

# Outils d'étude de fonctions

## I Généralités sur les fonctions

### 1) Vocabulaire

#### a) Définition



#### Définition : Rappel

On appelle **fonction** tout objet mathématique qui à un élément  $x$  appartenant à un ensemble de départ  $E$  associe un élément appelé "image", appartenant à un ensemble d'arrivée  $F$ .

Si la fonction s'appelle  $f$ , on note  $f(x)$  l'image de  $x$  par  $f$ .

Si  $f$  est définie sur un ensemble  $E$  avec des images dans un ensemble  $F$ , on utilise la notation suivante :

$$f : \begin{array}{l} E \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

On dit alors que  $f$  est à **valeur dans F**.

#### Exemple :

La fonction cos est définie sur  $[-\pi, \pi]$  et est à valeur dans  $[-1, 1]$ .

#### Représentation graphique :

On suppose qu'on travaille dans le plan, muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

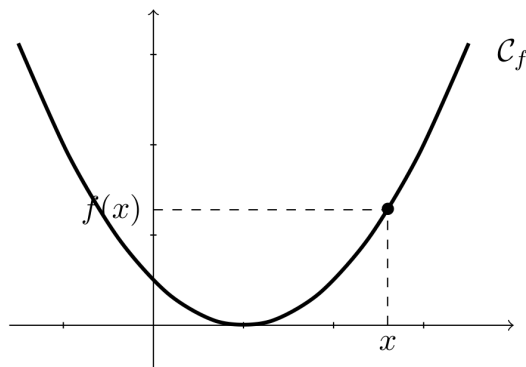


#### Définition :

Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $D$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ . On appelle courbe représentative de  $f$  (ou graphe de  $f$ ) l'ensemble des points de coordonnées  $(x, f(x))$  où  $x \in D$ .

On note fréquemment  $\mathcal{C}_f$  cette courbe et on peut écrire

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)), x \in D\}$$



#### b) Parité, périodicité



#### Définition :

Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $D$  avec  $D$  symétrique (c'est à dire : si  $x \in D$ , alors  $-x \in D$ ).

On dit que  $f$  est **paire** si  $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$ .

On dit qu'elle est **impaire** si  $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$ .

**Exemples :**

Les fonction suivantes sont paires :

Celles-ci sont impaires :

Et on peut être ni l'un ni l'autre :

**Interprétation graphique :**

Si  $f$  est paire, alors son graphe est

Si  $f$  est impaire, alors son graphe est

**Définition :**

Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $D$  et soit  $T > 0$ .  
On dit que  $f$  est périodique si et seulement si pour tout  $x \in D$ ,

$$x + T \in D \text{ et } f(x + T) = f(x)$$

**Exemples :**



### Méthode :

### EXPLOITER LA PARITÉ OU LA PÉRIODICITÉ

Si une fonction a des propriétés de parités ou de périodicité, travailler sur des restrictions de la fonction peut gagner du temps :

- ▶ Si  $f$  est paire ou impaire : on étudiera sur  $D \cap [0, +\infty[$ , et on déduit la partie négative par symétrie.
- ▶ si  $f$  est périodique de période  $T$ , on étudiera sur un intervalle de la forme  $[a, a+T]$ , et on déduit le comportement sur  $D$ .
- ▶ si  $f$  est à la fois paire ou impaire, et périodique, on peut alors travailler sur un intervalle de la forme  $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ ...

## 2) Opérations et fonctions

### a) Construction :



#### Définition :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un même ensemble  $D$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On définit :

- ▶  $f + g$  comme étant la fonction définie sur  $D$  par  $x \mapsto f(x) + g(x)$
- ▶  $fg$  comme étant la fonction définie sur  $D$  par  $x \mapsto f(x)g(x)$
- ▶  $\frac{f}{g}$  comme étant la fonction définie là où  $g$  ne s'annule pas par  $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$

On rappelle en outre la notion de composée :



#### Définition :

Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions. On appelle **composée** de  $g$  par  $f$  et on note  $g \circ f$  (lire  $g$  rond  $f$ ) la fonction définie par

$$g \circ f : x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x))$$

Son ensemble de définition est

$$\mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in A; f(x) \in B\}.$$

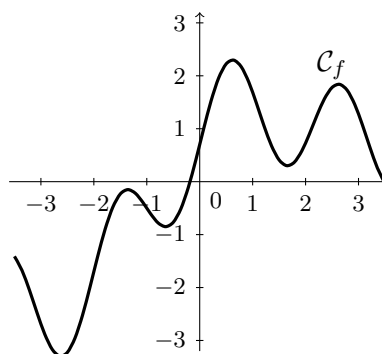
Schématiquement :

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)) = g \circ f(x).$$

### b) Effet sur la représentation graphique

Anticiper l'effet d'une opération sur le graphe d'une fonction est très important pour juger de la cohérence d'un résultat.

Supposons que le graph de la fonction d'origine soit donné par :



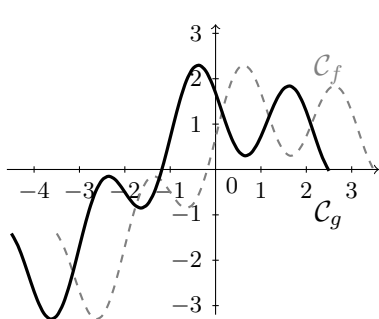
Et voyons l'effet de transformations fréquemment effectuées sur les fonctions....



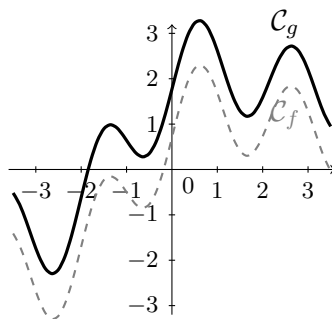
### Propriété 1 :

Soit  $f$  une fonction réelle dont la courbe représentative est notée  $\mathcal{C}_f$ .

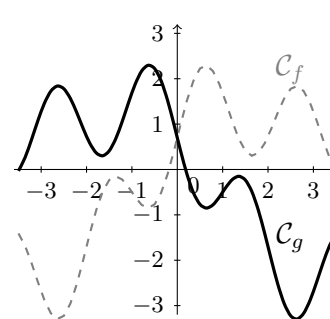
- ▶ La courbe de la fonction  $g : x \mapsto f(x + a)$  est l'image de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par la translation de vecteur  $(-a; 0)$  (décalage sur l'axe des abscisses);
- ▶ La courbe de la fonction  $g : x \mapsto f(x) + b$  est l'image de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par la translation de vecteur  $(0; b)$  (décalage sur l'axe des ordonnées);
- ▶ La courbe de la fonction  $g : x \mapsto f(-x)$  est l'image de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par la symétrie d'axe  $(Oy)$ .



$$g : x \mapsto f(x + 1)$$



$$g : x \mapsto f(x) + 1$$

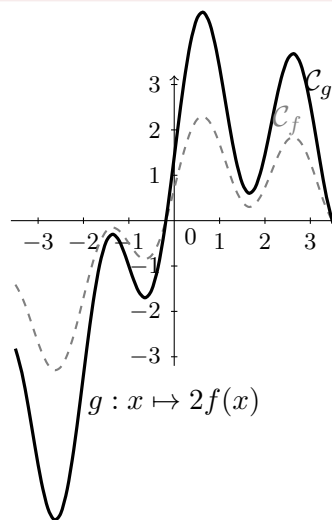


$$g : x \mapsto f(-x)$$

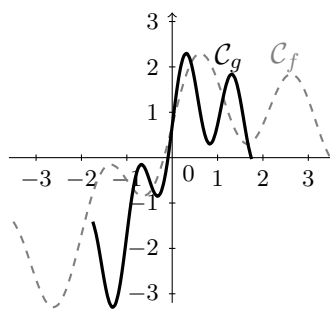


### Propriété 2 :

- ▶ La courbe de la fonction  $g : x \mapsto bf(x)$  est l'image de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par l'affinité d'axe  $(Ox)$  et de rapport  $b$  (la distance des points à l'axe des abscisses est multipliée par  $b$  : la courbe est étirée ou compressée verticalement).
- ▶ La courbe de la fonction  $g : x \mapsto f(ax)$  est l'image de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par l'affinité d'axe  $(Oy)$  et de rapport  $\frac{1}{a}$  (la distance des points à l'axe des ordonnées est multiplié par  $b$  : la courbe est étirée ou compressée horizontalement).

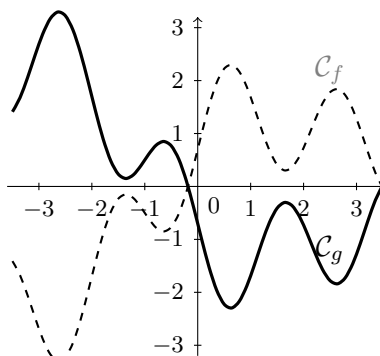


$$g : x \mapsto 2f(x)$$



$$g : x \mapsto f(2x)$$

En particulier, la courbe de la fonction  $g : x \mapsto -f(x)$  est l'image de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par la symétrie d'axe  $(Ox)$ .



$$g : x \mapsto -f(x)$$

### 3) Fonctions et inégalités

#### a) Monotonie



##### Définition :

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

- ▶  $f$  est dite **croissante** sur  $D$  si et seulement si

On dit qu'elle est **strictement croissante** sur  $D$  si et seulement si

- ▶  $f$  est dite **décroissante** sur  $D$  si et seulement si

On dit qu'elle est **strictement décroissante** sur  $D$  si et seulement si

- ▶  $f$  est dite **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur  $D$  si et seulement si elle est croissante (resp. strictement croissante) sur  $D$  ou décroissante (resp. strictement décroissante) sur  $D$

##### Exemples :

- ▶  $f : x \mapsto \exp(x)$  est

- ▶  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

- ▶  $f : x \mapsto \cos(x)$

## Une fonction en plus à connaître : la partie entière



### Définition :

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on appelle partie entière de  $x$ , noté  $[x]$ , l'unique entier  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $n \leq x < n + 1$ .

Par exemple :  $[2,3] = 2$  et  $[-3,1] = -3$



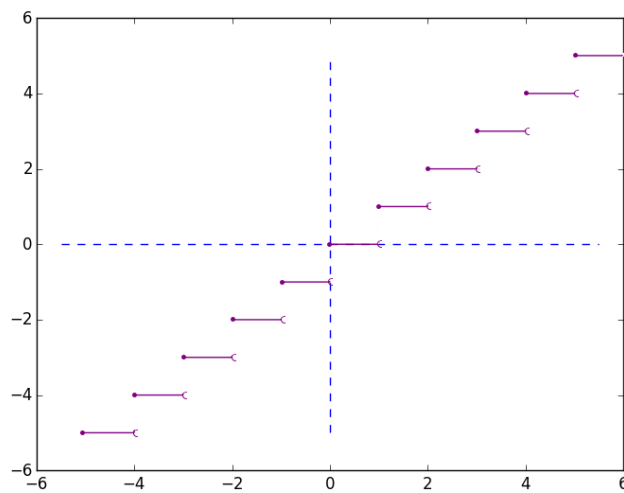
### Propriété 3 :

La fonction partie entière est croissante, mais pas strictement croissante

▷ Preuve :

◁

## Représentation graphique :



## b) Fonctions majorées, minorées ou bornées



### Définition :

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

On dit que

► On dit qu'une fonction  $f$  est **majorée** si et seulement si

►  $f$  est dite **minorée** si et seulement si

► On dit que  $f$  est **bornée** si et seulement si



### Propriété 4 :

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

1.  $f$  est minorée si et seulement si  $-f$  est majorée.
2.  $f$  est bornée si et seulement si  $|f|$  est majorée.

▷ Preuve :

◁

## c) Extremum de fonctions



### Définition :

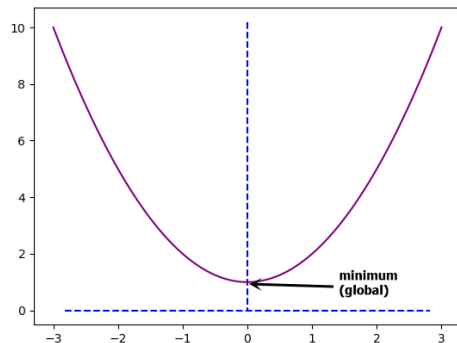
Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $c \in I$ .

On dit que  $f$  admet un minimum (resp un maximum) au point  $c$  si et seulement si  $\forall x \in I$ ,  $f(x) \geq f(c)$  (resp.  $f(x) \leq f(c)$ ).

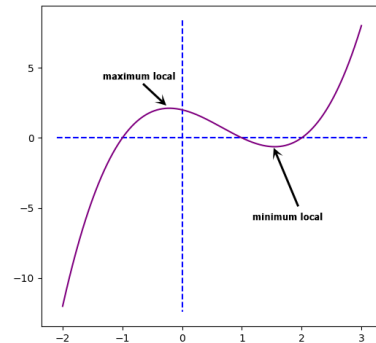
On parle de minimum local (resp maximum local) au point  $c$  si au voisinage de  $c$  (c'est à dire sur un intervalle autour de  $c$ ),  $f(c)$  est un minimum (resp maximum).

### Exemples :

►  $f(x) = x^2 + 1$ , minimum (global) en  $x = 0$ .



►  $f(x) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)$  : un minimum local et un maximum local



## II Dérivation :

### 1) Définition

#### a) "Rappels" sur les limites

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$ . Soit  $a \in I$ .

Intuitivement, on dit que  $f$  admet une limite  $\ell$  en  $a$ , si et seulement si  $f(x)$  peut approcher  $\ell$  autant qu'on veut lorsque  $x$  approche  $a$ . Ce qui donne formellement :

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ il existe } \alpha > 0 \text{ tel que, si } \underbrace{|x - a| \leq \alpha}_{\text{"en s'approchant de } a"}, \text{ alors } \underbrace{|f(x) - \ell| \leq \varepsilon}_{\text{"on s'approche de } \ell}.$$

Le " $\forall \varepsilon$ " traduit le "autant qu'on veut".

#### b) Rappels sur la continuité :



##### Définition :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$ . Soit  $a \in I$ . On dit que  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

##### Exemples :

- ▶ La plupart des fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition.
- ▶ La fonction partie entière n'est pas continue sur les entiers.

Concrètement, une fonction continue est une fonction qui n'a pas "de trous", ce qui se traduit via le résultat suivant :



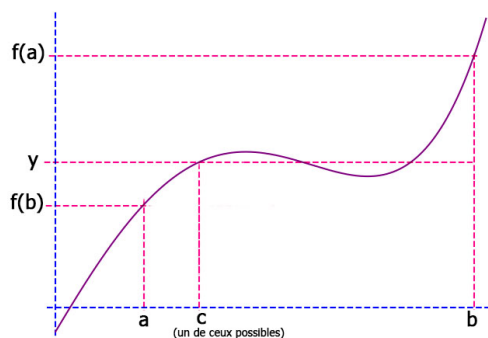
##### Theorème 1 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$  et  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Alors pour tout réel  $y$  entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe (au moins un)  $c$  dans l'intervalle  $[a, b]$  tel que  $f(c) = y$

Ce théorème se généralise facilement au cas où  $a$  ou  $b$  sont infinis en remplaçant  $f(a)$  et  $f(b)$  par  $\lim_a f$  et  $\lim_b f$ .

▷ *Preuve* : On admet pour le moment

◁



##### Exemple d'utilisation :

Recherche de zéro par dichotomie.



### c) Dérivation



#### Définition :

Soit  $I \subset \mathbb{R}$ . On dit qu'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable en un point  $x_0 \in I$  si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe et est finie.}$$

On note alors cette limite  $f'(x_0)$  on encore  $\frac{df}{dx}(x_0)$ .

#### Remarques :

1. En faisant le changement de variable  $x = x_0 + h$  on obtient une définition équivalente :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

2. On dit qu'une fonction est dérivable sur un ensemble  $I$  si et seulement si elle est dérivable en tout point  $x_0 \in I$ . On note alors  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .
3. Le lien entre continuité et dérivabilité se fait avec le théorème suivant :



#### Theorème 2 :

Si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , alors  $f$  est continue en  $x_0$ .

▷ Preuve :

◁

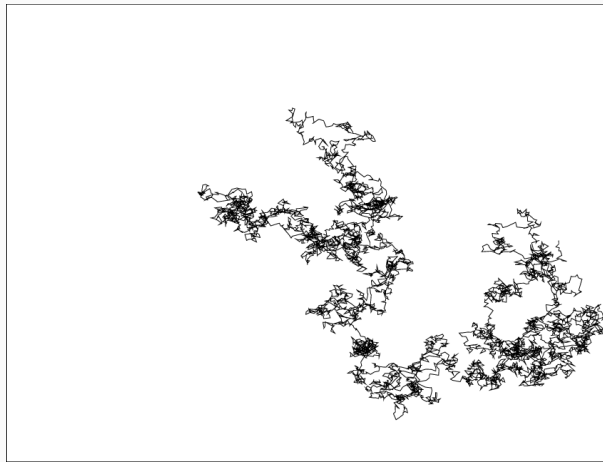
**ATTENTION** : la réciproque est fautive : ce n'est pas parce que  $f$  est continue qu'elle est dérivable...

**? Le saviez-vous ?  
PART DÉRIVABLE**

**UN EXEMPLE DE FONCTION CONTINUE NULLE**

Il existe des fonctions continues sur leur ensemble de définition, mais dérivable nulle part.

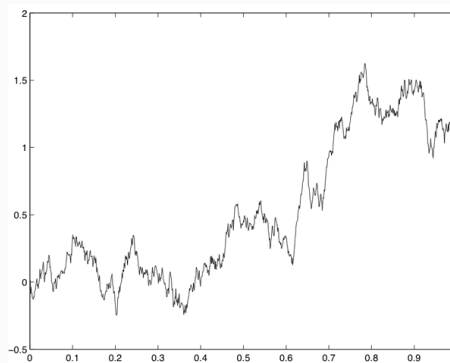
L'une des plus connues est appelée "mouvement brownien", découverte par le botaniste Robert Brown au début du 19e siècle, en observant au microscope le mouvement d'un grain de pollen dans l'eau.



trajectoire d'un mouvement brownien dans le plan

En 1905, Albert Einstein, dans un de ses trois articles de thèse, a montré que ce mouvement aléatoire est dû au choc des molécules d'eau sur le grain de pollen, mais c'est à Louis Bachelier en 1901 que l'on doit la première description mathématique du phénomène.

Réduit à une seule dimension, le mouvement brownien devient une fonction :



exemple de mouvement brownien en tant que fonction

Louis Bachelier en a fait une description probabiliste, avec des lois normales. Il a montré qu'elle est continue, mais nulle part dérivable... et surtout la ressemblance avec les courbes de la Bourse lui est apparue évidente !

Il l'a utilisé alors avec succès pour des modèles financiers, créant de fait une toute nouvelle branche des mathématiques : les mathématiques financières.

Louis Bachelier a enseigné à Besançon de 1927 à 1937.

## 2) Interprétations :

### a) Taux d'accroissement :

#### Définition :

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On appelle taux d'accroissement de  $f$  en  $x_0$  la fonction

$$T_{x_0} : h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Le taux d'accroissement  $T_{x_0}(h)$  peut être vu comme la "vitesse" de variation de  $f$  pendant la durée  $h$ . En effet,  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  donne la variation de  $f$  entre les instants  $x_0$  et  $x_0 + h$ .

En divisant par le temps  $h$ , on obtient bien la vitesse moyenne de variation de  $f$  entre  $x_0$  et  $x_0 + h$ .

La limite (donc la dérivée) correspond à la vitesse instantanée.

### b) En physique/chimie :

La notation  $f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$  provient directement de cette idée d'accroissement, et elle est parfois écrite sous la forme

$$df(x) = f'(x)dx \text{ ou plus simplement } df = f'(x)dx$$

Toutes les variantes imaginables en terme de variable sont possibles ( $dx = x'(t)dt$ ,  $d\varphi = \varphi'(t)dt, \dots$ ).

Le "d" provient du terme "différentiel". Il signifie qu'on regarde une différence, sous entendue très petite. Ainsi,  $df(x)$  signifie qu'on regarde  $f(x + h) - f(x)$  pour  $h$  très petit.

De même,  $dx$  veut dire qu'on fait une très petite différence autour de  $x$  : c'est en fait la différence entre  $x + h$  et  $x$ .

À partir de l'expression du taux de variation, on a donc :

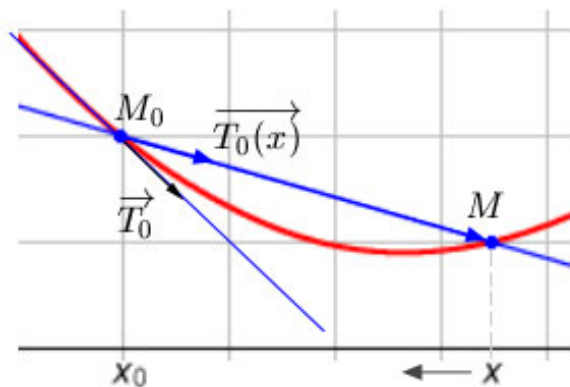
$$\underbrace{f(x + h) - f(x)}_{\text{variation de } f} = \underbrace{T_x(h)}_{\text{taux de variation}} \times \underbrace{(x + h - x)}_{\text{variation de } x}$$

Maintenant, passons à la limite quand  $h \rightarrow 0$  (donc  $h$  très petit). On obtient :

$$df(x) = f'(x)dx$$

On retrouve donc bien la relation que vous utiliserez en physique ou en chimie, qui est donc "justifiée".

### c) Interprétation graphique et tangente :



Considérons le déplacement sur la courbe de la fonction  $f$  entre les instants  $x$  et  $x_0$ . Ceci est donné par le vecteur

$$\overrightarrow{M_0M} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ f(x) - f(x_0) \end{pmatrix}.$$

Ramenons le en terme d'unité de temps, pour obtenir un vecteur vitesse :

$$\text{On obtient } \overrightarrow{T_0(x)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{pmatrix}.$$

Si  $f$  est dérivable,  $\overrightarrow{T_0(x)}$  tend lorsque  $x \rightarrow x_0$  vers un vecteur limite :  $\overrightarrow{T_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$ .

Ainsi, le vecteur  $\overrightarrow{T_0(x)}$  prend une position limite, qui va être le vecteur directeur de la tangente à la courbe de  $f$  au point  $M_0$ . On peut alors donner l'équation cartésienne de cette tangente :

⚙ **Proposition 1 : Equation de la tangente à la courbe de  $f$  en un point**

Soit  $f$  dérivable en un point  $x_0$ . Alors la courbe représentative de  $f$  admet une tangente au point  $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$  dont une équation cartésienne est :

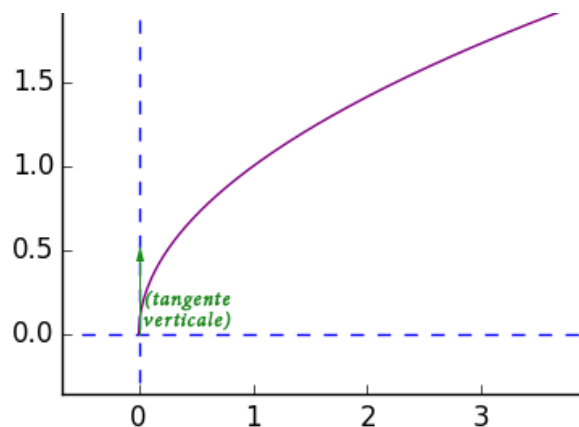
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

A noter qu'il est possible que  $f$  ne soit pas dérivable, mais admette une tangente tout de même :

⚙ **Proposition 2 :**

Soit  $f$  une fonction définie en un point  $x_0$  et soit  $T_{x_0}$  son taux d'accroissement en  $x_0$ . Si  $\lim_{h \rightarrow 0} T_{x_0}(h) = +\infty$  ou  $-\infty$ , alors la courbe de  $f$  admet une tangente verticale au point  $x_0$ , d'équation  $x = x_0$ .

Exemple : soit  $f : x \mapsto \sqrt{x}$ .



### 3) Opération sur les dérivées : rappel de formulaire

Nous prouverons les résultats de cette section plus tard dans l'année

#### a) Combinaisons linéaires :

Vocabulaire : si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions, on appelle **combinaison linéaire** de  $f$  et  $g$  toute fonction de la forme  $\lambda f + \mu g$  où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des réels.

##### ⚙️ Proposition 3 :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables en  $x_0$ . Alors  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\lambda f + \mu g$  est dérivable et on a :

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$$

On dit que l'opération de dérivation est une application linéaire sur l'espace des fonctions dérivables...

#### b) Produit et quotient de fonctions dérivables

##### ⚙️ Proposition 4 :

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables en  $x_0$ , alors  $u \times v$  est dérivable en  $x_0$  avec

$$(u \times v)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$$

En abrégé :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

##### ⚙️ Proposition 5 :

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables en  $x_0$  avec  $v(x_0) \neq 0$ , alors  $\frac{u}{v}$  est dérivable en  $x_0$  et on a

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v(x_0)^2}$$

En abrégé :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

#### c) Composition de fonctions dérivables

##### ⚙️ Proposition 6 :

Soit  $u : E \rightarrow F$  et  $v : F \rightarrow G$  telles que  $u$  est dérivable en  $x_0 \in E$  et  $v$  dérivable en  $u(x_0)$ . Alors  $v \circ u$  est dérivable en  $x_0$  et on a

$$(v \circ u)'(x_0) = v'(u(x_0))u'(x_0)$$

En abrégé :

$$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$$

#### Remarques :

1. L'idée est que lorsque l'on dérive  $g \circ f$ , il ne suffit pas de regarder la pente de  $g$ , mais également prendre en compte celle de  $f$  (d'où la multiplication par  $f'$ )
2. Peut-être plus facile à retenir en écrivant sous la forme  $f(X)$  où  $X$  est une fonction également : on a alors  $(f(X))' = f'(X) \times X'$ .

#### Exemples :

$f(x) = e^{\cos(x)}$  se dérive en

$f(x) = \ln(3x^2 + x + 1)$  a pour dérivée

## Quelques formules de compositions pratiques à retenir :



### FORMULAIRE

### DÉRIVÉE DE COMPOSITION

Soit  $u$  une fonction dérivable. Sous réserve de définition et d'existence des dérivées des fonctions considérées :

1. Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  
 $(u^n)' = nu^{n-1}u'$

2.  $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

3.  $(e^u)' = u'e^u$

4.  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

5.  $(\sin u)' = u' \cos(u)$

6.  $(\cos u)' = -u' \sin(u)$

7.  $(\tan u)' = u'(1 + \tan^2(u)) = \frac{u'}{\cos^2(u)}$

## 4) Dérivée de la bijection réciproque :

### a) Rappels (cf chapitre 2 d'algèbre) :

Une application  $f : E \rightarrow F$  est dite bijective si et seulement si elle est injective et surjective. Cela signifie que :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E \text{ tel que } f(x) = y$$

On note alors  $f^{-1}$  l'application définie sur  $F$  à valeur dans  $E$  qui à tout  $y$  de  $F$  associe l'unique  $x \in E$  tel que  $f(x) = y$ .

Ainsi

$$\forall x \in F, f \circ f^{-1}(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in E, f^{-1} \circ f(x) = x$$

### Exemples :

►  $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\ln(e^x) = x$  et pour tout  $x > 0$ ,  $e^{\ln(x)} = x$ .

►  $x \mapsto \sqrt{x}$  est la bijection réciproque de  $x \mapsto x^2$  vue comme fonction de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$ .

### b) Dérivation de la réciproque



#### Proposition 7 :

Soit  $f$  une fonction bijective d'un intervalle  $I$  sur un intervalle  $J$ , et soit  $f^{-1} : J \rightarrow I$  sa bijection réciproque.

Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  avec  $f'(x_0) \neq 0$ , alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $y_0 = f(x_0)$  et on a

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y_0)}$$

En abrégé :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

► *Preuve* : On admet pour le moment....

◀

### Remarque :

Si  $f'(x_0) = 0$ , la limite du taux d'accroissement de  $f^{-1}$  vaut  $\pm\infty$  ou n'existe pas. Ainsi,  $f^{-1}$  est dérivable en  $y_0 = f(x_0)$  si et seulement si  $f'(x_0) \neq 0$ .

On peut deviner cette condition graphiquement :

## c) Exemple : dérivée d'exponentielle

## 5) Primitives et intégrale :



### Définition :

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle et  $f$  une fonction définie sur  $I$ . On appelle primitive de  $f$  sur  $I$  toute fonction  $F$ , dérivable sur  $I$  et telle que, pour tout  $x \in I$ ,  $F'(x) = f$ .

### Exemples :

Une primitive de  $x \mapsto x$  sur  $\mathbb{R}$  est

$x \mapsto \sqrt{x}$  est une primitive de  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$

La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  admet comme primitive :

On admet que toute fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$  admet une primitive et on pose la définition temporaire suivante :



### Définition : Intégrale

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$ , et soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ . On appelle intégrale de  $a$  à  $b$  de  $f$  la quantité

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

**Exemple :**

Calculons  $\int_1^2 x dx$  et  $\int_2^3 x dx$ .



**REMARQUE :**

**ET SI  $a$  OU  $b$  SONT INFINIS ?**

On trouve (vous en rencontrerez en particulier en SI) des écritures de la forme

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt, \int_{-\infty}^b f(t) dt \text{ ou même } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

Il s'agit en réalité de limite d'intégrale.

Par exemple,  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  signifie  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$

**Exemple :**

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx =$$



# III Dérivation et étude de fonctions :

## 1) Dérivée et tableau de variation

### a) Monotonie :

L'étude de la dérivée est un outil efficace pour étudier la monotonie d'une fonction grâce aux résultats ci dessous :



#### Theorème 3 :

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  (ou éventuellement infinis) avec  $a < b$ .

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Alors

1.  $f$  est croissante sur  $[a, b]$  si et seulement si  $\forall x \in ]a, b[, f'(x) \geq 0$ .
2.  $f$  est décroissante sur  $[a, b]$  si et seulement si  $\forall x \in ]a, b[, f'(x) \leq 0$ .
3.  $f$  est constante sur  $[a, b]$  si et seulement si  $\forall x \in ]a, b[, f'(x) = 0$ .



#### Theorème 4 :

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable en sur  $]a, b[$  avec  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$  **sauf éventuellement en un nombre finis de points**.

Alors  $f$  est strictement croissante sur  $[a, b]$ .

Ces deux résultats seront montrés ultérieurement avec un outil très efficace appelé "théorème des accroissements finis"...



#### À noter :

#### ATTENTION AUX BORDS

1. Il est important dans ces théorème de voir que  $f$  n'a pas besoin d'être dérivable aux bornes de l'intervalle considéré. C'est important pour dire par exemple que la fonction  $\sqrt{\cdot}$  est croissante à partir de l'étude de sa dérivée : elle n'est pas dérivable en 0, mais ce n'est pas grave :  $\sqrt{\cdot}$  est bien croissante sur  $[0, +\infty[$  car sa dérivée est  $\geq 0$  sur  $]0, +\infty[$ .
2. La version pour la stricte monotonie peut paraître surprenante aussi : il peut y avoir des moments où la dérivée s'annule (voire même n'existe pas !), mais tant que c'est ponctuel, cela ne crée pas de palier comme dans la partie entière...

## b) Tableau de variation :

Il est fréquent de représenter dans un tableau les variations d'une fonction, en indiquant intervalle par intervalle le signe de la dérivée pour en déduire les variations. Un tableau de variation est considéré complet quand il y a en outre les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

**Exemple :**

$$\text{Soit } f : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

## c) Tracé de la courbe



**Méthode :**

**COMMENT BIEN TRACER UNE COURBE**

Soit  $f$  une fonction étudiée sur un domaine  $D$ .

- ▶ **Etape 1 :** Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité, puis dresser un tableau de variation.
- ▶ **Etape 2 :** Compléter le tableau avec les limites
- ▶ **Etape 3 :** Repérer et placer les points remarquables :
  - Les points où  $f$  admet un extremum
  - Les points où la dérivée s'annule
  - Eventuellement le moment où  $f$  s'annule
  - Eventuellement l'ordonnée à l'origine
  - Eventuellement quand la dérivée vaut 1 ou  $-1$
- ▶ **Etape 4 :** Tracer les droites remarquables :
  - Les asymptotes verticales quand la limite en un point est infinie
  - Les asymptotes horizontales quand les limites à l'infinie sont finies
  - Les tangentes horizontales quand la dérivée vaut 0
  - Les tangentes verticales quand le taux d'accroissement tend vers  $+\infty$ .
  - Eventuellement les tangentes à  $45^\circ$  quand la dérivée vaut 1 ou  $-1$ .
  - Eventuellement les asymptotes obliques.
- ▶ **Etape 5 :** Tracer  $\mathcal{C}_f$  en exploitant tout ce qu'on a repéré précédemment.

**Exemple :**

Traçons maintenant le graphe de  $f : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$

## 2) Dérivées successives

### a) Dérivée $n$ -ème

**Définition :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On définit la dérivée  $n$  ième de  $f$  (ou “dérivée d’ordre  $n$ ”) en un point  $x \in I$ , notée  $f^{(n)}(x)$ , de la façon suivante :

(i)  $f^{(0)}(x) = f(x)$

(ii) Pour  $n \geq 1$ , on dit que  $f$  est  $n$  fois dérivable en  $x$  si sa fonction dérivée d’ordre  $n - 1$  ième est dérivable en  $x$  et on pose  $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$

**Exemples :**

$f : x \mapsto e^x :$

$f : x \rightarrow \sin x$

## b) Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$



### Définition :

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On dit qu'une fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur un intervalle  $I$  ssi  $f$  est dérivable  $n$  fois sur  $I$  et que sa dérivée  $n$  ième  $f^{(n)}$  est continue sur  $I$ .  
Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

### Exemples :

1. les fonctions cos, sin, exp sont toutes de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $\mathbb{R}$ , et ce pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Elles sont donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .
2. Etudions la classe de la fonction suivante en 0 :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



### À noter :

On appelle "régularité" d'une fonction toutes les informations relatives à sa dérivabilité et sa continuité. Intuitivement, la meilleure régularité pour une fonction, c'est être de classe  $\mathcal{C}^\infty$  : cela se traduit par des fonctions dont la courbe représentative est particulièrement "lisse". Au contraire, une courbe qui présente des "pics" ou des modifications brusques, des irrégularités, correspond à une fonction qui n'a pas peut-être pas ses dérivées existantes ou continue.

### RÉGULARITÉ

### Retour sur l'exemple précédent :

Cette notion reste difficile à appréhender car la deuxième fonction de l'exemple précédent a un graphe très "lisse" en apparence...

### c) Opération et fonction de classe $\mathcal{C}^n$

Comme pour la continuité et la dérivabilité et avec le même genre de démonstration, on a :



#### Propriété 5 :

1. La somme, le produit, les combinaisons linéaires de fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sont de classe  $\mathcal{C}^n$
2. Si  $f$  et  $g$  sont  $\mathcal{C}^n$  sur un intervalle  $I$ , alors  $\frac{f}{g}$  est  $\mathcal{C}^n$  en tout point de  $I$  où  $g$  ne s'annule pas.
3. Si  $f \in \mathcal{C}^n(I)$  et  $g \in \mathcal{C}^n(J)$  avec  $f(I) \subset J$ , alors  $g \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ .

En outre, on dispose d'une formule parfois utile pour le produit :



#### Proposition 8 : Formule de Leibniz

si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^n$  sur un intervalle  $I$ , alors  $fg$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  et on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

▷ *Preuve* : Même preuve que le Binôme de Newton, comme on peut s'y attendre! ◁

## 3) Dérivées partielles

### a) Fonction de deux variables

Pour simplifier l'étude, on se concentre sur le cas de 2 variables, on peut bien sûr étendre à des fonctions à 3, 4...  $n$  variables!



#### Définition :

On appelle fonction de 2 variables réelles toute application  $f$  définie sur un domaine  $D \subset \mathbb{R}^2$  et à valeur dans  $\mathbb{R}$ . on a alors

$$f : \begin{cases} D & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto f(x, y) \end{cases}$$

#### Exemples :

1.  $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$  est une fonction de deux variables, définie sur

L'image de  $(2, 3)$  est

2. Déterminez le domaine de définition de  $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{x + 2y + 1}$

## b) Applications partielles



### Définition :

Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de 2 variables.

Soit  $M = (x_0, y_0)$  un point de  $D$ .

On appelle 1ère application partielle au point  $M$  la fonction

$$f_1 : t \mapsto f(t, y_0)$$

On appelle 2ème application partielle au point  $M$  la fonction

$$f_2 : t \mapsto f(x_0, t)$$

### Exemples

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x^2 + y^3$ . Soit  $M = (2, -1)$ .

La première application partielle de  $f$  en  $M$  est la fonction

$$f_1 : t \mapsto$$

La deuxième est la fonction

$$f_2 : t \mapsto$$

La première application partielle de  $f$  au point  $(0, 0)$  est

$$f_1 : t \mapsto$$

## c) Dérivée partielles



### Définition :

- Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de 2 variables.

Soit  $M = (x_0, y_0)$  un point de  $D$ , et soient  $f_1$  et  $f_2$  les applications partielles en  $M$ .

Si  $f_1$  est dérivable en  $x_0$ , on dit que  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à la

1-ère variable en  $M$ , et on note la dérivée  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ .

Autrement dit, on a  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_1(x_0)$

De même, on pose  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_2(y_0)$

- Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  admet des dérivées partielles en tout point  $M = (x, y)$  du domaine, on définit alors les applications dérivées partielles sur  $D$  par

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

### Remarque :

En pratique, il faut penser les autres variables comme "fixées". Si on dérive par rapport à  $x$ ,  $y$  est vue comme constante. Si on dérive par rapport à  $y$ , c'est  $x$  qui est constante. De même s'il y a d'autres variables impliquées.

**Exemples :**

Les dérivées partielles de  $f : (x, y) \mapsto x + \cos(y)$  sont données par :

Les dérivées partielles  $f : (x, y) \mapsto e^{xy^2}$  sont :