Exercice 1 (Des récurrences)

1. Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} &= \dfrac{3u_n - 2}{u_n} \end{cases}$$

Calculez les premiers termes de la suite (u_n) afin de donner une conjecture sur la valeur de u_n, puis démontrez cette formule par récurrence.

2. On appelle suite de Fibonacci la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 1 \\ \forall n \geq 0, u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

(a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

(b) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n$

---

1. On calcule $u_1 = \dfrac{3u_0 - 2}{u_0} = \dfrac{1}{1} = 1$, puis $u_2 = 1$ et éventuellement $u_3 = 1$: il semblerait donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.
Démontrons donc par récurrence que la propriété $P(n)$: $u_n = 1$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : On a bien $u_0 = 1$, donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est à dire $u_n = 1$.
Alors $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{u_n} = \dfrac{3 \times 1 - 2}{1} = 1$
La propriété $P(n+1)$ est donc vérifiée.
Conclusion : Par le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1.}$

2. (a) On va procéder par récurrence double. Soit $P(n)$ la proposition $u_n \geq n$.

Initialisation : On a $u_0 = 1 \geq 0$ et $u_1 = 1 \geq 1$, donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vérifiées.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Supposons que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies.
On a donc $u_n \geq n$ et $u_{n+1} \geq n+1$, donc $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \geq n + n + 1 = 2n + 1$
Il suffit maintenant de montrer que $2n + 1 \geq n + 2$.
Or $2n + 1 \geq n + 2 \Leftrightarrow n \geq 1$: la propriété est donc héréditaire, à partir de $n = 1$.
De plus, pour $n = 0$, on a $u_2 = 2 \geq 2$, donc $P(n+2)$ est valable aussi si $n = 0$ (Voir ce détail ajoute des points bonus....)
Dans tous les cas, on a bien $P(n)$ et $P(n+1)$ qui entraine $P(n+2)$.

Conclusion : On a bien $u_n \geq n$ pour tout $n \geq 0$.
Finalement,comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, on a, par comparaison ("théorème des gendarmes"),que $\boxed{\lim u_n = +\infty}$

(b) Une récurrence simple suffit en fait (Attention : erreur d'énoncé : $n \in \mathbb{N}^*$).
On pose

$$P(n) : u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n$$

Initialisation : On a $u_0 = 1 \geq 0$, $u_1 = 1 \geq 1$, $u_2 = 2$
Ainsi, $u_1^2 - u_0 u_2 = 1 - 2 = (-1) = (-1)^1$ donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 1$. Supposons que $P(n)$ est vraie :
alors

$$u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n$$

Or, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, donc $u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$
d'où

$$u_n^2 - (u_{n+1} - u_n)u_{n+1} = (-1)^n$$

Alors
$$u_n^2 - u_{n+1}^2 + u_n u_{n+1} = (-1)^n$$
Soit
$$u_n(u_n + u_{n+1}) - u_{n+1}^2 = (-1)^n$$
Comme $u_n + u_{n+1} = u_{n+2}$, on obtient $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n$, et finalement en passant à l'opposé
$$u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^{n+1}$$
C'est à dire $P(n+1)$.

Conclusion : Pour tout $n \geq 1$, on a bien $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n$

Exercice 2 (Ensembles de définition)

Déterminez les ensembles de définition des fonctions suivantes. On justifiera soigneusement la réponse.

1. $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2-4}$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^2+3x+2}$
3. $f_3 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)$
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+3x-4}}$

---

1. La fonction racine carrée étant définie sur $\mathbb{R}_+$, $f_1(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 4 \geq 0$. Or x^2-4 a pour racines 2 et -2, donc est positif à l'extérieur de celles-ci.
   Ainsi $\boxed{f_1 \text{ est définie sur }]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[.}$
2. $f_2(x)$ existe si et seulement si $x^2+3x+2 \neq 0$. Or les racines de x^2+3x+2 sont -1 et -2.
   Ainsi $\boxed{f_2 \text{ définie sur } \mathbb{R} \setminus \{-1; -2\}}$
3. Comme le logarithme est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, on cherche quand $\dfrac{2+x}{3-x}$ est strictement positif.
   Dressons un tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{2+x}{3-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

   Ainsi, $\boxed{f_3 \text{ est définie sur }]-2; 3[}$

4. Même problématique que f_3 : on cherche quand $\dfrac{x^2-1}{x^2+3x-4}$ est définie et est positif ou nul.
   Les racines de x^2-1 sont 1 et -1, celles de x^2+3x-4 sont 1 et -4.
   Un tableau de signe va à nouveau nous aider :

x	$-\infty$		-4		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2+3x-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x^2-1}{x^2+3x-4}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	

   Ainsi, $\boxed{f_4 \text{ est définie sur }]-\infty, -4[\cup[-1; 1[\cup]1; +\infty[}$

Exercice 3 (Injectivité, surjectivité, bijectivité) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$$

1. Montrez que f est injective.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Justifiez que f est bijective de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et déterminer f^{-1}

---

1. Faire un tableau de variation n'aide pas vraiment...
   Le plus simple est de partir de la définition

$$\begin{array}{rlrcl}
\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\text{si} & & f(a) & = & f(b) \\
 & \text{alors} & \dfrac{2a+5}{a-1} & = & \dfrac{2b+5}{b-1} \\
 & \text{donc} & (2a+5)(b-1) & = & (2b+5)(a-1) \\
 & \text{d'où} & 5b-2a & = & 5a-2b \\
 & \text{donc} & 3b & = & 3a \\
 & \text{et} & b & = & a
\end{array}$$

   Ainsi $\boxed{f \text{ est injective.}}$

2. Le calcul de f' donne $f'(x) = \dfrac{2(x-1)-(2x+5)}{(x-1)^2} = \dfrac{-7}{(x-1)^2}$
   De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$. Enfin, en -1, on a $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.
   d'où le tableau de variation

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
f	$2 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 2$

3. Deux façons de montrer la bijectivité : on peut utiliser le tableau de variation précédent, et justifier que, comme f est continue sur $]-\infty, 1[$, par le théorème des valeurs intermédiaires, toutes les valeurs de $]-\infty, 2[$ sont atteintes. De même, comme f est continue sur $]1, +\infty[$, toutes les valeurs de $]2, +\infty[$ sont atteintes. Ainsi, f est surjective de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
   Comme de plus, f est injective, f est bijective.
   Mais en fait, la recherche de f^{-1} fait tout cela d'un coup :
   Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. On cherche $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que $y = f(x)$
   Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{2x+5}{x-1} = y &\Leftrightarrow 2x+5 = y(x-1) \\
&\Leftrightarrow 2x - yx = -y-5 \\
&\Leftrightarrow x(2-y) = -y-5 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{-y-5}{2-y} = \frac{y+5}{y-2}
\end{aligned}$$

   De plus, $\dfrac{y+5}{y-2} = 1 \Leftrightarrow 5 = -2$ ce qui est absurde, donc pour tout y,on a obtenu une unique solution $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
   Ainsi, $\boxed{f \text{ est bijective et } f^{-1} : x \mapsto \dfrac{x+5}{x-2}}$

Exercice 4 (Injectivité, surjectivité, bijectivité)

Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n+1 \text{ et } g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

1. Justifiez que $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$. Pourquoi cela ne suffit-il pas à dire que f est bijective et que $f^{-1} = g$?
2. Montrez que f est injective mais pas surjective
3. Montrez que g est surjective mais n'est pas injective.

---

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $g(f(n)) = g(n+1)$. Or $n+1 \neq 0$, donc $g(n+1) = n+1-1 = n$
   Ainsi, $g \circ f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$.
   Néanmoins, pour montrer que f est bijective, il faut aussi vérifier que $f \circ g$ est l'identité.
2. Soient n et p deux entiers. Si $f(n) = f(p)$, alors $n+1 = p+1$, donc $n = p$ et donc f est injective.
   En revanche, 0 n'a pas d'antécédent (ce serait -1 et $-1 \notin \mathbb{N}$) : par conséquent, f n'est pas surjective.
3. On observe que $g(0) = 0$ et $g(1) = 0$, avec $0 \neq 1$. g n'est donc par injective.
   Soit $y \in \mathbb{N}$. On cherche $x \in \mathbb{N}$ tel que $g(x) = y$.
   Or si on prend $x = y+1$, alors $x \in \mathbb{N}$ et on a $x > 0$. Ainsi $g(x) = x-1 = y+1-1 = y$. Donc, x est un antécédent de y.
   Conclusion : g est surjective.

Exercice 5 (Equation avec paramètre) Soit un nombre $m \neq 0$. Le but de l'exercice est de déterminer en fonction du paramètre m les solutions de l'inéquation (I) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$(m+1)x^2 - \frac{x}{m} + 1 \geq m \qquad (I)$$

Pour cela, on se propose d'étudier l'équation (E) :

$$(m+1)x^2 - \frac{x}{m} - (m-1) = 0 \qquad (E)$$

1. Cas particulier : Résoudre (E) dans le cas où $m = -1$.
2. Résolution de (E) : On suppose à partir de maintenant que $m \neq -1$.
   (a) Calculer le discriminant de (E) en fonction de m et le factoriser complètement
   (Indication : pour factoriser le numérateur, on pourra reconnaitre une identité remarquable après avoir factorisé par 4).
   (b) Déterminer en fonction de m l'ensemble des solutions de l'équation (E). On simplifiera les résultats le plus possible.
3. Résolution de (I) :
   (a) Soient $x_1 = \dfrac{1-m}{m}$ et $x_2 = \dfrac{m}{m+1}$.
   Déterminer en fonction du réel m (avec $m \neq 0$ et $m \neq -1$) le signe de :
   $$x_1 - x_1$$
   (on n'hésitera pas à faire un tableau de signe...)
   (b) En déduire en fonction de m l'ensemble des solutions de (I).

---

1. Si $m = -1$, (E) devient une équation du premier degré :
   $$(E) : x + 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\text{x=-2}}$$
2. (a) On obtient $\Delta = \dfrac{1}{m^2} + 4(m+1)(m-1) = \dfrac{4m^4 - 4m^2 + 1}{m^2}$
   On repère une identité remarquable au numérateur :
   $$\Delta = \frac{4(m^2 - \frac{1}{2})^2}{m^2}$$
   et finalement :
   $$\boxed{\Delta = \frac{4(m - \frac{1}{\sqrt{2}})^2(m + \frac{1}{\sqrt{2}})^2}{m^2}}$$
   (b) D'après le calcul précédent, on a $\Delta \geq 0$ quel que soit m, avec $\sqrt{\Delta} = \dfrac{2m^2-1}{m}$ ou $-\dfrac{2m^2-1}{m}$.
   Dans tous les cas, on obtient deux racines, confondues lorsque $m = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $m = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$:
   $$x = \frac{\frac{1}{m} + \frac{2m^2-1}{m}}{2(m+1)} = \frac{m}{m+1} \text{ ou } x = \frac{\frac{1}{m} - \frac{2m^2-1}{m}}{2(m+1)} = \frac{1-m}{m}$$
   $$\boxed{(E) \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{m}{m+1}, \frac{1-m}{m}\right\}}$$

3. (a) On met sur le même dénominateur, et il vient, en notant $A(m) = x_1 - x_2$:

$$A(m) = \frac{m-1}{m} + \frac{m}{m+1} = \frac{2m^2-1}{m(m+1)}$$

Le tableau de signe donne alors que :

$\boxed{A(m) \geq 0 \text{ pour } m \in]-\infty, -1[\cup \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right[\cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[,}$

et $\boxed{A(m) \leq 0 \text{ pour } m \in \left]-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]}$

(b) Remarquons d'abord que

$$(I) \Leftrightarrow (m+1)x^2 - \frac{x}{m} - (m-1) \geq 0$$

L'ensemble des solutions dépend donc des racines du polynôme étudié précédemment. On sait qu'il va être du signe de $m+1$ à l'extérieur des racines : reste à repérer ce qu'est "l'extérieur des racines"... et combiner ça avec le signe de $m+1$!

Il y a 4 cas à distinguer.

1er cas : Si $m = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

C'est le cas de racine double : le polynome étudié avec (E) est du signe de $m+1$ qui est alors positif, donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \mathbb{R}.}$

2eme cas : Si $m < -1$:

D'après l'étude effectuée précédemment, on a $\frac{m-1}{m} + \frac{m}{m+1} > 0$, donc $\frac{m}{m+1} > \frac{1-m}{m}$ et comme $m+1 < 0$, c'est la partie "entre les racines" qui nous intéresse, d'où :

$$\boxed{S = \left[\frac{1-m}{m}, \frac{m}{m+1}\right]}$$

3eme cas : si $m \in \left]-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

Alors $m+1 > 0$ et $\frac{m}{m+1} > \frac{1-m}{m}$ et l'ensemble solution est

$$\boxed{S = \left]-\infty, \frac{1-m}{m}\right] \cup \left[\frac{m}{m+1}, +\infty\right[}$$

4eme cas : Si $m \in \left]-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$

Alors $m+1 > 0$ et $\frac{m}{m+1} < \frac{1-m}{m}$. L'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{S = \left]-\infty, \frac{m}{m+1}\right] \cup \left[\frac{1-m}{m}, +\infty\right[}$$

NOTA BENE : Ce genre de dernière question assez compliquée et longue est typique des fins de sujet. Il est normal d'être en difficulté dessus en début d'année.