Attention :

- Justifiez tous vos résultats, commentez les applications numériques si cela vous semble pertinent.
- Tout résultat non justifié sera systématiquement considéré comme faux.
- Soignez la présentation : faites de belles figures, encadrez les résultats, aérez votre copie.
- Les résultats non homogènes seront sanctionnés.

QUESTIONS DE COURS

Q1 1. Énoncer les lois de Snell-Descartes.

Q2 2. Retrouver l'expression de l'angle limite de réflexion totale à l'interface entre deux milieux d'indices n_1 et n_2.

3. Donner la definition d'un :

Q3 (a) système optique centré

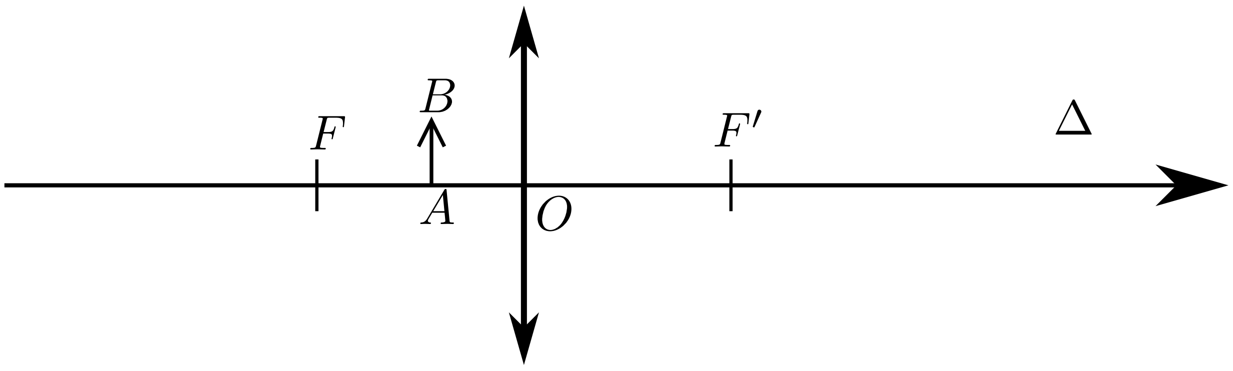
Q4 (b) système optique stigmatique

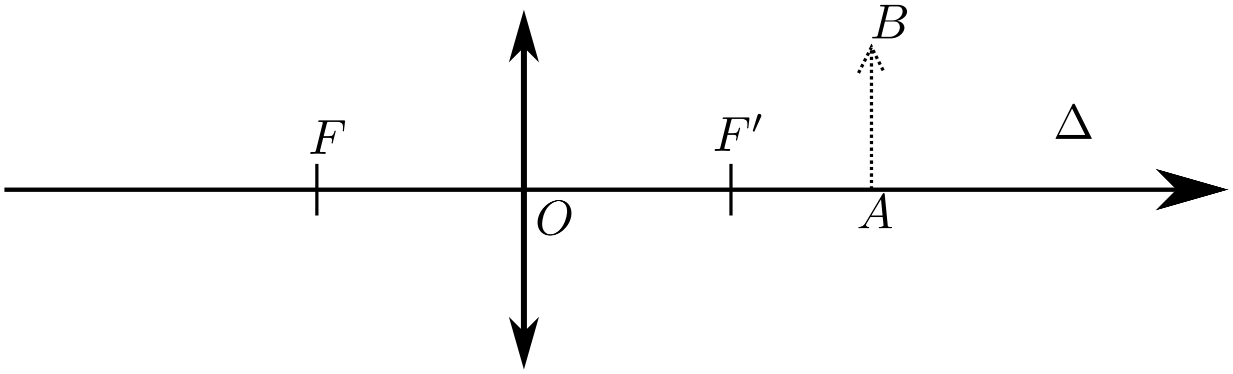
Q5 (c) foyer principal objet

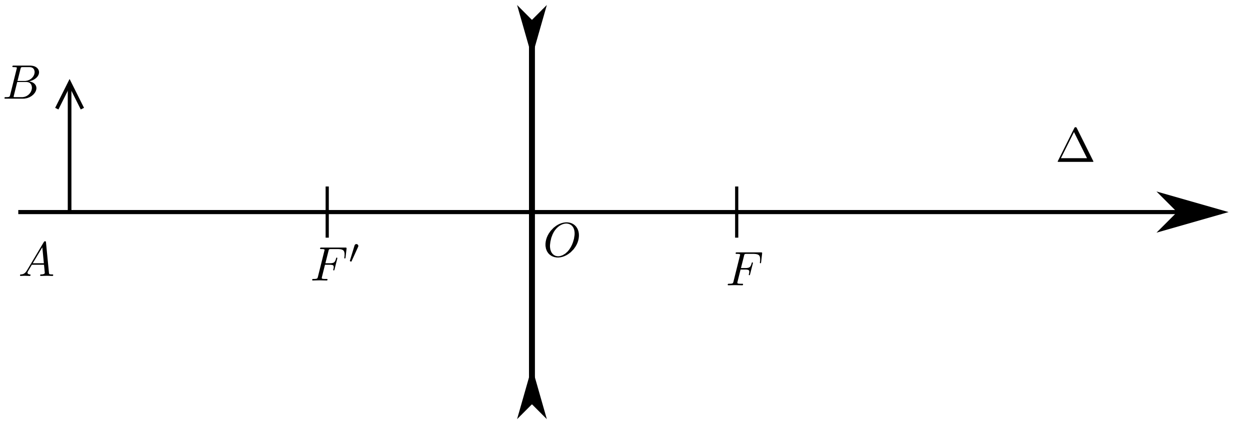
Q6 (d) foyer principal image

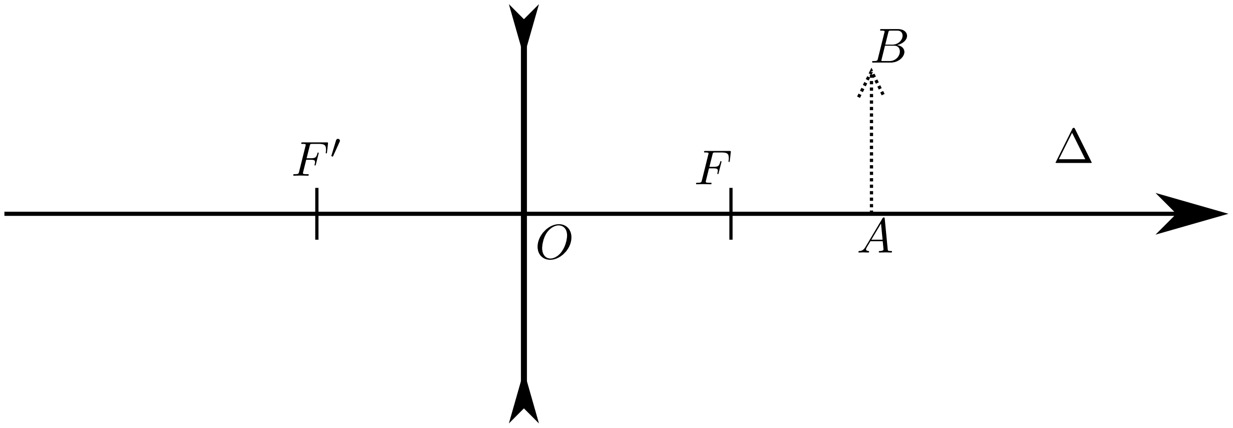
Q7 4. Compléter le verso de la feuille en traçant l'image de chaque objet AB. Vous rendrez cette feuille avec vos copies.

NOM :









Fibre Optique à saut d'indice

On s'intéresse à la propagation de la lumière dans une fibre optique dans le cadre de l'optique géométrique. Les applications numériques seront données avec 3 chiffres significatifs.
Une fibre optique à saut d'indice, représentée sur la figure 1 est formée d'un coeur cylindrique en verre d'axe (Ox), de diamètre $2a$ et d'indice n entouré d'une gaine optique d'indice n_1 légèrement inférieur à n. Les deux milieux sont supposés homogènes, isotropes et transparents.
Un rayon situé dans le plan (Oxy) entre dans la fibre au point O avec un angle d'incidence θ.
Les rayons lumineux sont supposés issus d'une radiation monochromatique de fréquence f.

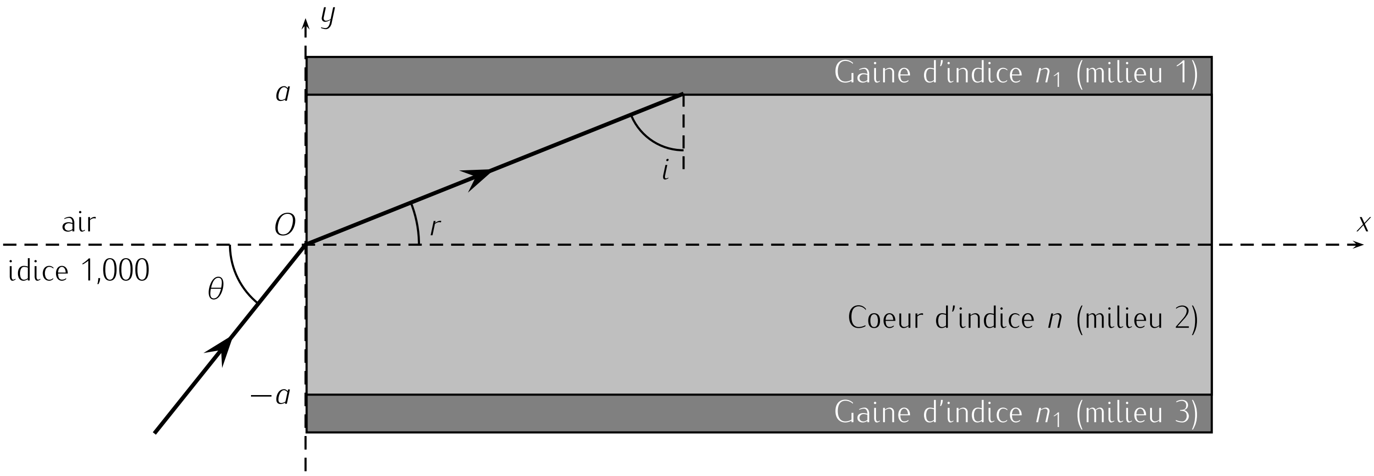


Figure 1 – Fibre optique en coupe

Q8 1. Définir les termes homogène, transparent et isotrope.

Q9 2. Les différents angles utiles sont représentés sur la figure 1. À quelle condition sur i, angle d'incidence à l'interface coeur/gaine, le rayon reste-t-il confiné à l'intérieur du coeur ? On note i_l l'angle d'incidence limite.

Q10 3. Montrer que la condition précédente est vérifiée si l'angle d'incidence θ est inférieur à un angle limite θ_l dont on exprimera le sinus en fonction de n et i_l.

Q11 En déduire l'expression de l'ouverture numérique $ON = \sin\theta_l$ de la fibre en fonction de n et n_1 uniquement.

Q12 4. Donner la valeur numérique de ON pour $n = 1{,}50$ et $n_1 = 1,47$.

On considère une fibre optique de longueur L. Le rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence θ variable compris entre 0 et θ_l. On note c la vitesse de la lumière dans le vide.

Q13 5. Pour quelle valeur de l'angle θ, le temps de parcours de la lumière dans la fibre est-il minimal ? maximal ?

Q14 Exprimer alors l'intervalle de temps δt entre le temps de parcours minimal et maximal en fonction de L, c, n et n_1.

Q15 6. On pose $2\Delta = \frac{n^2}{{n_1}^2} - 1$. On admet que pour les fibres optiques $\Delta \ll 1$ d'où $\Delta \simeq \frac{n}{n_1} - 1$.
Montrer dans ce cas que l'expression de δt peut se mettre sous la forme approchée $\delta t \simeq \frac{nL\Delta}{c}$.
On conservera cette expression de δt pour la suite du problème.

On injecte à l'entrée de la fibre une impulsion lumineuse d'une durée caractéristique $t_0 = t_2 - t_1$ formée par un faisceau de rayons ayant un angle d'incidence compris entre 0 et θ_l. La figure 2 ci-dessous représente l'allure de l'amplitude A du signal lumineux en fonction du temps t.

FIGURE 2 – Impulsion lumineuse

Q16 7. Reproduire la figure 2 en ajoutant à la suite l'allure du signal lumineux à la sortie de la fibre.
Q17 Quelle est la durée caractéristique t'_0 de l'impulsion lumineuse en sortie de fibre ?

Le codage binaire de l'information consiste à envoyer des impulsions lumineuses (appelées "bits") périodiquement avec une fréquence d'émission F.

8. En supposant t_0 négligeable devant δt, quelle condition portant sur la fréquence d'émission F
Q18 exprime le non-recouvrement des impulsions à la sortie de la fibre optique ?

Pour une fréquence F donnée, on définit la longueur maximale L_{max} de la fibre optique permettant d'éviter le phénomène de recouvrement des impulsions.
On appelle bande passante de la fibre le produit $B = L_{max}.F$.

Q19 9. Exprimer la bande passante B en fonction de c, n et Δ.

10. Calculer la valeur numérique de Δ et de la bande passante B (exprimée en MHz.km) avec les
Q20 valeurs de n et n_1 données dans la question 3.
Pour un débit d'information de $F = 100$ Mbits.s^{-1} $= 100$ MHz, quelle longueur maximale de
Q21 fibre optique peut-on utiliser pour transmettre le signal ?
Commenter la valeur de L_{max} obtenue.

OPTIQUE : L'ŒIL ET SES DÉFAUTS

L'œil humain a sensiblement la forme d'une sphère limitée par une membrane (la sclérotique) qui est transparente à l'avant de l'œil et forme la cornée (figure 1). L'intérieur du globe oculaire est divisé en deux parties séparées par le cristallin qui est une lentille convergente. Cette lentille est élastique et ses rayons de courbure varient lorsque l'œil accommode, c'est-à-dire quand il passe de la vision de loin à la vision de près. La partie antérieure entre la cornée et le cristallin est remplie d'un liquide appelé humeur aqueuse. L'iris permet à l'œil de diaphragmer et définit la pupille. La partie postérieure du cristallin est formée du corps vitré. La rétine qui sert de détecteur est tapissée de cellules de deux types différents : les cônes et les bâtonnets qui transforment l'excitation lumineuse en influx nerveux. La fovéa, partie de la rétine située sur l'axe optique de l'œil, est la partie la plus sensible de la rétine.
Les sous-parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

A. Modèle simplifié de l'œil pour la vision de loin

Pour simplifier l'étude de l'œil, on peut assimiler celui-ci à une lentille (L) plan-convexe d'indice n plongée dans l'air d'indice 1. La lentille (L) possède une face d'entrée plane et une face de sortie sphérique.
On se place dans le cas de la vision de loin quand l'œil n'accommode pas. Un rayon parallèle à l'axe optique, situé à la distance h de celui-ci, est issu d'un point objet A_∞ à l'infini sur l'axe optique (figure 2, page 5). Il pénètre par la face d'entrée plane de la lentille pour arriver au point I de la face concave où il se réfracte en passant du milieu, d'indice $n = 1{,}33$, à l'air, d'indice 1. Le rayon émergent intercepte l'axe optique au point image A_i.

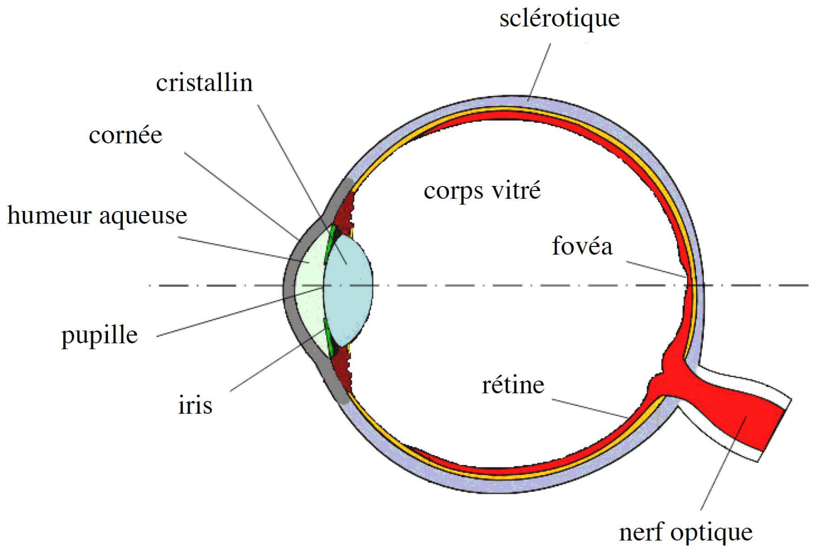


FIGURE 1 – Coupe de l'œil humain.

C est le centre de courbure de la face de sortie de la lentille et R_C son rayon de courbure (c'est-à-dire le rayon de la portion de sphère). On note i l'angle d'incidence et r l'angle réfracté par rapport à la normale CI. Dans un premier temps, les rayons ne seront pas considérés paraxiaux.

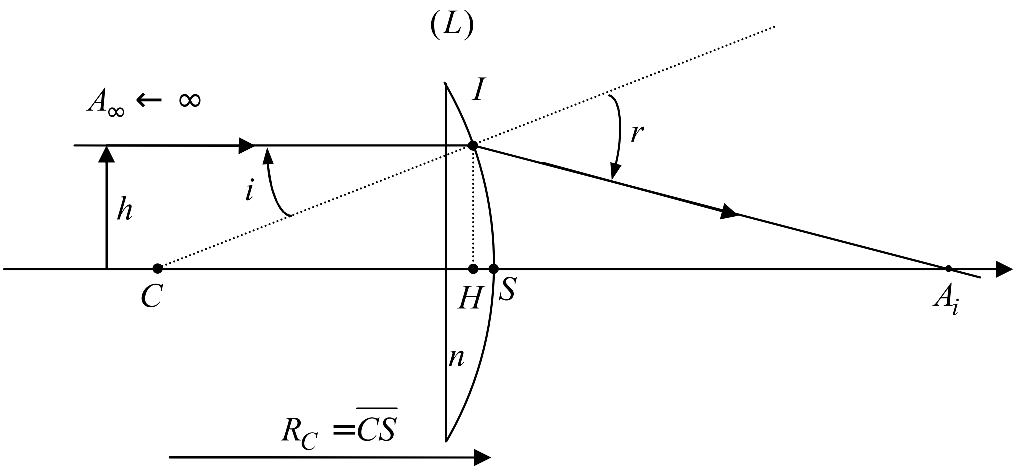


FIGURE 2 – Modèle simplifié de l'œil pour la vision de loin.

Q22 1. Exprimer la relation entre les angles i et r à l'aide de la loi de Snell-Descartes.

Q23 2. Soit H le projeté de I sur l'axe optique. Donner l'expression de $\overline{CH}$ en fonction de i et r, puis montrer que $\overline{HA_i} = \frac{R_C \sin i}{\tan(r-i)}$.

Q24 3. En déduire l'expression de la distance algébrique $\overline{CA_i}$ en fonction de i, r et R_C.

4. L'œil regarde un objet en plein soleil de sorte que sa pupille est fermée. Dans ce cas, $h = HI$ est très inférieur à R_C et les rayons lumineux peuvent être considérés comme étant paraxiaux.

Q25 (a) Montrer, dans ces conditions, que la position du point A_i ne dépend pas de i et donc de h (On pourra se référer au formulaire donner en fin de sujet).

Q26 (b) Dans ces conditions, H est confondu avec S (voir figure 2) et A_i est le foyer image F_i de la lentille. On appelle $f'_i = \overline{SF_i}$ sa distance focale image. Déterminer f'_i en fonction de n et R_C.

(c) La vergence de l'œil normal, quand il n'accommode pas, est $V = 60\ \delta$.
(Rappel[1] : δ correspond à l'unité dioptrie, qui est simplement l'unité du système international correspondant à $[V]$)

Q27 Calculer f_i' et R_C.

5. *Les questions suivantes, 5.a) à 5.e), sont un peu plus délicates. Vous pouvez éventuellement laisser de la place et y revenir à la fin.*
L'œil regarde toujours un objet à l'infini, mais cette fois-ci à la nuit tombante, de sorte que sa pupille est grande ouverte. Les rayons lumineux ne peuvent plus être considérés paraxiaux.

Q28 (a) Montrer que $\overline{CA_i}$ s'exprime en fonction de i, R_C et n par la relation :

$$\overline{CA_i} = \frac{nR_C}{n\cos i - \sqrt{1 - n^2\sin^2 i}} .$$

(b) On cherche à exprimer la position du point A_i en fonction de la hauteur h du rayon par rapport à l'axe optique. On considère pour cela que $\frac{h}{R_C} \ll 1$ de sorte que l'on peut faire les développements limités de $\cos i$ et $\sin i$ au second ordre.

Q29 Montrer[2] que $\overline{CA_i}$ peut être simplifié sous la forme

$$\overline{CA_i} \simeq \frac{nR_C}{n-1}\left(1 - \frac{nh^2}{2R_C^2}\right)$$

(c) En déduire en fonction de n, R_C et h, l'étalement relatif η du point de focalisation d'un rayon
Q30 issu de l'infini :

$$\eta = \left|\frac{\overline{CA_i}(h) - \overline{CA_i}(h \to 0)}{\overline{CA_i}(h \to 0)}\right| .$$

(d) Pour l'œil, on peut considérer que le diamètre maximal d'ouverture de la pupille est de l'ordre de grandeur du rayon de courbure R_C. L'approximation précédente est-elle toujours valable ?
Q31 Calculer $\overline{CA_i}$ puis η.

Q32 (e) Expliquer pourquoi la vision de loin est moins nette quand l'éclairement est faible, puis pourquoi on a le réflexe de plisser les yeux pour voir plus net au loin.

B. Modèle simplifié de l'œil pour la vision de près

Pour la vision de près, on peut assimiler l'œil à une lentille mince (L) biconvexe, convergente, plongée dans l'air d'indice 1. Tous les rayons lumineux seront considérés comme étant paraxiaux. S est le centre optique de la lentille, F_o son foyer principal objet, F_i son foyer principal image, V sa vergence et f_i' sa distance focale image. La rétine, centrée au point R, est située à une distance du cristallin anatomiquement invariable : la distance $SR = 16{,}7$ mm reste fixe quelle que soit l'accommodation.
L'œil normal (emmétrope) permet de voir des objets situés devant lui depuis la distance $d_{\min} = 25$ cm (distance minimale de vision distincte) jusqu'à la distance $d_{\max}$ infinie (distance maximale de vision distincte). Pour cela, l'œil accommode, c'est-à-dire que les rayons de courbure de la lentille biconvexe se modifient sous l'effet des muscles ciliaires.
On se place dans le cas de la vision de près quand l'œil accommode au maximum. Si l'image se forme sur la rétine au niveau de la fovéa, l'œil peut distinguer deux points proches suffisamment contrastés si leur distance angulaire est supérieure à $\epsilon = 4 \times 10^{-4}$ rad. Cette limite de résolution augmente fortement en vision périphérique.

1. Ce point n'était pas rappelé dans l'énoncé d'origine
2. Dans l'énoncé original, la question n'indiquait pas la réponse à trouver et était « Donner l'expression de $\overline{CA_i}$ en fonction de n, R_C et h. »

1. On note $p_0 = \overline{SA_0}$ la mesure algébrique repérant la position d'un objet lumineux A_0B_0 perpendiculaire à l'axe optique et dont l'image se forme sur la rétine. La position de l'image est repérée par la grandeur algébrique $p_i = \overline{SA_i}$.

   Q33 (a) Donner la relation entre p_0, p_i et la vergence V de la lentille (L). Quel nom porte cette relation ? Donner la dimension de la vergence V et son unité en fonction des unités de base du Système International.

   Q34 (b) Calculer la valeur $V_{\max}$ de V quand l'œil emmétrope regarde un objet situé à la distance minimal de vision distincte $d_{\min}$.

   Q35 (c) Calculer la valeur $V_{\min}$ de V dans le cas où ce même œil emmétrope regarde un objet placé cette fois à la distance maximale de vision distincte $d_{\max}$.

   Q36 (d) La variation de la vergence de l'œil $A = V_{\max} - V_{\min}$ est appelée l'amplitude d'accommodation. Calculer A dans le cas de l'œil emmétrope.

2. Avec l'âge, l'amplitude d'accommodation se réduit. Cette diminution physiologique porte le nom de presbytie. En pratique, un individu devient presbyte quand il doit éloigner son journal de plus de 35 cm de son œil pour lire. Dans ce cas, la distance minimale de vision distincte augmente ($d'_{\min} = 35$ cm) et $d'_{\max} = d_{\max}$ reste inchangé.

   Q37 (a) Déterminer l'amplitude d'accommodation de l'œil emmétrope d'un individu devenu presbyte.

   Q38 (b) Quelle est la taille A_0B_0 minimale des caractères du journal placé à $d'_{\min} = 35$ cm, que peut lire cet individu devenu presbyte ?

   Q39 (c) Quelle serait la taille A_0B_0 minimale des caractères si la presbytie de l'individu augmentait de telle façon qu'il doive placer le journal à 1 m de son œil ? Conclure.

3. Une personne voit nettement un point à l'infini sans accommoder mais ne peut voir un point situé à moins de 1 m en accommodant au maximum. Pour pouvoir lire confortablement un journal placé à 25 cm devant lui, il porte des lunettes dont chaque verre (assimilé à une lentille mince convergente (L_L) de vergence V_L et de centre optique S_L) est placé 2 cm devant le centre optique de l'œil (figure 3, page 7). Dans ces conditions, il n'accommode pas.

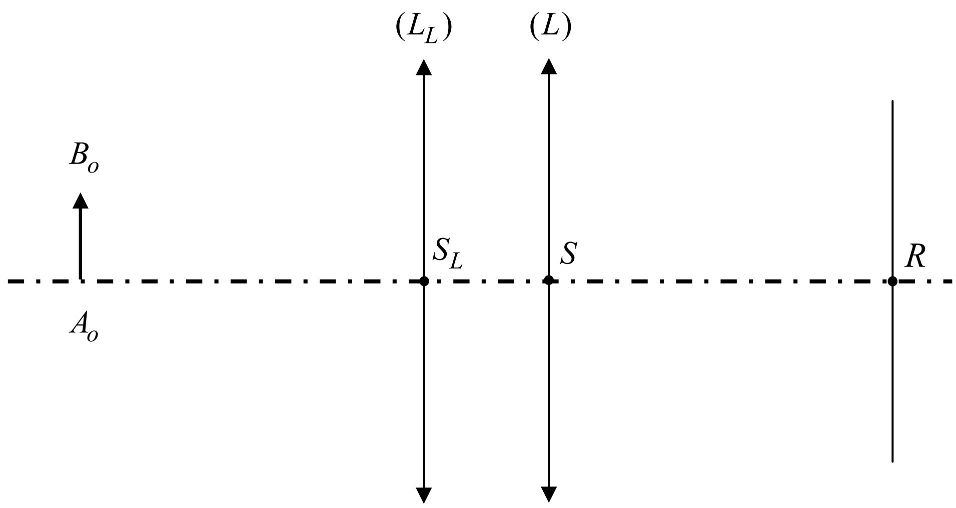


FIGURE 3 – lentille correctrice placée devant l'œil pour la vision de près.

   Q40 (a) Calculer la vergence V_L de chacun des verres de lunettes.

   Q41 (b) En reprenant le schéma de la figure 3, représenter deux rayons issus de B_0 qui atteignent la rétine. Les échelles peuvent ne pas être respectées, mais vous justifierez votre construction géométrique.

(c) En conservant ses lunettes, l'individu presbyte peut-il voir des objets situés à moins de 25 cm
Q42 de ses yeux ? Si oui, jusqu'à quelle distance de ses yeux ?

Q43 (d) L'individu presbyte peut-il regarder de loin avec ses lunettes ? En conclusion, quel type de lunettes doit-il porter pour pouvoir facilement passer de la vision de près à la vision de loin ?

FORMULAIRE

Une partie de ce sujet est issu d'un sujet de concours. Les formules suivantes **n**'y étaient **pas** rappelées.

Lentilles : Pour un objet AB orthogonal à l'axe optique avec A sur l'axe optique, on note $A'B'$ l'image par une lentille mince de centre O, de foyer objet F et image F' et de distance focale $f' = \overline{OF'}$. Les relations suivantes sont alors vérifiées :

- relations de conjugaison et formule du grandissement de Descartes (avec origine au sommet)

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

- relations de conjugaison et formule du grandissement de Newton (avec origines aux foyers)

$$\overline{FA}.\overline{F'A'} = \overline{FO}.\overline{F'O} = -f'^2 \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$$

Développements limités : Dans chacune des égalités suivantes, ϵ_i représente une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Le signe $\simeq$ indique que si x tend vers 0, on peut approximer l'expression à gauche du $\simeq$ par celle à droite du $\simeq$.

- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x) \simeq 1 - \dfrac{x^2}{2}$
- $\sin x = x + x^2\epsilon_2(x) \simeq x$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + x^2\epsilon_3(x) \simeq 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$
- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^2\epsilon_4(x) \simeq 1 + x + x^2$

Fibre optique à saut d'indice

Physique II – PC – Mines Ponts – 2011

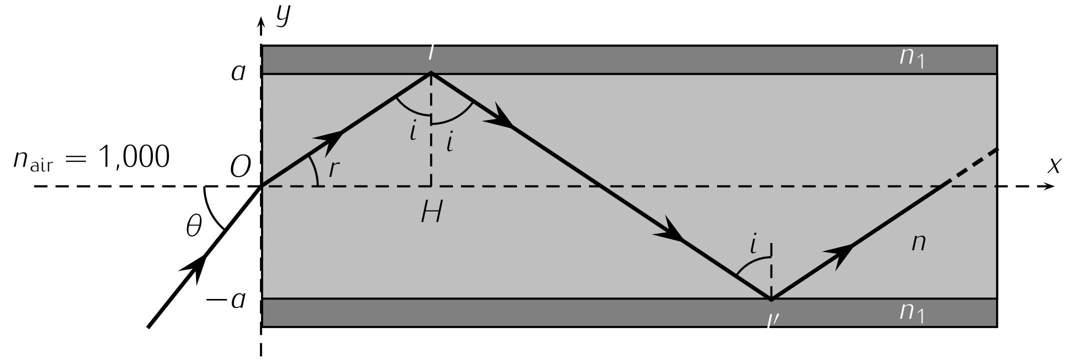


Figure 1 – Fibre optique en coupe

1. — Homogène : même propriété en tout point
Q8 — Transparent : laisse passer l'onde sans l'atténuer par absorption
   — Isotrope : les propriétés physiques ne dépendent pas de la direction de propagation de l'onde
2. Comme $n > n_1$, pour qu'il y ait réflexion totale en I puis I' ... il faut et il suffit que $i > i_l$ l'angle limite de réfraction. Pour $i = i_l$ il y aurait réfraction rasante dans le milieu d'indice n_1 soit d'après la loi de Snell Descartes, $n \sin i_l = n_1 \sin \frac{\pi}{2}$

Q9 La condition cherchée est donc $\boxed{i > i_l = \arcsin \dfrac{n_1}{n}}$

Questions vues en TD, vous devez prendre ces points

3. Dans le triangle (OIH) rectangle en H, on peut écrire $r + i + \frac{\pi}{2} = \pi$ soit $r = \frac{\pi}{2} - i$.
D'après la loi de Snell Descartes en O, $\sin\theta = n \sin r = n \sin(\frac{\pi}{2} - i) = n \cos i$.
La fonction cos est décroissante pour des angles compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ d'où $i > i_l \Rightarrow \cos i < \cos i_l$
Q10 et $\sin\theta = n\cos i \Rightarrow \boxed{\sin\theta < \sin\theta_l = n\cos i_l}$
On a vu que $\sin i_l = \frac{n_1}{n}$ or $\cos^2 i_l = 1 - \sin^2 i_l$ d'où une ouverture numérique

$$ON = \sin\theta_l = n.\sqrt{1 - \frac{{n^2}_1}{n^2}} \Rightarrow \boxed{ON = \sqrt{n^2 - {n^2}_1}}$$

Q11

Q12 4. L'application numérique donne $\boxed{ON = \sqrt{1{,}50^2 - 1{,}47^2} \simeq 0{,}298}$

Cherchez systématiquement à simplifier les expressions obtenues, les AN seront plus simples

5. La lumière reste dans le coeur de la fibre, milieu homogène et transparent d'indice n. Sa vitesse $v = \frac{c}{n} = \frac{d}{t}$ est donc partout la même d'où un temps de parcours t proportionnel à la distance d parcourue dans la fibre.
Le temps de parcours est minimal pour le trajet le plus court c'est à dire selon l'axe Ox, autrement dit pour $\boxed{\theta = 0}$.
Au contraire, le temps de parcours sera maximal si la distance $OI + II' + ... = \frac{OH}{\sin i} + \frac{2OH}{\sin i}$ est maximale
Q13 tout en gardant une réflexion totale sur les dioptres $n \to n_1$ c'est à dire pour $r = r_l \Rightarrow \boxed{\theta = \theta_l}$.

Prenez le temps de justifier, même rapidement, vos réponses

Le temps minimum de parcours (pour $\theta = 0$) est $t_{\min} = \frac{d_{\min}}{v} = \frac{L}{c/n} = \frac{nL}{c}$
Le temps maximum (pour $\theta = \theta_l$) est quant à lui

$$t_{\max} = \frac{d_{\max}}{v} = \frac{nd_{\max}}{c} \text{ avec } d_{\max} = OI + II' + ... = \frac{OH}{\sin i_l} + 2.\frac{OH}{\sin i_l} + ... = \frac{N.OH}{\sin i_l}$$

si le rayon coupe N fois l'axe Ox lors du parcours. On a par ailleurs

$$L = N.OH \Rightarrow N = \frac{L}{OH} \Rightarrow d_{\max} = \frac{L}{\sin i_l} = \frac{nL}{n_1} \Rightarrow t_{\max} = \frac{nd_{\max}}{c} = \frac{n^2L}{n_1c}$$

et finalement

Q14

$$\delta t = t_{\max} - t_{\min} = \frac{n^2L}{n_1c} - \frac{nL}{c} \Rightarrow \boxed{\delta t = \frac{nL}{c}\left[\frac{n}{n_1} - 1\right]}$$

Q15 6. En remplaçant $\Delta \simeq \frac{n}{n_1} - 1$ dans l'équation précédente, on obtient $\boxed{\delta t \simeq \frac{nL\Delta}{c}}$.

La suite des questions fait plus appel au bon sens qu'à des éléments du cours, tentez votre chance

7. L'impulsion lumineuse étant injectée avec un angle $0 < \theta < \theta_l$, certains rayons parviendront plus rapidement à l'autre extrémité de la fibre.
Cela se traduira par un $\boxed{\text{étalement temporel plus important en sortie}}$.

Q16

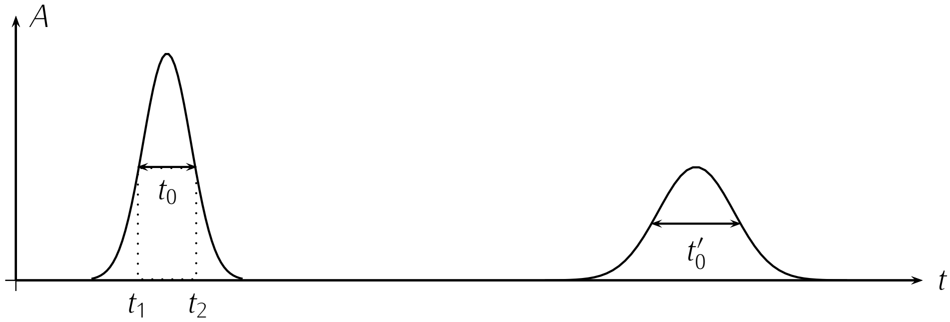


Figure 2 – Impulsion lumineuse

Q17 Les rayons sont décalés dans le temps de δt au maximum et on peut donc estimer $\boxed{t_0' = t_0 + \delta t}$.

8. En supposant $t_0 \ll \delta t$ on a $t_0' = t_0 + \delta t \simeq \delta t$.
Lors de l'émission, deux impulsions sont séparées d'une durée $T = \frac{1}{F}$ et à la sortie de la fibre on n'aura pas de recouvrement si l'étalement des impulsions est supérieur à T soit

Q18

$$t_0' \simeq \delta t > T \Rightarrow \frac{1}{F} > \delta t \Rightarrow \boxed{F < \frac{1}{\delta t} = \frac{c}{Ln\Delta}}$$

Homogène et cohérent

9. On peut interpréter la relation précédente en considérant qu'à F donnée, on n'a pas de recouvrement temps que $L < \frac{c}{Fn\Delta} = L_{\max}$ d'où $\boxed{B = F.L_{\max} = \frac{c}{n\Delta}}$. Q19

Q20 10. Applications numériques : $\boxed{\Delta = \frac{1}{2}\left[\frac{n^2}{{n_1}^2} - 1\right] \simeq 1{,}98.10^{-2}}$ et $\boxed{B = \frac{c}{n\Delta} \simeq 1{,}01.10^{10}\ \text{m.s}^{-1}}$

Q21 Pour $F = 100.10^6$ Hz, on calcule ensuite $\boxed{L_{\text{max}} = \frac{c}{Fn\Delta} \simeq 101\ \text{m.}}$

Cet ordre de grandeur montre que ce type de fibre peut être utilisée lorsque l'émetteur et le récepteur sont est $\boxed{\text{assez proches}}$ (entre deux bâtiments par exemple) mais pas au delà.

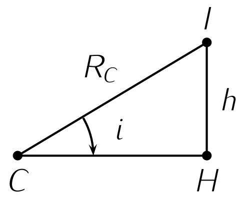
Optique : l'œil et ses défauts

D'après Concours CCP 2013

A. Modèle simplifié de l'œil pour la vision de loin

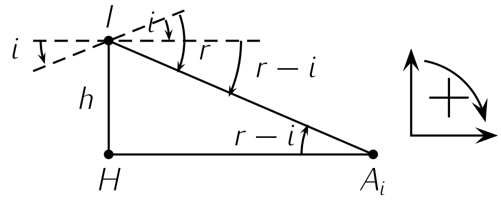
Q22 1. D'après la 2e loi de Snell-Descartes pour la réfraction, $\boxed{n \sin i = \sin r}$. En effet, on arrive sur le dioptre sphérique avec un angle d'incidence i dans le milieu d'indice n et on ressort avec un angle r dans de l'air. La modélisation est ici simpliste car il ne s'agit pas d'air dans le corps humain.

2. C'est une bonne idée de faire la partie du schéma qui est utile pour la question (et uniquement celle là pour ne pas se perdre avec des choses inutiles). D'après le schéma ci-contre, $CH = R_C \cos(i)$, algébriquement, $\overline{CH}$
$geq0$, R_C
$geq0$ et $\cos i$
$geq0$ (cosinus étant paire, peu importe le signe de i ici).



On en déduit la relation algébrique $\boxed{\overline{CH} = R_C \cos(i)}$.

De même, on peut déduire du schéma que $h = R_C \sin i$ (relation a priori non algébrique). L'énoncé ne définissait par d'orientation pour les angle ni pour les distances verticales. On peut donc choisir, pour travailler avec des angles positifs, de considérer l'orientation horaire pour les angles et du bas vers le haut pour les distance. Ainsi, la relation $h = R_C \sin i$ est maintenant une relation algébrique correcte.



Q23 De même, on peut exprimer d'après le schéma ci-dessus $\overline{HA_i}$ grâce à $\tan(r-i) = \frac{h}{\overline{HA_i}} \Rightarrow$ $\boxed{\overline{HA_i} = \dfrac{h}{\tan(r-i)} = \dfrac{R_C \sin i}{\tan(r-i)}}$.

Q24 3. D'après la relation de Chasles, $\overline{CA_i} = \overline{CH} + \overline{HA_i} = \boxed{R_C \left(\cos i + \dfrac{\sin i}{\tan(r-i)} \right)}$

4. Pour ces question, il faut garder en tête que $i \ll 1$, d'où $\sin i \simeq i$ et $\cos i \simeq 1$, $r \ll 1$ d'après la loi de S.-D., d'où $\tan(r-i) \simeq r - i$ (Développement limité à l'ordre 1).

Q25 (a) Dans ces conditions, $\overline{CA_i} = R_C \left(\cos i + \frac{\sin i}{\tan(r-i)} \right) \simeq R_C \left(1 + \frac{i}{r-i} \right)$. Pour simplifier plus, on utilise $ni = r$ (loi de S.-D. linéarisée), d'où $\overline{CA_i} = \simeq R_C \left(1 + \frac{i}{ni-i} \right) = \boxed{\simeq R_C \left(1 + \dfrac{1}{n-1} \right)}$.

Cette relation montre que ni i, ni h n'intervienne dans la position du point A_i lorsqu'ils sont suffisamment faible. On a donc stigmatisme approchée pour ce système lorsque l'on se place dans les conditions de Gauss.

Ce raisonnement était parfaitement analogue à celui qui a été présenté en TD pour introduire la notion de stigmatisme approché sur l'exemple du dioptre plan : il était donc tout à fait à votre portée.

(b) En utilisant la même simplification que précédemment, $\overline{HA_i} = \frac{R_C \sin i}{\tan(r-i)} \simeq \frac{R_C}{n-1}$. Or d'après

Q26 l'énoncé, $H = S$ dans ces conditions, d'où $\overline{SA_i} = \overline{SF_i} = \boxed{f'_i = \dfrac{R_C}{n-1}}$

(c) La vergence est l'inverse de la distance focale, d'où $\boxed{f'_i = 1/V = 17\,\text{mm}}$ (2 chiffres significatifs).

Q27 $\boxed{R_C = (n-1)f'_i = 5{,}5\,\text{mm}}$.

5. (a) $\overline{CA_i} = R_C\left(\cos i + \dfrac{\sin i}{\tan(r-i)}\right) = R_C\left(\cos i + \dfrac{\sin i}{\frac{\sin(r-i)}{\cos(r-i)}}\right) = R_C\left(\cos i + \dfrac{\sin i}{\frac{\sin(r)\cos(i)-\sin(i)\cos(r)}{\cos(r)\cos(i)+\sin(r)\sin(i)}}\right)$

Or $\sin(r) = n\sin(i)$ et $\cos(r) = \sqrt{1-\sin^2(r)} = \sqrt{1-n^2\sin^2(i)}$. On utilisera ces relations pour se « débarrasser » de r dans l'équation précédente, je garde néanmoins les $\cos r$ pour le moment pour alléger les notations.

$$\overline{CA_i} = R_C\left(\cos i + \frac{\sin i}{\frac{n\sin(i)\cos(i)-\sin(i)\cos(r)}{\cos(r)\cos(i)+\sin(r)\sin(i)}}\right) = R_C\left(\cos i + \frac{1}{\frac{n\cos(i)-\cos(r)}{\cos(r)\cos(i)+\sin(r)\sin(i)}}\right)$$

$$\overline{CA_i} = R_C\left(\frac{\cos(i)\left[n\cos(i)-\cos(r)\right]+\cos(r)\cos(i)+\sin(r)\sin(i)}{n\cos(i)-\cos(r)}\right) = R_C\left(\frac{n\cos^2(i)+n\sin^2(i)}{n\cos(i)-\cos(r)}\right)$$

Q28 D'où, grâce à $\cos^2+\sin^2=1$, on obtient la relation donnée par l'énoncé :
$\boxed{\overline{CA_i} = \dfrac{nR_C}{n\cos i - \sqrt{1-n^2\sin^2 i}}}$.

Il était ici possible grâce à cette formule de trouver f'_i qui était demandé 2 question avant en prennant la limite $i \to 0$.

(b) Notons $\varepsilon = \frac{h}{R_c} = \sin(i) \ll 1$

$$\overline{CA_i} = \frac{nR_C}{n\sqrt{1-\sin^2 i}-\sqrt{1-n^2\sin^2 i}} = \frac{nR_C}{n\sqrt{1-\varepsilon^2}-\sqrt{1-n^2\varepsilon^2}}$$

On utilise alors le développement limité de $\sqrt{1+x}$:

$$\overline{CA_i} \simeq \frac{nR_C}{n\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)-\left(1-\frac{1}{2}n^2\varepsilon^2\right)} = \frac{nR_C}{n-1+n(n-1)\frac{\varepsilon^2}{2}} = \frac{nR_C}{n-1}\times\frac{1}{1+n\frac{\varepsilon^2}{2}}$$

Il est fréquent de factoriser le dénominateur de la façon suivante : $\frac{1}{X_0+\varepsilon} = \frac{1}{X_0}\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{X_0}}$. On peut ainsi se ramener au développement limité de $\frac{1}{1+x}$.

Q29 On utilise alors le développement limité de $\frac{1}{1+x}$:

$$\overline{CA_i} \simeq \frac{nR_C}{n-1}\times\left(1-n\frac{\varepsilon^2}{2}\right) = \boxed{\frac{nR_C}{n-1}\left(1-\frac{nh^2}{2R_C^2}\right)}$$

Q30 (c) On obtient :

$$\eta = \left|\frac{\frac{nR_C}{n-1}\left(1-\frac{nh^2}{2R_C^2}\right)-\frac{nR_C}{n-1}}{\frac{nR_C}{n-1}}\right| = \boxed{\frac{nh^2}{2R_C^2}}$$

(Comme souvent, il vaut mieux ne pas développer pour que le résultat se simplifie le plus possible grâce au rapport.)

(d) Pour l'œil, on peut considérer que le diamètre maximal d'ouverture de la pupille est de l'ordre de grandeur du rayon de courbure R_C, c'est-à-dire $h \simeq \frac{R_C}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2}$. L'approximation précédente n'est donc plus valable.
On a toujours

$$\overline{CA_i} = \frac{nR_C}{n\sqrt{1-\sin^2 i} - \sqrt{1-n^2\sin^2 i}} = \frac{nR_C}{n\sqrt{1-\varepsilon^2} - \sqrt{1-n^2\varepsilon^2}}$$

D'où en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\boxed{\overline{CA_i} = 18\,\mathrm{mm}}$ et $\boxed{\eta = 0{,}19}$.

Q31 Les rayons provenant des bords de la rétine convergent donc 4,1 mm avant la rétine ($\overline{CA_i}(h) < \overline{CA_i}(h \to 0)$) ! L'image d'un point lumineux à l'infini sera donc a priori une tache de large dimension.

(e) Compte tenu de ce que nous venons de voir aux questions précédentes, l'étalement est d'autant plus large que la pupille est dilatée. Ainsi, l'image est « d'autant moins ponctuelle » que la pupille est dilatée. Or la pupille se dilate lorsque l'éclairement diminue, ainsi, lorsque l'éclairement est faible, l'image d'un point est une tache et il sera plus difficile de séparer

Q32 deux points proches que lorsque l'éclairement est plus élevé. La vision est donc moins nette.
Le réflexe de plisser les yeux a pour but d'éliminer les rayons marginaux, ceux qui convergent le plus loin, en fermant la pupille. Ainsi, la dimension de la tache associée à un point objet diminue et la netteté augmente.

B. Modèle simplifié de l'œil pour la vision de près

1. (a) La relation demandée est $\boxed{\text{la relation de conjugaison avec origine au sommet}}$: $\boxed{\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_0} = V}$.

Q33 Dimensionnellement, la vergence est donc $\boxed{\text{l'inverse d'une longueur}}$. L'unité est la dioptrie telle que $\boxed{\delta = \mathrm{m}^{-1}}$.

(b) On utilise la relation de conjugaison pour un objet situé à $d_{\min}$, on a alors $p_0 = -d_{\min}$ et puisque l'œil parvient à accommoder, l'image se forme sur la rétine : $p_i = SR$. On en déduit

Q34 $V_{\max} = \boxed{\frac{1}{SR} + \frac{1}{d_{\min}} = 64\,\delta}$.

> ***Expliquez les valeurs que vous prenez pour la relation de conjugaison. Faites particulièrement aux signes !*** $p_0 = -d_{\boldsymbol{min}} \leq 0$

Q35 (c) $V_{\min}$ est obtenu pour $p_0 = -\infty$, soit $V_{\min} = \boxed{\frac{1}{SR} = 59{,}9\,\delta}$ ce qui est parfaitement cohérent avec la valeur donnée plus tôt dans l'énoncé ($60\,\delta$).

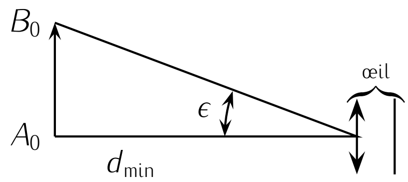
Q36 (d) La variation de la vergence de l'œil vaut $A = V_{\max} - V_{\min} = \boxed{\frac{1}{d_{\min}} = 4{,}0\,\delta}$.

Remarque : on peut ici mettre 2 chiffres significatifs lorsque l'on fait l'application numérique après simplification de l'expression littérale. En effet, $d_{\min}$ est donné avec deux chiffres significatifs. Par contre, si on fait directement la différence des valeurs numériques précédemment, trouvées, on doit se limiter à un chiffre significatif compte tenu de la soustraction entre deux valeurs proches. On voit ici un des intérêts de garder des expressions littérales.

2. (a) On voit ici le deuxième intérêt des expressions littérales : aucun calcul n'est nécessaire ! On

Q37 reprend simplement la formule précédente avec la nouvelle valeur de $d_{\min}$, ce qui donne : $\boxed{A' = \frac{1}{d'_{\min}} = 2{,}9\,\delta}$.

(b) Un schéma est <u>nécessaire</u>.



L'œil réalisant l'accommodation, il suffit de considérer les rayons passant par le centre optique, ce qui explique que l'on donne la résolution en terme d'angle.

Pour voir les caractères le plus gros possible (angle), la personne a intérêt à placer le journal le plus près d'elle possible, c'est-à-dire à $d_{\min}$. Ensuite, la taille minimale acceptable pour du texte est liée à la résolution de l'œil (angle minimum entre deux objets discernables, lié à la distance entre deux cellules photosensibles sur la rétine).

On voit sur le schéma que la taille minimale vérifie la relation $\tan\epsilon \simeq \epsilon = \frac{A_0B_0}{d'_{\min}}$.

Q38 Ainsi, $\boxed{A_0B_0 = d'_{\min}\tan\epsilon(\simeq d'_{\min}\epsilon) = 0{,}14\,\text{mm}}$. (À strictement parler, il faudrait mettre un chiffre significatif à cause de ϵ, le deuxième est présenté ici car un arrondi reviendrait à sous-estimer assez fortement le résultat.)

> ***Certains ont fait le schéma au brouillon mais pas sur leur copie ! Il <u>faut</u> faire le schéma sur la copie car c'est lui qui montre que vous avez compris et qui explique votre raisonnement.***

Ainsi, il faut que le niveau de détail des caractères (écart entre les caractères, taille des caractères, écart entre deux branches d'un "m" par exemple) soit supérieur à 0,14 mm. Cela ne devrait pas poser de problème.

Q39 (c) De même qu'à la question précédente : $\boxed{A_0B_0 = d'_{\min}\tan\epsilon = 0{,}4\,\text{mm}}$.

Ici le niveau de détail d'un texte écrit un peu petit peut commencer à poser problème (par exemple, l'écart entre les caractères imprimés sur certains de nos corrigés est de cet ordre de grandeur), il se peut donc que cette personne éprouve des difficultés à lire son journal.

3. (a) Puisque dans ces conditions il n'accommode pas, c'est que l'image par le verre de lunette est à l'infini. $A_0 \xrightarrow{\mathcal{L}_L} A_\infty$. On en déduit, par définition du foyer objet, que A_0 est positionné au niveau du foyer objet de la lunette. D'où $\boxed{V_L = \frac{1}{S_LA_0}}$.

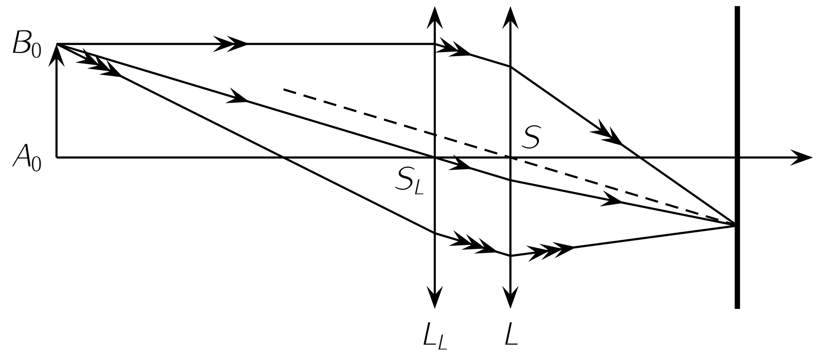
Q40 Il y a ici une légère ambigüité dans l'énoncé, les 25 cm représentent-ils la distance SA_0 ou la distance S_LA_0 ? Il convient de lever l'ambigüité en explicitant le choix que vous avez fait.

Cas 1 : $SA_0 = 25\,\text{cm}$, donc $S_LA_0 = 23\,\text{cm}$ d'où $\boxed{V_L = 4{,}3\,\delta}$ (compte tenu de la suite de l'énoncé où l'on nous parle de la distance aux yeux, je pense que c'est cette interprétation qui est celle attendue).

Cas 2 : $S_LA_0 = 25\,\text{cm}$, donc $\boxed{V_L = 4{,}0\,\delta}$

(b) Pour la construction géométrique, il faut que A_0 soit placé au niveau du foyer de la lunette, ainsi les rayons issus de B_0 ressortent parallèles entre eux après passage par la lunette.En effet, l'énoncé nous dit que l'œil n'accommode pas, c'est-à-dire que l'objet est vu par l'œil (rétine + cristalin) comme étant à l'infini. On utilise donc le rayon passant par le centre optique. L'autre rayon provenant de B ressortira donc parallèle à celui-ci.

Q41 La rétine est ensuite positionné au niveau du foyer du cristallin puisque l'œil n'accommode pas. Il suffit de tracer la parallèle aux rayons émergent de L_L passant par le centre de L pour trouver la position de l'image (intersection entre cette parallèle et la rétine). Ensuite, les rayons convergent tous vers ce point.



(c) Oui, il peut voir des objets situés à moins de 25 cm de ses yeux, en effet, des objets un peu plus proches donneront via la lunette une image virtuelle située en arrière par rapport à la
Q42 personne.

$$A \xrightarrow{L_L} A_1 \xrightarrow{L} \ldots R$$

Les points visibles sont tels que $-\infty \leq \overline{SA_1} \leq -d_{\min}$ (écarté des yeux d'au moins $d_{\min}$ et vers la gauche).

On en déduit que $\overline{S_LA_1} = \overline{S_LS} + \overline{SA_1}$, d'où par utilisation de la relation de conjugaison de la lentille L_L : $\dfrac{1}{\overline{S_LA_1}} - \dfrac{1}{\overline{S_LA_0}} = V_L$. Soit $\overline{S_LA_0} = \dfrac{1}{-V_L + \frac{1}{\overline{S_LA_1}}}$ et donc $\overline{SA_0} = \overline{SS_L} + \dfrac{\overline{S_LS} + \overline{SA_1}}{1 - V_L(\overline{S_LS} + \overline{SA_1})}$. En traçant la courbe, on peut voir qu'elle est monotone sur l'intervalle des valeurs donnant une image nette pour l'œil ($-\infty \leq \overline{SA_1} \leq -d_{\min}$) et que la valeur la plus grande (donc la plus petite en valeur absolue) est atteinte pour $\overline{SA_1} = -d_{\min}$ et donne $\boxed{\overline{SA_0} = -21\,\text{cm}}$ (en prenant $V_L = 4{,}3\,\delta$).

(d) Non, il n'est pas possible de regarder au loin avec ses lunettes. En effet, l'image par la lunette d'un objet situé à une distance supérieure à 25 cm sera réelle, et située donc à droite de la lunette. Ainsi, du point de vue du cristallin, on aura un objet tel que p_0
$geq - 2$ cm. Or le cristallin peut faire l'image nette seulement si l'objet est réel et à une distance telle que $p_0 \leq d_{\min}$. Il est donc impossible de voir à une distance supérieure à 25 cm
Q43 avec ces lunettes.

Pour regarder de loin, il doit donc porter des lunettes à double foyer ou des verres progressifs afin de pouvoir adapter sa vision de près et de loin (ou changer de lunette).