Algèbre - Chapitre 2 : Ensemble et applications
Feuille d'exercices

Exercice 1 :

Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Les notations suivantes ont-elles un sens ?

1. $a \in E$
2. $a \subset E$
3. $\{a\} \subset E$
4. $\emptyset \in E$
5. $\emptyset \subset E$
6. $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$
7. $\emptyset \subset \mathscr{P}(E)$.

Exercice 2 :

Soient A, B deux parties d'un ensemble E.
Exprimez $\mathbb{1}_{\bar{A}}$, $\mathbb{1}_{A\cap B}$, $\mathbb{1}_{A\setminus B}$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

Exercice 3 :

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.
Montrez les assertions suivantes :

1. $A \subset B \Longleftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
2. $\bar{A} \setminus \bar{B} = B \setminus A$.
3. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$.
4. $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.

Exercice 4 :

Déterminer si les applications suivantes sont surjectives, injectives ou bijectives.

$$f_1 : \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & \to \mathbb{Z} \\ x & \mapsto 2x \end{array} \quad f_2 : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2x \end{array} \quad f_3 : \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2x \end{array} \quad g_1 : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{array}$$

$$g_2 : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto x^2 \end{array} \quad g_3 : \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+ & \to \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto x^2 \end{array} \quad g_4 : \begin{array}{ll} \mathbb{Q}_+ & \to \mathbb{Q}_+ \\ x & \mapsto x^2 \end{array} \quad h : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x|x| \end{array}$$

Exercice 5 :

Soient les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f(k) = 2k \text{ et } g(k) = \begin{cases} k/2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ (k-1)/2 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g.
2. Etudier les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ en précisant leur injectivité, surjectivité et bijectivité.

Exercice 6 :

Déterminez les images directes ou réciproques suivantes :

1. $\exp(\mathbb{R})$
2. $\ln(]0, 1])$
3. $f([1, 2])$ avec $f(x) = 2x - 1$
4. $f([-1, 1])$ avec $f(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$
5. $f^{-1}([2, 4])$ avec $f(x) = x^2$
6. $f^{-1}(\{2\})$ avec $f(x) = x^2 - 2x - 1$
7. $f^{-1}([0, \sqrt{2}])$ avec $f(x) = 2\cos(x)$.

Exercice 7 :

Soit $f : E \to F$ une application. Soient A et B deux parties de E.

1. Montrez que :
   (i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
   (ii) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et donnez un exemple où $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
2. Déterminez, si des relations existent, des résultats analogues pour l'image réciproque.

Exercice 8 :

1. Montrez que l'application $x \mapsto e^x + x$ est injective.
2. Résoudre le système d'équation

$$\begin{cases} x + e^x & = y + e^y \\ x^2 + xy + y^2 & = 27 \end{cases}$$

Exercice 9 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$.

1. Déterminez D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Déterminez $f(D_f)$.
3. Montrez que f est une application bijective de D_f dans $f(D_f)$ et précisez f^{-1}.
4. Qu'attendre de $f \circ f$? Le vérifier.

Exercice 10 :

Soient E, F et G trois ensembles et soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Montrez que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
2. Montrez que si f et g sont injective, alors $g \circ f$ est injective.
3. Montrez que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
4. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.