peut noter : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{0,n} = u_n$.
Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général u_n.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.
   (a) Rappeler la condition nécessaire et suffisante sous laquelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
   On se place désormais sous cette condition.
   (b) À l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer qu'on a :
   $$R_{1.n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$
   (c) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2 ?

2. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \dfrac{1}{n^n}$.

   (a) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^n}{(n+1)^n}$.

   (b) Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge.

   (c) Montrer que, pour tout $k \geqslant 3$, $u_k \leqslant \dfrac{1}{3^k}$, puis en déduire que pour tout $n \geqslant 2$:

$$0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2.3^n}.$$

   (d) En déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 2, et que pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{4.3^n}.$$

   (e) Montrer que pour tout $p \geqslant 2$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p.3^n}.$$

   (f) La série $\sum R_{n,n}$ converge-t-elle ?

3. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

   (a) Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge et qu'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|R_{1,n}| \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}.$$

   (b) En déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 2.

4. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

   (a) Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge et que la série $\sum R_{1,n}$ est alternée.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|R_{1,n}| - |R_{1,n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{1}{n+1+p} - \frac{1}{n+2+p} \right).$$

   (c) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{m+2} - \frac{2}{m+1} + \frac{1}{m} \geqslant 0.$$

   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\left(\dfrac{1}{n+1+p} - \dfrac{1}{n+2+p} \right)_{p \geqslant 0}$ est décroissante.

   (d) En déduire la monotonie de la suite $(|R_{1,n}|)_{n \geqslant 1}$ puis que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 2.

Problème 2

Le but de ce problème est de donner, dans la partie A., quatre expressions différentes du réel $\ln(2)$ sous la forme d'une somme de série puis d'étudier, dans la partie B., la vitesse de convergence de ces quatre séries.

Partie A.

1. (a) On rappelle ici la *formule de Taylor avec reste intégral* :

> Soit $r \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(a,b) \in I^2$.
> Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^{r+1}$ sur I, alors on a :
> $$f(b) = \sum_{k=0}^{r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^r}{r!} f^{(r+1)}(t)\, dt.$$

À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]-1,+\infty[$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\, dt.$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln 2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} + \int_{-1/2}^{0} \frac{(1+2t)^n}{2^n(1+t)^{n+1}}\, dt.$

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \int_{-1/2}^{0} \frac{(1+2t)^n}{2^n(1+t)^{n+1}}\, dt \leqslant 2 \int_{-1/2}^{0} (1+2t)^n\, dt.$

(d) En déduire que la série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k2^k}$ converge et qu'on a $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = \ln 2.$

2. (a) Montrer que la série $\sum_{k \geqslant 1} \left(\frac{1}{k2^k} - \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} \right)$ converge et déterminer sa somme.

(b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{k(k+1)2^k} = \left(\frac{1}{k2^k} - \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} \right) - \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}.$$

(c) En déduire que la série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k(k+1)2^k}$ converge et donner la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $\tau_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n}$.

(a) Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge.

(b) En déduire que la suite $(H_n - \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge puis qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\tau_{2n} = H_{2n} - H_n$.

(d) En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2.$

4. On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ a_n = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{n2^{n+1}n!} = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{n2^{n+1}n!}.$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{(2n)!}{n2^{2n+1}(n!)^2}$.

   (b) Rappeler la formule de Stirling.

   (c) Montrer que la série de terme général a_n est convergente.

   Pour la suite, on admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \ln(2)$.

Partie B.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$.

R_n, S_n, T_n et V_n sont donc les restes d'indice n des séries vues en première partie.
Le but de cette partie est de déterminer des équivalents des quatre suites (R_n), (S_n), (T_n) et (V_n).

On rappelle que la notation $u_n \sim v_n$ signifie que la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) et que la notation $u_n = o(v_n)$ signifie que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n).

1. (a) À l'aide de la question A.2.(b), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = \frac{1}{(n+1)2^n} - R_n.$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, avec $k \geqslant n+1$, $\dfrac{1}{k(k+1)2^k} \leqslant \dfrac{1}{(n+2)k2^k}$.

   En déduire que $V_n = o(R_n)$.

   (c) Conclure que $R_n \sim \dfrac{1}{n2^n}$.

2. (a) En utilisant la question A.1.(a), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$.

   (b) À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt$.

   (c) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\,dt.$$

   (d) Conclure que $S_n \sim \dfrac{(-1)^n}{2n}$.

3. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall k \geqslant N,\ (1-\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{3/2}} \leqslant a_k \leqslant (1+\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{3/2}}.$$

   (b) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{3/2}} \leqslant \frac{1}{k^{3/2}} \leqslant \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^{3/2}}$.

   (c) Déduire des questions précédentes que

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \text{ avec } N \leqslant n \leqslant p-1,\ (1-\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{n+1}^{p+1}\frac{dt}{t^{3/2}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} a_k \leqslant (1+\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_n^p \frac{dt}{t^{3/2}}.$$

   (d) Montrer alors que $T_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{R_{k-1} - R_k}{k+1}.$$

(b) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = \frac{R_n}{n+2} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right).$$

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n \leqslant \frac{1}{(n+1)2^n}$$

puis que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{R_k}{(k+2)(k+1)} \leqslant \frac{1}{n+2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}.$$

En déduire que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{R_k}{(k+2)(k+1)} = o(V_n)$.

(d) En déduire que $V_n \sim \dfrac{1}{n^2 2^n}$.

5. Parmi les quatre séries étudiées dans ce problème, laquelle converge le plus rapidement ? Laquelle converge le moins rapidement ? Justifier vos réponses.