CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 1

Exercice

1. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{(\ln n)^2}=+\infty$ par croissances comparées.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 2}\frac{n}{(\ln n)^2} \text{ diverge grossièrement.}}$$

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 2$:

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\geqslant\frac{\ln 2}{\sqrt{n}}\geqslant 0.$$

De plus, la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (car $\frac{1}{2}\leqslant 1$) donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(\ln 2)\times\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge également (constante multiplicative non nulle).
Par comparaison par inégalité, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 2}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \text{ diverge.}}$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{3/2}\dfrac{(\ln n)^2}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(\ln n)^2}{n^{1/2}}=0$ par croissances comparées donc $\dfrac{(\ln n)^2}{n^2}=o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.
On a de plus pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^{3/2}}\geqslant 0$ et la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge $(3/2>1)$.
Par comparaison par petit o, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1}\frac{(\ln n)^2}{n^2} \text{ converge.}}$$

2. On a $e^x-1\underset{x\to 0}{\sim}x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)=0$ donc $\exp\left(-\dfrac{1}{n}\right)-1\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{n}$ donc $1-\exp\left(-\dfrac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$.
On a de plus pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n}\geqslant 0$ et la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique).
Par comparaison par équivalent, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}-\left(\exp\left(-\dfrac{1}{n}\right)-1\right)$ diverge donc (constante multiplicative $-1\neq 0$ ne change pas la nature) :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1}\left(\exp\left(-\frac{1}{n}\right)-1\right) \text{ diverge.}}$$

On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{n}\leqslant 0$ donc $\exp\left(-\dfrac{1}{n}\right)\leqslant 1$ (croissance de exp sur $\mathbb{R}$).
Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(1-\exp\left(-\dfrac{1}{n}\right)\right)$ diverge et est à termes positifs donc sa suite de sommes partielles tend vers $+\infty$.
On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1-\exp\left(-\dfrac{1}{k}\right)\right)=+\infty$ d'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\exp\left(-\frac{1}{k}\right)-1\right)=-\infty}$$

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$ et $v_n = \dfrac{1}{e^n}$.
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!e^{n-k}}\right) = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}u_k v_{n-k}\right)$ est le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
La série $\sum |u_n| = \sum \dfrac{1}{n!}$ converge (série exponentielle de paramètre 1) donc la série $\sum u_n$ converge absolument.
La série $\sum |v_n| = \sum (e^{-1})^n$ converge (série géométrique avec $|e^{-1}| < 1$) donc la série $\sum v_n$ converge absolument.
Par produit de Cauchy, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!e^{n-k}}\right)$ converge (absolument) et a pour somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!e^{n-k}}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-1})^n\right) = e^{-1} \times \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{1}{e-1}.$$

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!e^{n-k}}\right) \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!e^{n-k}}\right) = \frac{1}{e-1}.}$$

PROBLÈME 1 *d'après Ecricome 2020 et E3A MP 2006*
1.(a) Par le cours :

$$\boxed{\text{la série de Riemann } \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$$

1.(b) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue et décroissante sur $[1,+\infty[$ (puisque $\alpha > 1$) donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{1}{t^\alpha}dt \leqslant \frac{1}{k^\alpha}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant N-1$.
En sommant pour k allant de n à $N-1$, on obtient :

$$\sum_{k=n}^{N-1}\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \sum_{k=n}^{N-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{t^\alpha}dt \leqslant \sum_{k=n}^{N-1}\frac{1}{k^\alpha}.$$

Or, par changement d'indice $\ell = k+1$, on trouve :

$$\sum_{k=n}^{N-1}\frac{1}{(k+1)^\alpha} = \sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^\alpha}$$

et par la relation de Chasles, on a :

$$\sum_{k=n}^{N-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{t^\alpha}dt = \int_n^N\frac{1}{t^\alpha}dt = \left[\frac{1}{-\alpha+1}t^{-\alpha+1}\right]_n^N = \frac{1}{1-\alpha}\left(N^{1-\alpha}-n^{1-\alpha}\right) \text{ car } \alpha \neq 1.$$

Par passage à la limite dans les inégalités obtenus, comme les séries en jeu convergent et $\lim\limits_{N\to+\infty} N^{1-\alpha} = 0$ puisque $\alpha > 1$, on obtient :

$$R_{1,n} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} + \frac{1}{n^\alpha}.$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^\alpha} \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Comme $\dfrac{1}{n^\alpha} = o\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$, on a $\dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^\alpha} \sim \dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.
On en déduit par encadrement que :

$$\boxed{R_{1,n} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.}$$

1.(c) On est toujours dans le cas $\alpha > 1$.
Par définition, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 2 lorsque la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} R_{1,n}$ converge.
Or, on a $R_{1,n} \sim \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \geqslant 0$.
Par comparaison, on en déduit que les séries $\sum R_{1,n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$ sont de même nature (puisque $\dfrac{1}{\alpha-1}$ est une constante multiplicative non nulle).
Par conséquent, la série $\sum R_{1,n}$ converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ c'est-à-dire $\alpha > 2$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge à l'ordre 2 si et seulement si } \alpha > 2.}$$

2.(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{n^n}{(n+1)^n} = \exp\left(n\ln n - n\ln(n+1)\right) = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(-n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(-1+o(1))$$

car $\ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1+o(1)) = -1$, on en déduit par continuité de la fonction exponentielle en -1 que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = e^{-1}}.$$

2.(b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1}\frac{n^n}{(n+1)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \times e^{-1} = 0 < 1.$$

On en déduit par le théorème de d'Alembert que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge.}}$$

2.(c) Soit $k \geqslant 3$. Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^k}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (puisque $k > 0$), on a $\dfrac{1}{k^k} \leqslant \dfrac{1}{3^k}$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } k \geqslant 3,\ u_k \leqslant \frac{1}{3^k}.}$$

Soit $n \geqslant 2$. On a pour tout $k \geqslant n+1$, $k \geqslant 3$ donc $0 \leqslant u_k = \dfrac{1}{k^k} \leqslant \left(\dfrac{1}{3}\right)^k$.
Comme les séries $\sum\limits_{k\geqslant n+1} u_k$ et $\sum\limits_{k\geqslant n+1} \left(\dfrac{1}{3}\right)^k$ convergent (série géométrique avec $|\frac{1}{3}| < 1$), on en déduit par somme que :

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1/3^{n+1}}{1-1/3} = \frac{1}{2.3^n}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 2,\ 0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2.3^n}.}$$

2.(d) On a donc :

- Pour tout $n \geqslant 2$, $R_{1,n} \leqslant \dfrac{1}{2.3^n}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{1,n} \geqslant 0$.
- La série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ converge donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3^n}$ aussi.

Par comparaison, on en déduit que la série $\sum R_{1,n}$ converge.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge à l'ordre 2.}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \geqslant n+1$, $k \geqslant 2$ donc $0 \leqslant R_{1,k} \leqslant \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3^k}$.
Comme les séries en jeu convergent, on obtient par croissance et linéarité de la somme :

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{2}\frac{1}{2.3^n} = \frac{1}{4.3^n}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 1,\ 0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{4.3^n}.}$$

2.(e) Montrons par récurrence que pour tout $p \geqslant 2$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre p et pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \dfrac{1}{2^p.3^n}$.
Initialisation : Le cas $p = 2$ a été prouvé à la question 2.(d).
Hérédité : Soit $p \geqslant 2$.
On suppose que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre p et pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \dfrac{1}{2^p.3^n}$.
La série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ converge donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{2^p}\dfrac{1}{3^n}$ aussi.
Par comparaison par inégalité, on en déduit que la série $\sum R_{p,n}$ converge.
Cela signifie que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre $p+1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \geqslant n+1$, $k \geqslant 1$ donc $0 \leqslant R_{p,k} \leqslant \dfrac{1}{2^p}\dfrac{1}{3^k}$.
Comme les séries en jeu convergent, on obtient par croissance et linéarité de la somme :

$$0 \leqslant R_{p+1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} \leqslant \frac{1}{2^p}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{2^p}\frac{1}{2.3^n} = \frac{1}{2^{p+1}.3^n}.$$

La propriété est donc vraie au rang $p+1$.
Par récurrence, on a donc prouvé que :

$$\boxed{\text{pour tout } p \geqslant 2, \text{ la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge à l'ordre } p \text{ et pour tout } n \geqslant 1,\ 0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p.3^n}.}$$

2.(f) On a montré que pour tout $p \geqslant 2$ et tout $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \dfrac{1}{2^p.3^n}$.
On a donc en particulier, pour tout $n \geqslant 2$, $0 \leqslant R_{n,n} \leqslant \dfrac{1}{2^n.3^n} = \dfrac{1}{6^n}$ (on prend $p = n$).
Comme la série géométrique $\sum \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ converge ($|\frac{1}{6}| < 1$), on en déduit par comparaison par inégalité que :

$$\boxed{\text{la série } \sum R_{n,n} \text{ converge.}}$$

3.(a) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est une série alternée car pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=(-1)^n\times\dfrac{1}{n^2}$ avec $\dfrac{1}{n^2}\geqslant 0$.

De plus, la suite $(|u_n|)_{n\geqslant 1}=\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et converge vers 0.

Par le critère spécial des séries alternées, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge et pour tout } n\in\mathbb{N},\ |R_{1,n}|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right|\leqslant |u_{n+1}|=\frac{1}{(n+1)^2}.}$$

3.(b) On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant |R_{1,n}|\leqslant\dfrac{1}{(n+1)^2}$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{(n+1)^2}=\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge $(2>1)$ donc par comparaison par inégalité, on en déduit que la série $\sum R_{1,n}$ converge absolument donc converge. Ainsi :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge à l'ordre 2.}}$$

4.(a) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est une série alternée car pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=(-1)^n\times\dfrac{1}{n}$ avec $\dfrac{1}{n}\geqslant 0$.

De plus, la suite $(|u_n|)_{n\geqslant 1}=\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et converge vers 0.

Par le critère spécial des séries alternées, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge}}$$

et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $R_{1,n}=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de son premier terme c'est-à-dire de $(-1)^{n+1}$.

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum R_{1,n} \text{ est aussi alternée.}}$$

4.(b) Soit $n\in\mathbb{N}$.

La série $\sum\limits_{p\geqslant 0}\dfrac{(-1)^p}{n+1+p}$ converge par le critère de Leibniz puisque la suite $\left(\dfrac{1}{n+1+p}\right)_{p\geqslant 0}$ est décroissante et converge vers 0.

De même, la série $\sum\limits_{p\geqslant 0}\dfrac{(-1)^p}{n+2+p}$ converge.

Par linéarité, on en déduit que la série $\sum\limits_{p\geqslant 0}(-1)^p\left(\dfrac{1}{n+1+p}-\dfrac{1}{n+2+p}\right)$ converge et on a :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\left(\frac{1}{n+1+p}-\frac{1}{n+2+p}\right)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{n+1+p}-\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{n+2+p}.$$

Par les changements d'indices $k=n+1+p$ et $k=n+2+p$, on obtient :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\left(\frac{1}{n+1+p}-\frac{1}{n+2+p}\right)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-n-1}}{k}-\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-n-2}}{k}=(-1)^{-n-1}R_{1,n}-(-1)^{-n-2}R_{1,n+1}.$$

Or, on a vu que $R_{1,n}$ est du signe de $(-1)^{n+1}$ donc $R_{1,n}=(-1)^{n+1}|R_{1,n}|$ et de même, $R_{1,n+1}$ est du signe de $(-1)^{n+2}$ donc $R_{1,n+1}=(-1)^{n+2}|R_{1,n+1}|$.

En remplaçant dans l'égalité précédente, on en déduit que :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\left(\frac{1}{n+1+p}-\frac{1}{n+2+p}\right)=|R_{1,n}|-|R_{1,n+1}|.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ |R_{1,n}|-|R_{1,n+1}|=\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\left(\frac{1}{n+1+p}-\frac{1}{n+2+p}\right).}$$

4.(c) On a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{m+2} - \frac{2}{m+1} + \frac{1}{m} = \frac{m(m+1) - 2m(m+2) + (m+2)(m+1)}{(m+2)(m+1)m}$$
$$= \frac{m^2 + m - 2m^2 - 4m + m^2 + 3m + 2}{(m+2)(m+1)m}$$
$$= \frac{2}{(m+2)(m+1)m}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } m \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{m+2} - \frac{2}{m+1} + \frac{1}{m} \geqslant 0.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in \mathbb{N}$.
En appliquant ce qui précède avec $m = n + p + 1 \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\frac{1}{n+p+3} - \frac{2}{n+p+2} + \frac{1}{n+p+1} \geqslant 0 \text{ donc } \frac{1}{n+p+1} - \frac{1}{n+p+2} \geqslant \frac{1}{n+p+2} - \frac{1}{n+p+3}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } \left(\frac{1}{n+1+p} - \frac{1}{n+2+p}\right)_{p\geqslant 0} \text{ est décroissante.}}$$

4.(d) Soit $n \in \mathbb{N}$.
La série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}(-1)^p \left(\frac{1}{n+1+p} - \frac{1}{n+2+p}\right)$ est une série alternée car pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\frac{1}{n+1+p} - \frac{1}{n+2+p} \geqslant 0$.
De plus, la suite $\displaystyle\left(\frac{1}{n+1+p} - \frac{1}{n+2+p}\right)_{p\geqslant 0}$ est décroissante et a pour limite 0 lorsque p tend vers $+\infty$.
Par le critère spécial des séries alternées, on en déduit que la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \left(\frac{1}{n+1+p} - \frac{1}{n+2+p}\right)$ est du signe de son premier terme c'est-à-dire positive.
On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_{1,n}| - |R_{1,n+1}| \geqslant 0$ donc $\boxed{\text{la suite } (|R_{1,n}|)_{n\geqslant 0} \text{ est décroissante.}}$
On sait de plus qu'en tant que suite des restes d'une série convergente, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_{1,n} = 0$.
Ainsi, $\sum R_{1,n}$ est une série alternée, la suite $(|R_{1,n}|)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et converge vers 0.
Par le critère de Leibniz, on en déduit que la série $\sum R_{1,n}$ converge.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge à l'ordre 2.}}$$

Problème 2 *d'après E3A PC 2016*
A.1.(a) Notons f la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.
La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$.
Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\displaystyle f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$.
Initialisation :
On a pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\displaystyle f'(x) = \frac{1}{1+x}$ et pour $k = 1$, $\displaystyle\frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k} = \frac{(-1)^2 0!}{1+x} = \frac{1}{1+x}$.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\displaystyle f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$.
En dérivant, on obtient pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\displaystyle f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)!(-k)(1+x)^{-k-1} = \frac{(-1)^{k+2}k!}{(1+x)^{k+1}}$.
Conclusion : Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\displaystyle f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $]-1,+\infty[$.
Soit $x \in]-1,+\infty[$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral appliquée entre 0 et x, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Comme $f(0) = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!$, on en déduit :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \frac{(-1)^{n+2} n!}{(1+t)^{n+1}} dt$$

d'où :

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt.}$$

A.1.(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant la question précédente avec $x = -\frac{1}{2} \in]-1,+\infty[$, on obtient :

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k + (-1)^n \int_0^{-1/2} \frac{(-1/2-t)^n}{(1+t)^{n+1}} \mathrm{d}t$$

ou encore :

$$-\ln 2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k+1}}{k 2^k} + (-1)^n \int_0^{-1/2} (-1)^n \frac{(1+2t)^n}{2^n (1+t)^{n+1}} \mathrm{d}t.$$

D'où en multipliant par -1, on obtient :

$$\boxed{\ln 2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k 2^k} + \int_{-1/2}^{0} \frac{(1+2t)^n}{2^n (1+t)^{n+1}} \mathrm{d}t.}$$

A.1.(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a pour tout $t \in [-1/2, 0]$, $1 + 2t \geqslant 0$ et $1 + t \geqslant \frac{1}{2} > 0$ donc $\dfrac{(1+2t)^n}{2^n(1+t)^{n+1}} \geqslant 0$.
Par positivité de l'intégrale ($-1/2 \leqslant 0$), on en déduit que $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} \frac{(1+2t)^n}{2^n(1+t)^{n+1}} \mathrm{d}t \geqslant 0$.
On a pour tout $t \in [-1/2, 0]$, $1 + t \geqslant \frac{1}{2} \geqslant 0$ donc $(1+t)^{n+1} \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}$ donc $2^n(1+t)^{n+1} \geqslant \frac{1}{2} > 0$ et comme $(1+2t)^n \geqslant 0$, on en déduit que $\dfrac{(1+2t)^n}{2^n(1+t)^{n+1}} \leqslant 2(1+2t)^n$.
Par croissance de l'intégrale ($-1/2 \leqslant 0$), on en déduit que $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} \frac{(1+2t)^n}{2^n(1+t)^{n+1}} \mathrm{d}t \leqslant 2 \int_{-1/2}^{0} (1+2t)^n \mathrm{d}t$.
Ainsi :

$$\boxed{0 \leqslant \int_{-1/2}^{0} \frac{(1+2t)^n}{2^n(1+t)^{n+1}} \, \mathrm{d}t \leqslant 2 \int_{-1/2}^{0} (1+2t)^n \, \mathrm{d}t.}$$

A.1.(d) On a :

$$2 \int_{-1/2}^{0} (1+2t)^n \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{(n+1)} (1+2t)^{n+1} \right]_{-1/2}^{0} = \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on en déduit par le théorème de limite par encadrement que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-1/2}^{0} \frac{(1+2t)^n}{2^n(1+t)^{n+1}} \, \mathrm{d}t = 0.$$

Par A.1.(b), on en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k 2^k} = \ln 2$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k 2^k} \text{ converge et on a } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k 2^k} = \ln 2.}$$

A.2.(a) Comme la suite $\left(\dfrac{1}{k2^k}\right)_{k\geqslant 1}$ converge (vers 0 puisque $2>1$), la série télescopique $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{k2^k}-\frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\right)$ converge et on a par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k2^k}-\frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\right)=\frac{1}{2}-\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k2^k}=\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\text{La série } \sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{k2^k}-\frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\right) \text{ converge et a pour somme } \frac{1}{2}.}$$

A.2.(b) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$\frac{1}{k(k+1)2^k}=\frac{(k+1)-k}{k(k+1)2^k}=\frac{1}{k2^k}-\frac{1}{(k+1)2^k}=\frac{1}{k2^k}-\frac{2}{(k+1)2^{k+1}}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{1}{k(k+1)2^k}=\left(\frac{1}{k2^k}-\frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\right)-\frac{1}{(k+1)2^{k+1}}.}$$

A.2.(c) Comme les séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{k2^k}-\frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\right)$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{(k+1)2^{k+1}}=\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{k2^k}$ convergent, on en déduit par linéarité que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k(k+1)2^k}$ converge et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)2^k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k2^k}-\frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\right)-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)2^{k+1}}=\frac{1}{2}-\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k2^k}=\frac{1}{2}-\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k2^k}-\frac{1}{2}\right)=1-\ln 2.$$

$$\boxed{\text{La série } \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k(k+1)2^k} \text{ converge et on a } \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)2^k}=1-\ln 2.}$$

A.3.(a) On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{n}=-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On a donc :

- $-u_n\sim\dfrac{1}{2n^2}$.
- $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{2n^2}\geqslant 0$.
- La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge (car $2>1$) donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$ aussi.

Par théorème de comparaison, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-u_n)$ converge et donc :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1}u_n \text{ converge.}}$$

A.3.(b) Par télescopage, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}\big(\ln(k+1)-\ln k\big)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n+1)-\ln 1-H_n=\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-H_n$$

d'où $\displaystyle H_n-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\sum_{k=1}^{n}u_k$.

Comme la série $\sum u_n$ converge, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(H_n-\ln n)=-\sum_{k=1}^{+\infty}u_k$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (H_n-\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

Notons $\gamma = -\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \in \mathbb{R}$. On a alors $\lim_{n\to+\infty} (H_n - \ln n) = \gamma$ d'où $H_n - \ln n - \gamma = o(1)$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe } \gamma \in \mathbb{R} \text{ tel que } H_n = \ln n + \gamma + o(1).}$$

A.3.(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En séparant les termes d'incides pairs et impairs, on obtient :

$$\tau_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{2p+1}}{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^{2p+1+1}}{2p+1} = -\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+1} = -\frac{1}{2} H_n + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+1}.$$

De même :

$$H_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+1} = \frac{1}{2} H_n + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+1}.$$

Par différence des deux égalités obtenues, on obtient alors $\tau_{2n} - H_{2n} = -H_n$ d'où :

$$\boxed{\tau_{2n} = H_{2n} - H_n.}$$

A.3.(d) La série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est une série alternée car pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} \geqslant 0$.

De plus, la suite $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0.

D'après le critère de Leibniz, on en déduit que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge donc on a $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Par propriété des suites extraites, on a également $\lim_{n\to+\infty} \tau_{2n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Or, on a d'après ce qui précède :

$$\tau_{2n} = \ln(2n) + \gamma + o(1) - \ln n - \gamma + o(1) = \ln 2 + o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2.$$

Ainsi par unicité de la limite :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2.}$$

A.4.(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{n2^{n+1}n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n}(2k)}{n2^{n+1}n!\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod_{\ell=1}^{2n}\ell}{n2^{n+1}n!\left(\prod_{k=1}^{n}2\right)\left(\prod_{k=1}^{n}k\right)} = \frac{(2n)!}{n2^{n+1}n!2^n n!}$$

d'où :

$$\boxed{a_n = \frac{(2n)!}{n2^{2n+1}(n!)^2}.}$$

A.4.(b) Formule de Stirling :

$$\boxed{n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.}$$

A.4.(c) On a d'après la formule de Stirling : $a_n \sim \dfrac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{n2^{2n+1}\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\right)^2} = \dfrac{2^{2n}n^{2n}e^{-2n}2\sqrt{\pi}\sqrt{n}}{n2^{2n+1}n^{2n}e^{-2n}2\pi n}$.

On a donc :

- $a_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}} \geqslant 0$.
- La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge ($\frac{3}{2} > 1$) donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$ aussi.

Par théorème de comparaison, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum a_n \text{ converge.}}$$

B.1.(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme toutes les séries en jeu convergent, on a par linéarité :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k2^k} - \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} \right) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} - 0 - \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$$

par télescopage et glissement d'indice.
Comme $\displaystyle\sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$, on en déduit que :

$$V_n = \frac{2}{(n+1)2^{n+1}} - R_n \text{ d'où } \boxed{V_n = \frac{1}{(n+1)2^n} - R_n}.$$

B.1.(b) On a pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant n+1$, $2^k k(k+1) \geqslant 2^k k(n+2) > 0$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{2^k k(k+1)} \leqslant \dfrac{1}{n+2}\dfrac{1}{2^k k}$.
Par somme (les deux séries en jeu convergent), on en déduit que $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k} \leqslant \frac{1}{n+2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$.
Comme $R_n > 0$, on a alors $0 \leqslant \dfrac{V_n}{R_n} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$.
Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2} = 0$, on en déduit par encadrement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{V_n}{R_n} = 0$ c'est-à-dire :

$$\boxed{V_n = o(R_n).}$$

B.1.(c) D'après B.1.(a), on a $R_n + V_n = \dfrac{1}{(n+1)2^n}$.
Or, $R_n + V_n = R_n + o(R_n)$ donc $R_n + V_n \sim R_n$ et $\dfrac{1}{(n+1)2^n} \sim \dfrac{1}{n2^n}$.
On en déduit par transitivité que :

$$\boxed{R_n \sim \frac{1}{n2^n}.}$$

B.2.(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
Par la question A.1.(a) appliquée avec $x = 1 \in]-1, +\infty[$, on obtient :

$$\boxed{S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} \mathrm{d}t.}$$

B.2.(b) La fonction $v : t \mapsto \dfrac{1-t}{1+t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et pour tout $t \in [0,1]$, $v'(t) = \dfrac{-2}{(1+t)^2}$.
On pose alors $u = \dfrac{1-t}{1+t}$. On a $du = \dfrac{-2}{(1+t)^2} dt$.
Lorsque $t = 0$ alors $u = 1$ et lorsque $t = 1$ alors $u = 0$.
On a aussi $1 + t = \dfrac{2}{1+u}$.
On en déduit :

$$S_n = (-1)^n \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^n (1+t) \frac{1}{(1+t)^2} dt = (-1)^n \int_0^1 u^n \frac{2}{1+u} \frac{1}{2} du$$

d'où :

$$\boxed{S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt.}$$

B.2.(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Les fonctions $t \mapsto \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ donc par intégration par parties, on a :

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt = \left[\frac{1}{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}dt = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}dt.$$

On en déduit :

$$\boxed{S_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}dt.}$$

B.2.(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{t^{n+1}}{(1+t)^2} \leqslant t^{n+1}$ donc par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}dt \leqslant \int_0^1 t^{n+1}dt = \left[\frac{1}{n+2}t^{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+2}.$$

Par encadrement, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}dt = 0$.

Par suite, $\displaystyle\frac{(-1)^n}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}dt = o\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ donc $\displaystyle S_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + o\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right) \sim \frac{(-1)^n}{2(n+1)} \sim \frac{(-1)^n}{2n}$.

$$\boxed{S_n \sim \frac{(-1)^n}{2n}.}$$

B.3.(a) On a déterminé dans la question A.4.(c) que $a_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$.

Cela signifie que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\frac{a_k}{\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{3/2}}} = 1$ donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant N$, on a :

$$\left|\frac{a_k}{\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{3/2}}} - 1\right| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow 1-\varepsilon \leqslant \frac{a_k}{\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{3/2}}} \leqslant 1+\varepsilon \Leftrightarrow \boxed{(1-\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{3/2}} \leqslant a_k \leqslant (1+\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{3/2}}.}$$

B.3.(b) Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$.

Par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$ sur $[1,+\infty[$, on a pour tout $t \in [k,k+1]$: $\dfrac{1}{t^{3/2}} \leqslant \dfrac{1}{k^{3/2}}$.

Par croissance de l'intégrale (les fonctions intégrées sont continues sur le segment $[k,k+1]$), on obtient : $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{t^{3/2}}dt \leqslant \int_k^{k+1}\frac{1}{k^{3/2}}dt = \frac{1}{k^{3/2}}(k+1-k) = \frac{1}{k^{3/2}}$.

Par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$ sur $[1,+\infty[$, on a pour tout $t \in [k-1,k]$: $\dfrac{1}{k^{3/2}} \leqslant \dfrac{1}{t^{3/2}}$.

Par croissance de l'intégrale, on obtient : $\displaystyle\frac{1}{k^{3/2}} = \int_{k-1}^k \frac{1}{k^{3/2}}dt \leqslant \int_{k-1}^k \frac{1}{t^{3/2}}dt$.

D'où :

$$\boxed{\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^{3/2}} \leqslant \frac{1}{k^{3/2}} \leqslant \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^{3/2}}}$$

B.3.(c) Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $N \leqslant n \leqslant p-1$. On a d'après les questions B.3.(a) et (b) :

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{k^{3/2}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} a_k \leqslant (1+\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{k^{3/2}}$$

et

$$\int_{n+1}^{p+1}\frac{dt}{t^{3/2}} = \sum_{k=n+1}^{p}\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^{3/2}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{k^{3/2}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{p}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^{3/2}} = \int_n^p \frac{dt}{t^{3/2}}.$$

On en déduit :

$$\boxed{(1-\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{n+1}^{p+1}\frac{dt}{t^{3/2}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} a_k \leqslant (1+\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{n}^{p}\frac{dt}{t^{3/2}}.}$$

B.3.(d) On a $\displaystyle\int_n^p \frac{dt}{t^{3/2}} = \left[\frac{-2}{\sqrt{t}}\right]_n^p = \frac{-2}{\sqrt{p}} + \frac{2}{\sqrt{n}}$ donc $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\int_n^p \frac{dt}{t^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$.

De même, $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\int_{n+1}^{p+1}\frac{dt}{t^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}}$.

Par suite, en faisant tendre p vers $+\infty$ dans les inégalités obtenues en B.3.(c), on obtient :

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{\pi(n+1)}} \leqslant T_n \leqslant (1+\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Ainsi :

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \leqslant \frac{T_n}{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}} \leqslant 1+\varepsilon.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$, on en déduit qu'il existe $N_1 > N$ tel que pour $n \geq N_1$, on ait :

$$1-2\varepsilon \leq (1-\varepsilon)^2 \leq (1-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \leq T_n\sqrt{\pi n} \leq 1+\varepsilon \leqslant 1+2\varepsilon.$$

On a ainsi obtenu que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N$ alors $\left|\frac{T_n}{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}} - 1\right| \leqslant 2\varepsilon$ ce qui signifie $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{T_n}{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}} = 1$ c'est-à-dire :

$$\boxed{T_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.}$$

B.4.(a) On remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle R_{k-1} - R_k = \sum_{\ell=k}^{+\infty}\frac{1}{\ell 2^\ell} - \sum_{\ell=k+1}^{+\infty}\frac{1}{\ell 2^\ell} = \frac{1}{k2^k}$.

On a alors :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ V_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{R_{k-1}-R_k}{k+1}.}$$

B.4.(b) On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
V_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{R_{k-1}-R_k}{k+1} \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{R_{k-1}}{k+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{R_k}{k+1} \quad (*) \\
&= \sum_{\ell=n}^{+\infty}\frac{R_\ell}{\ell+2} - \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{R_k}{k+1} \\
&= \frac{R_n}{n+2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right).
\end{aligned}$$

(*) car les séries $\sum \frac{R_{k-1}}{k+1}$ et $\sum \frac{R_k}{k+1}$ convergent.

En effet, par B.1.c), on a $\displaystyle\frac{R_{k-1}}{k+1} \sim \frac{1}{(k-1)2^{k-1}(k+1)} \sim \frac{2}{k^2 2^k} = o\left(\frac{1}{2^k}\right)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{2}{k^2 2^k} \geqslant 0$, $\displaystyle\frac{1}{2^k} \geqslant 0$ et la série géométrique $\sum \frac{1}{2^k}$ converge $(-1 < \frac{1}{2} < 1)$.

Et on a $\dfrac{R_k}{k+1} \sim \dfrac{R_k}{k+2}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{R_k}{k+2} \geqslant 0$ et la série $\sum \frac{R_k}{k+2}$ converge par ce qui précède.

$$\boxed{V_n = \frac{R_n}{n+2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right).}$$

B.4.(c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant n+1$, $\dfrac{1}{k2^k} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)2^k}$ donc par somme (séries convergentes), on obtient :

$$R_n \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{n+1}\frac{1/2^{n+1}}{1-1/2} = \frac{1}{(n+1)2^n}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ R_n \leqslant \frac{1}{(n+1)2^n}.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant n+1$:

$$\frac{R_k}{(k+2)(k+1)} \leqslant \frac{1}{(k+1)2^k(k+2)(k+1)} \leqslant \frac{1}{(n+2)k(k+1)2^k} \text{ car } k+1 \geqslant n+2 \text{ et } k+2 \geqslant k.$$

Par somme (séries convergentes), on a en déduit :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{R_k}{(k+2)(k+1)} \leqslant \frac{1}{n+2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)2^k}.}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{R_k}{(k+2)(k+1)}}{V_n} \leqslant \frac{1}{n+2}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+2} = 0$, on en déduit par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{R_k}{(k+2)(k+1)}}{V_n} = 0$ c'est-à-dire :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{R_k}{(k+2)(k+1)} = o(V_n).}$$

B.4.(d) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{R_n}{n+2} = V_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right) = V_n - \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{R_k}{(k+2)(k+1)} = V_n + o(V_n) \sim V_n.$$

Par ailleurs, $\dfrac{R_n}{n+2} \sim \dfrac{1}{n^2 2^n}$.

Par transitivité, on en déduit :

$$\boxed{V_n \sim \frac{1}{n^2 2^n}.}$$

B.5. Le reste en valeur absolue est la distance entre la somme partielle et la somme de la série. La rapidité avec laquelle le reste tend vers 0 indique donc la vitesse de convergence de la série. Or, selon l'échelle de comparaison suivant la relation de négligeabilité, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}} >> \frac{(-1)^n}{2n} >> \frac{1}{n2^n} >> \frac{1}{n^2 2^n}.$$

La série qui converge le plus rapidement est donc la série correspondant au reste V_n et celle qui converge le moins rapidement est celle correspondant au reste T_n.

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La série qui converge le plus rapidement est la série } \sum \dfrac{1}{n(n+1)2^n} \\ \text{et celle qui converge le moins rapidement est la série } \sum a_n.\end{array}}$$