• Th : Si $\vec{u_p}$ est combinaison linéaire de $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{p-1}}$ alors $Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}) = Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{p-1}})$

dém • On a toujours :

$$Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{p-1}}) \subset Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}) \quad (1)$$

En effet : si $\vec{u} \in Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{p-1}})$, $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ dans K tq $\vec{u} = \alpha_1\vec{u_1} + \dots + \alpha_{p-1}\vec{u_{p-1}}$

mais alors $\vec{u} = \alpha_1\vec{u_1} + \dots + \alpha_{p-1}\vec{u_{p-1}} + 0.\vec{u_p}$

donc $\vec{u} \in Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$. Cqfd On a (1)

• Montrons que $Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}) \subset Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{p-1}})$ (2)

Soit $\vec{u} \in Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$. $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_p \in K$ tq

$\vec{u} = \alpha_1\vec{u_1} + \dots + \alpha_p\vec{u_p}$. (*)

Or $\vec{u_p}$ est combinaison linéaire de $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{p-1}}$

donc $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1} \in K$ tq $\vec{u_p} = \lambda_1\vec{u_1} + \dots + \lambda_{p-1}\vec{u_{p-1}}$

(*) donne alors $\vec{u} = \alpha_1\vec{u_1} + \dots + \alpha_{p-1}\vec{u_{p-1}} + \alpha_p(\lambda_1\vec{u_1} + \dots + \lambda_{p-1}\vec{u_{p-1}})$

càd $\vec{u} = (\alpha_1 + \lambda_1\alpha_p)\vec{u_1} + \dots + (\alpha_{p-1} + \lambda_{p-1}\alpha_p)\vec{u_{p-1}}$

d'où $\vec{u} \in Vect(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{p-1}})$

et ainsi : (2) est vrai.

NB : Comme l'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs ne dépend pas de l'ordre dans lequel on écrit ces vecteurs, on peut énoncer plus généralement :

" Si un vecteur de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres, on peut le retirer sans changer l'espace vectoriel engendré.