Corrigé du DM 2

Exercice 10 : Anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

1.

$$A = \left\{m + n\sqrt{2};\ \text{avec } m, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

- Soit $a = m_1 + n_1\sqrt{2}$ et $b = m_2 + n_2\sqrt{2}$ avec $(m_1, n_1, m_2, n_2) \in \mathbb{Z}^4$.
  D'une part :
  $$a - b = (m_1 - m_2) + (n_1 - n_2)\sqrt{2} \in A$$
  car $m_1 - n_1 \in \mathbb{Z}$ et $m_2 - n_2 \in \mathbb{Z}$.
  D'autre part :
  $$ab = (m_1m_2 + 2n_1n_2) + \sqrt{2}(n_1m_2 + m_1n_2) \in A$$
  car $m_1m_2 + 2n_1n_2 \in \mathbb{Z}$ et $n_1m_2 + m_1n_2 \in \mathbb{Z}$.
  Enfin, $1 = 1 + 0 \times \sqrt{2} \in A$, donc A est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
  De plus : $\forall m \in \mathbb{Z}, m = m + 0\sqrt{2} \in A$ et $\sqrt{2} = 0 + 1 \times \sqrt{2} \in A$; donc A est un sous-anneau de $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{Z} \cup \left\{\sqrt{2}\right\}$.
- Soit B un sous-anneau de $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{Z} \cup \left\{\sqrt{2}\right\}$.
  Soit $x = m + n\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$, donc $m \in \mathbb{Z} \subset B$, $n \in \mathbb{Z} \subset \sqrt{2}$ et $\sqrt{2} \in B$; donc par stabilité de B par $+$ et $\times$, $x = m + n \times \sqrt{2} \in B$.
  On a montré que $A \subset B$, valable pour tout sous-anneau B de $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{Z} \cup \sqrt{2}$.

Conclusion :

$$\boxed{A \text{ est le plus petit sous-anneau de } \mathbb{R} \text{ qui contient } \mathbb{Z} \cup \sqrt{2}.}$$

2. Soit $a = m_1 + n_1\sqrt{2} \in A$ et $b = m_2 + n_2\sqrt{2} \in A$.
On a $ab = (m_1m_2 + 2n_1n_2) + \sqrt{2}(n_1m_2 + m_1n_2)$, ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} N(ab) &= \left|(m_1m_2 + 2n_1n_2)^2 - 2(n_1m_2 + m_1n_2)^2\right| \\ &= \left|m_1^2m_2^2 + 4n_1^2n_2^2 - 2n_1^2m_2^2 - 2m_1^2n_2^2\right| \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} N(a)N(b) &= \left|(m_1^2 - 2n_1^2)(m_2^2 - 2n_2^2)\right| \\ &= \left|m_1^2m_2^2 + 4n_1^2n_2^2 - 2n_1^2m_2^2 - 2m_1^2n_2^2\right| \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall a, b \in A, N(ab) = N(a)N(b).}$$

3. Soit $z \in A$.

- Supposons $z \in U$. Il existe donc $z' \in U$ tel que $zz' = 1$. D'après la question précédente, on en déduit que $N(z)N(z') = N(1) = 1$. Comme $N(z)$ et $N(z')$ appartiennent à $\mathbb{N}$, on conclut que $N(z) = 1$.
- Réciproquement, considérons $z = m + n\sqrt{2} \in A$ avec $N(z) = 1$.
  Remarquons d'abord que : $(m + n\sqrt{2})(m - n\sqrt{2}) = m^2 - 2n^2$.
  Or $N(z) = \left|m^2 - 2n^2\right| = 1$, donc : $z \times (m - n\sqrt{2}) = 1$ ou $z \times (m - n\sqrt{2}) = -1$; donc : $z \times (m - n\sqrt{2}) = 1$ ou $z \times (-m + n\sqrt{2}) = 1$. Donc z est inversible.

Donc :

$$\boxed{\text{un élément } z \text{ de } A \text{ est inversible si et seulement si } N(a) = 1.}$$

4. Soit $z = x + y\sqrt{2} \in U$ avec $x, y \in \mathbb{N}$ et $x \neq 0$, pour $n \in \mathbb{N}$, $z, 1 + \sqrt{2} \in \mathbb{R}_+^*$, donc par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} &(1 + \sqrt{2})^n \leqslant z < (1 + \sqrt{2})^{n+1} \\ &\Leftrightarrow n\ln(1 + \sqrt{2}) \leqslant \ln z < (n+1)\ln(1 + \sqrt{2}) \\ &\Leftrightarrow n \leqslant \frac{\ln z}{\ln(1 + \sqrt{2})} < n + 1 \qquad (\ln(1 + \sqrt{2}) > 0) \\ &\Leftrightarrow n = \left\lfloor \frac{\ln z}{\ln(1 + \sqrt{2})} \right\rfloor \end{aligned}$$

et $x \neq 0$, donc $x \geqslant 1$ et $z = x + y\sqrt{2} \geqslant 1$, donc : $\left\lfloor \frac{\ln z}{\ln(1+\sqrt{2})} \right\rfloor \geqslant 0$.
Donc :

$$\boxed{\text{il existe un unique } n \in \mathbb{N} \text{ tel que : } (1 + \sqrt{2})^n \leqslant z < (1 + \sqrt{2})^{n+1}}$$

On fixe $n = \left\lfloor \frac{\ln z}{\ln(1+\sqrt{2})} \right\rfloor$, alors : $N((1 + \sqrt{2})^n) = N(1 + \sqrt{2})^n = 1$, donc d'après la question 3, $(1 + \sqrt{2})^n$ est inversible dans A, donc $(1 + \sqrt{2})^{-n} \in A$ et $z \in A$, donc : $z(1 + \sqrt{2})^{-n} \in A$. Donc : il existe $x', y' \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\frac{z}{(1 + \sqrt{2})^n} = x' + y'\sqrt{2}.$$

Or $(1 + \sqrt{2})^n \leqslant z < (1 + \sqrt{2})^{n+1}$, donc : $1 \leqslant x' + y'\sqrt{2} < 1 + \sqrt{2}$. Donc x' ou y' est strictement positif.

Supposons par l'absurde $x' > 0$ et $y' < 0$, donc $1 \leqslant x' + y'\sqrt{2} < x' - y'\sqrt{2}$.

Or : $z \in U$ et $(1 + \sqrt{2})^n \in U$, donc $x' + y'\sqrt{2} \in U$, donc : $N(x' + y'\sqrt{2}) = \left|x'^2 - 2y'^2\right| = 1$.

Or : $x'^2 - 2y'^2 = (x' + y'\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) > 1$, d'où la contradiction.

Supposons par l'absurde $x' < 0$ et $y' > 0$, donc : $y' \geqslant 1$ et $x' \leqslant -1$ donc : $x' - y'\sqrt{2} \leqslant -2$. Or : $x' + y'\sqrt{2} \geqslant 1$; donc : $\left|x'^2 - 2y'^2\right| \geqslant 2$: contradiction.

Donc $x' \geqslant 0$ et $y' \geqslant 0$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{il existe } x', y' \in \mathbb{N} \text{ tels que } z(1+\sqrt{2})^{-n} = x' + y'\sqrt{2}.}$$

5. Soit $z \in U$. Donc : $z = x + y\sqrt{2}$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$.

1er cas : $x \geqslant 0, y \geqslant 0$: donc : d'après la question précédente, avec les mêmes notations, $1 \leqslant \frac{z}{(1+\sqrt{2})^n} = x' + y'\sqrt{2} < 1 + \sqrt{2}$ avec $x', y' \in \mathbb{N}$. De plus $N(x' + y'\sqrt{2}) = \left|x'^2 - 2y'^2\right| = 1$ est impair, donc $x' \neq 0$. Donc : $x' \geqslant 1$ et $x' + y'\sqrt{2} < 1 + \sqrt{2}$, d'où $x' = 1$ et $y' = 0$.

Donc : $z = (1+\sqrt{2})^n$.

2e cas : $x \leqslant 0, y \leqslant 0$: donc pour $w = -x - y\sqrt{2}$, on a $N(w) = N(z) = 1$ et $w \in U$, donc d'après le premier cas, $w = (1+\sqrt{2})^n$, donc $z = -(1+\sqrt{2})^n$.

3e cas : $x \geqslant 0, y \leqslant 0$: donc pour $w = x - y\sqrt{2}$, de même $w = (1+\sqrt{2})^n$ et $zw = 1$, donc : $z = (1+\sqrt{2})^{-n}$.

4e cas : $x \leqslant 0, y \geqslant 0$: de même, $z = -(1+\sqrt{2})^{-n}$.

Donc, dans tous les cas, $z \in \left\{\pm(1+\sqrt{2})^n;\ \text{avec } n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Réciproquement, si $n \in \mathbb{N}$ et $z = (1+\sqrt{2})^n$, comme $1 + \sqrt{2} \in A$ et $N(1+\sqrt{2}) = 1$, donc $1 + \sqrt{2} \in U$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}, (1+\sqrt{2})^n \in U$, et de même, $-(1+\sqrt{2})^n \in U$.

Conclusion :

$$\boxed{U = \left\{\pm(1+\sqrt{2})^n;\ \text{avec } n \in \mathbb{Z}\right\}.}$$