Algèbre - Chapitre 2

Ensembles et applications

I Ensembles

1) Ensembles et sous ensembles

a) Définition et notations

Définition :
On appelle **ensemble** tout objet mathématique contenant des éléments. On note $x \in E$ pour dire que l'élément x **appartient** à E.

Exemple :
Pour décrire un ensemble, on utilisera plusieurs types de notation :

- $E = \{2, 3, 4, 5, 6\}$: les accolades "{ }" signifient "ensemble constitué de..." ou "ensemble des...".

  Ce même ensemble peut se noter :

  $$E = \{n \in \mathbb{N}; 2 \leq n \leq 6\}$$

  Ce qui signifie "E est l'ensemble des entiers n tels que $2 \leq n \leq 6$.

- $I = [0, 1]$: les intervalles sont bien sûr des ensembles. Les [ ] signifient "tous les réels entre....".

  En fait, on pourrait écrire $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 1\}$.

- $E = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ peut aussi se noter $E = [\![2, 6]\!]$. Les $[\![\ \ ]\!]$ désignent "les intervalles d'entiers".

- $\emptyset$ désigne le seul ensemble qui n'a pas d'élément : c'est "l'ensemble vide".

b) Sous ensemble

Définition :
On dit qu'un ensemble A est un **sous ensemble de** E (ou **partie de** E) si et seulement si tout élement de A est un élement de E.
On note alors $A \subset E$.

Exemples :
- $\mathbb{N}$ est un sous ensemble de $\mathbb{Z}$.
- On a une sorte de chaîne d'inclusions :

  $$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

- $\emptyset$ est le seul ensemble inclus dans tous les ensembles !

Méthode : **MONTRER UNE INCLUSION**

Pour montrer qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B, on utilise le fait que dire $A \subset B$ signifie en fait exactement "si on est dans A, alors on est dans B".
On procédera donc de la façon suivante :

- On prend un élément quelconque $x \in A$ (en disant "soit $x \in A$"),
- On montre que $x \in B$.
- On conclut "donc $A \subset B$."

Exemple :
Soit A l'ensemble des multiples de 4 et B l'ensemble des multiples de 2. Montrons que $A \subset B$.

Theorème 1 : théorème de la double inclusion

Soient E et F deux ensembles. Alors $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Cela fournit une méthode de démonstration : pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux, on pourra montrer d'abord $E \subset F$, puis $F \subset E$.

c) Ensemble des parties d'un ensemble :

Définition :

Soit E un ensemble.
On appelle **ensemble des parties de** E, que l'on note $\mathscr{P}(E)$, l'ensemble des sous ensembles de E.

Exemple :

- Soit $E = \{1, 2, 3\}$ l'ensemble des parties de E est
- Comme $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, c'est à dire que $\mathbb{N}$ est un sous ensemble de $\mathbb{Z}$, on peut écrire $\mathbb{N} \in \mathscr{P}(\mathbb{Z})$.
- Pour tout ensemble E, on a $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$ et $E \in \mathscr{P}(E)$.

Au secours ! **C'EST SUPER GRAND $\mathscr{P}(E)$ NON ?**

Si un ensemble E a n éléments, on peut montrer que $\mathscr{P}(E)$ en a 2^n...
Très rapidement, on abandonnera donc l'idée de faire la liste des parties d'un ensemble....

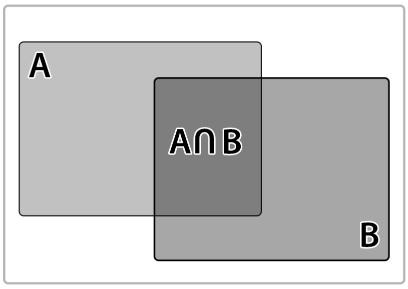
2) Intersection, réunion

a) Intersection :

Définition :

Soient A et B deux parties de E. On définit l'ensemble $A \underbrace{\cap}_{\text{“inter”}} B$ par :

$$A \cap B = \{x \in E ; x \in A \text{ et } x \in B\}$$



Ce sont les éléments qui sont <u>à la fois</u> dans A et dans B.
On généralise à n ensembles de la façon suivante :
si A_1, A_2, $\dots A_n$ sont n ensembles, on note

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

C'est l'ensemble des éléments de E qui sont simultanément dans tous les A_i.
Cette notation peut enfin se généraliser avec des ensembles d'indices divers :

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i, \qquad \bigcap_{x \geq 0} A_x \qquad , etc.$$

Exemples :

- $[0;3] \cap [2;4] =$
- $]0;4[\cap]-2;-1[= \emptyset$: on dit que $]0,4[$ et $]-2,-1[$ sont “disjoints”.

Propriété 1 :

(i) L'intersection est commutative et associative :

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(ii) L'intersection de deux ensembles est “plus petite” :

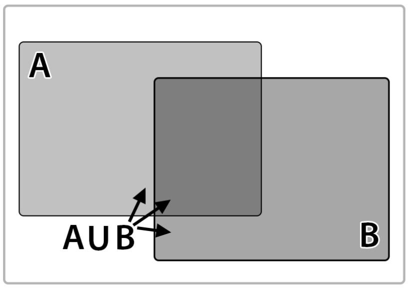
$$A \cap B \subset A \quad \text{et } A \cap B \subset B$$

b) Union

Définition :

Soient A et B deux parties de E. On définit l'ensemble $A \underbrace{\cup}_{\text{“union”}} B$ par :

$$A \cup B = \{x \in E ; x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



Ce sont les éléments qui sont dans A ou dans B (ou dans les deux).
On généralise à n ensembles de la façon suivante :
si A_1, A_2, $\dots A_n$ sont n ensembles, on note

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

l'ensemble des éléments de E qui dans au moins un des A_i.

Exemple :
La fonction f définie par $f(x) = (x-2)(x-3)$ est positive sur

Propriété 2 :
Soit A, B, C trois ensembles
(i) $A \cup B = B \cup A$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
(ii) $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ (la réunion est “plus grande”)
(iii) Si $A \subset C$ et $B \subset C$ alors $A \cup B \subset C$

▷ *Preuve* :

◁

c) Distributivité

Propriété 3 :
Soient A, B et C trois ensembles. Alors
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

▷ *Preuve* : Montrons la deuxième formule.
On fait un tableau avec tous les cas possibles :

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in (B \cup C)$	$x \in A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B)$	$(A \cap C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

en comparant les colonnes concernées, on a bien $x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
On fait de même pour la première.... ◁

d) Recouvrement et partition

Définition :
Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E (l’ensemble I peut être fini ou non).
On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un **recouvrement** de E si $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = E$
Si les A_i sont deux à deux disjoints, c’est à dire si, quand $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, on dit qu’on a un **recouvrement disjoint** de E.
Enfin, si on a un recouvrement disjoint et qu’aucun des ensembles A_i est vide, on parle de **partition** de E.

Exemples :
- $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ constituent un recouvrement de $\mathbb{R}$. Ce n’est pas une partition car ils ont 0 en commun.
- L’ensemble des nombres pairs et l’ensemble des nombres impairs est une partition de l’ensemble des entiers.

- Quand on étudie des fonctions périodiques de période T, il est fréquent d'étudier la fonction sur un intervalle de la forme $[0, T]$.
  On dit souvent qu'on prolonge l'étude par "périodicité", en répétant ce qu'on a fait sur une période à $\mathbb{R}$ tout entier.
  Ce qu'on utilise en réalité, c'est que les intervalles $A_i = [i \times T, (i+1) \times T]$ forment un recouvrement de $\mathbb{R}$.
  Si on veut en faire une partition, il faut
  Par exemple avec $A_i =$

3) Opération sur les ensembles

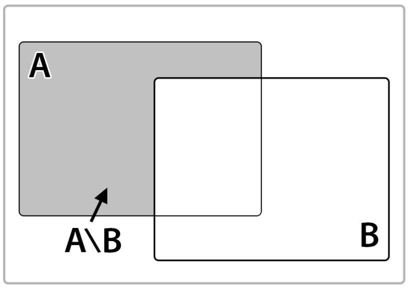
a) Complémentaire, différence

Définition :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.
On définit l'ensemble $A \setminus B$ par

$$A \setminus B = \{x \in A \text{ t.q. } x \notin B\}$$

La barre oblique se lit "privé de" et on dit qu'on effectué de la différence de A par B.

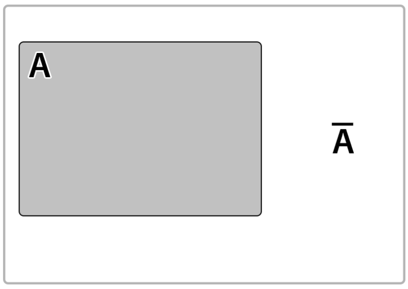


Exemple :
si on veut parler de nombres réels non nuls, on peut écrire $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, que l'on note le plus souvent $\mathbb{R}^*$.

Définition :

Soit E un ensemble et A une partie de E. On définit le complémentaire de A dans E (ou simplement le complémentaire de A si il n'y a pas d'ambiguïté), noté $E \setminus A$, $\overline{A}$ ou A^c par

$$\overline{A} = \{x \in E ; x \notin A\}$$



Exemple :
- dans $\mathbb{R}$, $\overline{[0, +\infty[} =]-\infty, 0[$.
- dans $\mathbb{R}$, $\overline{[0; 1]} =$
- dans $E = [\![0, 5]\!]$, avec $A = \{0, 2, 4\}$ on a $\bar{A} =$

b) Complémentaire, union et intersection

Proposition 1 : Lois de Morgan

Soients A et B deux ensembles, alors

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \text{ et } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

▷ *Preuve* : Même preuve que dans le chapitre 1 ◁

c) Produit cartésien

Définition :

Soit E et F deux ensembles. On note $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. Autrement dit :

$$E \times F = \{(x, y); x \in E, y \in F\}$$

On dit alors que $E \times F$ est le **produit cartésien** de E par F.
Un élément de $E \times F$ est appelé **couple** de $E \times F$

Exemples :

- $\{0, 1\} \times \{1, 2\} = \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}$
- On peut représenter un produit cartésien sous forme de tableau à double entrée.
  Par exemple $\{0, 1\} \times \{1, 2, 4\}$ peut se voir sous la forme :

Généralisation :
On peut faire le produit cartésien de plus que deux ensembles : $E \times F \times G$ sera par exemple l'ensemble des triplets (x, y, z) avec $x \in E$, $x \in F$, $x \in G$.
Si on a p ensembles reliés par des produits cartésiens, les éléments sont appelés des **p-uplets** ou des **p-listes**.

Notation

On note $E^2 = E \times E$ l'ensemble des couples de E, et pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note

$$E^p = \underbrace{E \times E \times ... \times E}_{p \text{ fois}}$$

l'ensemble des p-listes d'éléments de E.

A noter : **PARENTHÈSES OU ACCOLADES ?**

Pour les p listes et les produits cartésiens en général, l'ordre est important. On marque cet ordre en utilisant des parenthèses :
Le couple $(1, 2)$ est différent du couple $(2, 1)$.
En revanche, les accolades désignent l'ensemble des valeurs. Ainsi, $\{1, 2\}$ et $\{2, 1\}$ désigne le même ensemble...
A RETENIR : on utilise des parenthèses si l'ordre est important, des accolades si l'ordre est indifférent.

II Applications.

1) Généralités :

a) Définition et notation

Définition :

On dit que f est une **application** définie sur un ensemble E **à valeur** dans un ensemble F si à tout élément de E elle associe un unique élément de F.
On utilise la notation :

$$f: \begin{array}{ll} E & \to F \\ x & \mapsto f(x) \end{array}$$

Notation

On note F^E ou $\mathscr{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F.

Vocabulaire :

- $f(x)$ est appelé **image de** x **par** f.
- Soit $y \in F$. Si il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$, on dit que x est un **antécédent** de y par l'application f.

Remarques :

- Un élément de F peut avoir aucun, un ou plusieurs antécédents. En revanche, un élément de E a TOUJOURS une et une seule image.
- Cela ressemble fortement à une fonction... et pour cause : on confond souvent les deux termes ! Les différences sont subtiles (et hors programme), mais on utilisera le plus fréquemment le terme "fonction" quand on aura à faire à des applications définies sur un ensemble de réel et dont les images sont des nombres réels, et "applications" quand on travaille sur des autres ensembles.

b) Exemples :

- L'application qui "ne fait rien" est appelée **identité**. Ainsi, l'identité de E, notée Id_E est l'application :

$$\mathrm{Id}_E: \begin{array}{ll} E & \to E \\ x & \mapsto x \end{array}$$

- La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est une application. On peut écrire que $\ln \in$

- L'opération consistant à dérivée est une application.
  Elle part de l'ensemble

  Pour aller dans

- Soit E un ensemble et $A \subset E$. On définit l'application "indicatrice de A", notée $\mathbb{1}_A$ par :

$$\mathbb{1}_A: \begin{array}{ll} E & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

  Par exemple, si $A =]0,3[$, $\mathbb{1}_A(2) =$ et $\mathbb{1}_A(-1) =$.

2) Opérations :

a) Restriction

Définition :

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Soit $A \subset E$.
On appelle **restriction de f à A**, que l'on note parfois $f_{|A}$, l'application

$$f_{|A} : \begin{array}{ll} A & \to F \\ x & \mapsto f(x) \end{array}$$

Exemple :

L'application $\begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{array}$ peut être restreinte à $\mathbb{R}_+$ (si par exemple on veut considérer plus précisément la croissance de celle ci sur cet intervalle...)

b) Prolongement

Définition :

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Soit A un ensemble tel que $E \subset A$.
On appelle **prolongement de f à A** toute application g telle que $g_{|A} = f$.

Remarque :
Il y a en général une infinité de prolongements possibles .... Par exemple :

- L'application $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{|x|} \end{array}$ est un prolongement à $\mathbb{R}$ de l'application $\sqrt{\ } : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.
  En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x) = \sqrt{x}$.

  Graphiquement :

  On pourrait également considérer

$$g : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{array} \right. \end{array}$$

  Ce serait également un prolongement de $\sqrt{\ }$ à $\mathbb{R}$, dont la représentation graphique est

- Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

On peut montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et on peut ainsi prolonger f en 0 en posant $f(0) = 1$.

Lorsque la valeur choisie pour prolonger est la limite de la fonction en ce point, on dit qu'on a prolongé f "par continuité". En général, on ne renomme pas la nouvelle fonction obtenue, on précise simplement la nouvelle valeur :

$$f : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

3) Image directe, image réciproque

a) Image directe :

Définition :

Soit $f : E \to F$ une application. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$.
On appelle **image directe** de A par f, ou simplement **image de** A par f l'ensemble des images des éléments de A. On le note simplement $f(A)$ et on a

$$f(A) = \{f(a); a \in A\}$$

Autrement dit : $y \in f(A)$ si et seulement si $\exists x \in A, f(x) = y$.

Exemples :

Soit $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{array}$. Alors :

- $f(\{2, 3\})=$

- $f([0, 2]) =$

- $f([-1, 1] =$

Méthode : Comment déterminer $f(A)$?

Il n'existe pas de méthode valable pour toutes les applications.
Néanmoins, si f est une fonction "classique" dont l'étude est possible, le tableau de variation est un outil très important qui permet de déterminer facilement les ensembles images.

b) Image réciproque

Définition :

Soit $f : E \to F$ une application. Soit $B \subset F$. On appelle **image réciproque** de B l'ensemble de tous les antécédents des éléments de B.
On le note $f^{-1}(B)$ et on a

$$f^{-1}(B) = \{x \in E ; f(x) \in B\}$$

Autrement dit, $x \in f^{-1}(B)$ si et seulement si $f(x) \in B$.

Au secours ! **C'EST QUOI CETTE NOTATION ?**

La notation $f^{-1}(B)$ est de prime abord étrange. En effet, le $^{-1}$ est habituellement associé à l'inverse (puisque $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$).
Ici, $f^{-1}(B)$ ne veut surtout pas dire $\dfrac{1}{f(B)}$! On a en réalité toujours l'idée "d'inverse", mais dans l'idée "d'aller dans l'autre sens" (plus rigoureusement : c'est l'idée de *réciproque*).
Déterminer $f^{-1}(B)$, c'est chercher les éléments de E qui ont leurs image dans B : c'est bien fonctionner "en sens inverse" du sens normal d'une application.
D'où le $^{-1}$.

Méthode : **DÉTERMINATION DE L'IMAGE RÉCIPROQUE**

On cherche les éléments $x \in E$ vérifiant certaines conditions : il s'agira souvent de résoudre des équations ou des inéquations.

Exemple :

Soit $f : \begin{array}{rl} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

- $f^{-1}(\{4\}) =$
- $f^{-1}([0,2]) =$
- $f^{-1}([3,9]) =$
- $f^{-1}([-2,-1]) =$

c) Images, antécédent et inclusion

Propriété 4 :
Soit $f : E \to F$ une application.

(i) Soit A et B parties de E, alors

$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$$

(ii) Soient A et B parties de F, alors

$$A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$$

▷ *Preuve* :

◁

III Injections, surjections et bijections

1) Applications injectives :

a) Définition

Pour toutes les application, si $x = y$, alors $f(x) = f(y)$. Lorsque la réciproque est vraie, on pose la définition suivante :

Définition :
Soit f une application définie sur un ensemble E à valeur dans F.
On dit que f est **injective** sur E si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, \ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Autrement dit : une f est injective signifie que deux images sont égales seulement si les antécédents sont égaux... ou encore que les éléments de F (l'ensemble d'arrivée) ont au plus un antécédent (c'est à dire aucun ou un seul)

Exemple :

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est injective sur $\mathbb{R}_+$:

- La fonction $f : x \mapsto x^2$

Remarque :
La contraposée de la définition d'injective est intéressante également :

Propriété 5 :

f est injective sur un ensemble D si et seulement si :

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Autrement dit : deux éléments différents ont toujours une image différente...

b) Cas particulier de fonctions injectives :

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est croissante (resp. strictement croissante) si et seulement $x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$ (resp. $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$).

Proposition 2 :

Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle I. Alors f est injective.

▷ *Preuve* :

◁

Remarque :
On montre de même que si f est strictement décroissante, f est injective également.

Exemples :

- $x \mapsto e^x$ est injective sur $\mathbb{R}$ car strictement croissante.
- $x \mapsto \ln(x)$ est injective sur $\mathbb{R}_+^*$ car strictement croissante.
- $x \mapsto x^2$ est injective sur $\mathbb{R}_-$ car elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.
  Elle est également injective sur $\mathbb{R}_+$ car elle y est strictement croissante.
  Elle n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.

Danger ! INJECTIF NE SIGNIFIE PAS STRICTEMENT MONOTONE

Il existe des fonctions injectives qui ne sont ni croissante, ni décroissante.
Par exemple :

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

est injective sur $\mathbb{R}^*$, mais elle n'est ni décroissante, ni croissante sur $\mathbb{R}^*$.

Méthode : MONTRER QUE f EST INJECTIVE

Pour montrer qu'une application est injective on pourra :

1. Si c'est une fonction dérivable, étudier ses variations et voir si elle est strictement monotone.
2. On peut aussi résoudre l'équation à double inconnue $f(x) = f(y)$ et montrer que seul $x = y$ est possible.
3. On peut résoudre l'équation $y = f(x)$ et montrer qu'il ne peut jamais y avoir plusieurs solutions, quelle que soit la valeur de y.

2) Surjections :

Définition :

Soit $f : E \to F$ une application.

f est dite **surjective** sur F si et seulement si tout élément de F admet au moins un antécédent dans E.

Avec des quantificateurs : $\forall y \in F, \exists x \in E ; y = f(x)$

Propriété 6 :

soit $f : E \to F$. f est surjective si et seulement si $f(E) = F$

▷ *Preuve* : immédiat avec la définition de $f(E)$! ◁

Exemples :

- $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{array}$

- $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto x^2 \end{array}$

Méthode : MONTRER LA SURJECTIVITÉ

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est surjective, on pose $y \in F$ et on résout l'équation d'inconnue x : $f(x) = y$

La lettre y est alors un paramètre : on va chercher à résoudre sans connaitre ce y !

Si cette équation a toujours au moins une solution, quelle que soit la valeur de y, alors f est surjective et si on trouve au moins un y pour lequel il n'y a pas de solution, elle n'est pas surjective.

3) Bijections

a) Définition :

Définition :

Une application $f : E \to F$ est dite **bijective** si et seulement si elle est à la fois surjective et injective.
Autrement dit, f est bijective si et seulement si tout élément de F admet un et un seul antécédent dans E.
Ce que l'ont peut écrire sous la forme

$$\forall y \in F, \exists! x \in E; f(x) = y$$

Exemple :

- $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+ & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{array}$ n'est pas bijective car non surjective
- $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to {\mathbb{R}_+}^* \\ x & \mapsto e^x \end{array}$ est bijective.
- $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto |x| \end{array}$ n'est pas bijective (car non injective).

b) Bijection réciproque

Un des intérêts des bijections est d'avoir la possibilité de "revenir en arrière" :

Définition :

Soit $f : E \to F$ une application bijective. On appelle **bijection réciproque** l'application notée f^{-1} définie de la manière suivante :
pour tout $y \in F$ on note $f^{-1}(y)$ l'unique antécédent de y par f.
Ainsi : $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y$

Remarques :
Dans la définition, on a utilisé la variable y pour parler d'un élément de F. Cela permet de la distinguer de la variable x, utilisé précédemment pour un élément de E.
Néanmoins, en pratique, on utilisera aussi la variable x pour f^{-1}, en précisant soigneusement l'ensemble d'appartenance.

Au secours ! ENCORE CETTE NOTATION !

A nouveau, on retrouve le f^{-1} d'apparence ambigüe, avec cette fois $f^{-1}(x)$.
Attention ainsi à ne pas confondre $f^{-1}(x)$ et $f(x)^{-1}$!
A noter que cette notation est cohérente avec l'image réciproque : $f^{-1}(x)$ donne l'antécédent par f de x, tout comme $f^{-1}(A)$ donne l'ensemble des antécédents des éléments de A.

Theorème 2 :

Soit f une application de E dans F
f est bijective si et seulement si il existe $g : F \to E$ vérifiant SIMULTANEMENT les deux conditions suivantes :

(i) $\forall x \in E, g \circ f(x) = x$ (c'est à dire $g \circ f = Id_E$)
(ii) $\forall y \in F, f \circ g(y) = y$ (c'est à dire $f \circ g = Id_F$)

L'application g ainsi définie est en fait f^{-1}.

▷ *Preuve* :

◁

Exemples :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\exp(\ln(x)) = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\ln(e^x) = x$. Ainsi, ln est la bijection réciproque de exp.
- Pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x^2} = x$ et $(\sqrt{x})^2 = x$. Ainsi, la racine carrée est la bijection réciproque du carré, quand on restreint celui-ci à $\mathbb{R}_+$.

c) Composition de bijection

Propriété 7 :

Soient E, F et G trois ensemble et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives.
Alors $g \circ f$ est bijective, et sa bijection réciproque est

▷ *Preuve* :

◁

d) Représentation graphique de la réciproque :

Propriété 8 :

Soit f une fonction bijective à valeur dans $\mathbb{R}$ et soit f^{-1} sa bijection réciproque.
Soit $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ celle de f^{-1}.
Alors $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

En effet, soit $M \in \mathcal{C}_f$. Alors les coordonnées de M sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $y = f(x)$.
Ainsi, $f^{-1}(y) = x$, donc x est l'image de par f^{-1} de y.
Autrement dit, le point M' de coordonnées $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ est sur la courbe de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

e) Cas particulier de bijection

Theorème 3 : theorème de la bijection monotone

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application.
Si f est strictement monotone sur E, alors f est bijective de E sur $f(E)$.

▷ *Preuve* :

◁

En particulier, si on a affaire à une fonction continue sur un intervalle, on a :

Theorème 4 :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f est bijective de I sur l'intervalle $J = f(I)$.
En particulier, si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors

- Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $[a, b]$, alors f est une bijection de $[a\,, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.
- Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[a\,, b]$, alors f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$.

▷ *Preuve* : On le détaillera, mais c'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.
◁

Remarque :
Dans le cas où I un intervalle avec une ou des bornes infinies ou ouverte, on utilisera des limites et l'intervalle image est ouvert.
Par exemple, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Sa limite en 0 est $+\infty$, celle en $+\infty$ est 0.
C'est donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$